

低気圧の発達とエストークの方法

および日本附近への応用

岸 保 勘 三 郎*

は し が き

最近エストーク (Estoque) によって地上低気圧の発達を図式的に予報する方法が提案された。この便利な方法は、気象庁予報課、東北管区気象台、新潟地方気象台、及び大阪管区気象台の一部の人々によって追試され、ある程度現業化の方向へとすすめられている。このような段階において、あえて筆者がこの方法について筆をとったのは、この方法が簡潔な図式計算の中に現在の数値予報のエッセンスを充分にとりいれており、次の発展のために数値予報の現状を考え直してみる素材をわれわれに提供してくれると、思ったからである。

本文では、まずエストークの方法のできる前に、シカゴ気象局の人々を中心にして確立された定性的な低気圧の発達予報方式をのべる。次にその集約点としてエストークの方法を考えてみた。とくに後者の方法では、いろいろな仮説があり、それが日本の多くの人々にとっては疑問をもたれている。しかしその後より完全な予報形式はフォルトフト (Fjortoft) によって導かれているので³⁾、新しい形式をのべてみたい。なお多くの実例、技術的に大切な点は、草野氏によって東北管区気象台の報告に、また山岸氏によって新潟気象台の報告に書かれているので、読者の貴重な参考資料として指摘しておきたい。

最後にこの方法を日本附近に応用した実例について述べる。

§ 1 低気圧の発達

地上低気圧の発達に関しては、ブアルクネス (Bjerknes) 及びサットクリフ (Sutcliffe) による予報方式が提案されており、有名な台湾坊主の発達については最近織畑氏がブアルクネスの方法を適用して、この方法がかなり有効なものであることを示された³⁾。

経験的には、いろいろな形でブアルクネスの考えはとりいれられており、またサットクリフの考えも追試はかなり行われているのが日本の現状であろう。しかし、これらは流体力学の運動方程式と緊密な関係の上に定量的に議論されていないうらみがあるので、ここではペッテルセン (Petterssen) を中心とした人々の発達の予報形式をのべてみたい。定量的という点では、サットクリフの方法も同じではあるが、彼の与えた予報方式が直観的に理解しにくいので、基本的にはサットクリフの考えを表現し直した新しい方法をのべてみる。

まず発達の問題を論ずる出発点の式は、渦度方程式である。すなわち

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\mathbf{V} \cdot \nabla \eta - n \text{div} \mathbf{V} \quad (1.1)$$

ただし $\eta = f + \zeta$

ここで f はコリオリーのパラメーターで、 ζ は渦度である。すなわち渦度 (正確には絶対渦度) の時間的变化は、(1.1) の右辺の第一項及び第二項にそれぞれ示されているように、渦度の移流と、発散の効果による渦度変化にわけられる。大気の中層では発散の効果は小さく、

近似的には次式が成立つ。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} \approx -\mathbf{V} \cdot \nabla \eta \quad (1.2)$$

しかし地上付近すなわち大気の下層では、風速 \mathbf{V} が弱いので (1.1) の右辺の第 1 項は第 2 項にくらべて省棄することができる。すなわち

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} \approx -n \text{div} \mathbf{V} \quad (1.3)$$

(1.3) は非常に発達した低気圧または後述の例で示すように台風のような場合には成立しないけれども、普通の大気擾乱の場合には、大気下層の渦度変化は、(1.3) の右辺で示された収斂または発散によってきまると考えてよい。したがって地上低気圧の発達か否かの判定材料は、地上における収斂または発散の大きさによってきまるといふ一つの仮説が成立する。

次の問題点は、地上の発散または収斂を定量的にどうきめるかということである。それをきめるためには、どうしても大気を三次元的に考えなくてはならない。大気の下層の収斂は上層における発散によって補償されており、下層の発散は上層の収斂と対応している。この上層と下層との対応をつけるために、 $\text{div} \mathbf{V}$ に関連した微分方程式のことを少しのべなければならぬ。普通 (x, y, p) 座標系を用いると表現が簡単になり、 (x, y, z) 座標系における垂直速度 w に対応するものとして鉛直 p -速度を

$$\omega = \frac{dp}{dt} \quad (1.4)$$

と定義しておく。この ω は近似的に

* 東京大学理学部地球物理学教室

$$\omega = -\rho g w \quad (1.5)$$

とかけ、 w と符号が反対になっている。このような表現を用いると

$$\text{div } \mathbf{V} = -\frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (1.6)$$

となる。したがって ω についての微分方程式は $\text{div } \mathbf{V}$ と密接な関係をもってくる。 ω の方程式は、普通、渦度方程式(1.1) と断熱の式から時間微分の項を省略することによってえられる。断熱の式は

$$\frac{d}{dt} \ln \theta = 0 \quad (1.7)$$

ただし

$$\ln \theta = \ln \alpha + \frac{c_v}{c_p} \ln p + \text{const} \quad (1.8)$$

θ は温位、 α は比容である。 $\frac{d}{dt}$ という操作をかき直して(1.7)は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \ln \theta + \omega \frac{\partial}{\partial p} \ln \theta = 0 \quad (1.9)$$

(1.1) と (1.9) から時間微分を省略すると次式をうる。

$$f \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} + \frac{S}{f} \nabla^2 \omega = \frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{V} \cdot \nabla \eta) - \frac{g}{f} \nabla^2 \left(\mathbf{V} \cdot \nabla \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right) \right) \quad (1.10)$$

ただし $S = -\frac{\alpha}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}$: 安定度のパラメーター

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

この式のくわしい導き方は附録1を参照されたい。

(1.10) をたとえば 500mb から 1000mb までに関して積分することを考える。ここで積分の上端を 500mb としたのは、500mb を $-\frac{\partial \omega}{\partial p} = \text{div } \mathbf{V} = 0$ すなわち非発散高度と仮定したからである。非発散高度が 300mb の時は 300mb から 1000mb 迄とることになるが、ここでは一応を 500mb 非発散高度にしておく。(1.10) の積分により、

$$\left[f \frac{\partial \omega}{\partial p} \right]_{1000} = -[\mathbf{V} \cdot \nabla \eta]_{500} + [\mathbf{V} \cdot \nabla \eta]_{1000} + \frac{g}{f} \nabla^2 (\mathbf{V}_{500} \cdot \nabla h) - \frac{S}{f} \nabla^2 \bar{\omega} \quad (1.11)$$

ただし $h = Z_{500} - Z_{1000}$, $\bar{\omega} = \int_{600}^{1000} \omega dp$

すなわち 1000mb での発散は 500mb と 1000mb での渦度の移流差及び層厚(シックネス)の移流の ∇^2 及び平均の $\bar{\omega}$ の ∇^2 の和で表わされる。

(1.1) の $\text{div } \mathbf{V}$ を ω でかき直すと 1000mb での渦度方程式は

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_{1000} = -(\mathbf{V} \cdot \nabla \eta)_{1000} + f \left(\frac{\partial \omega}{\partial p} \right)_{1000} \quad (1.12)$$

ただし $\eta \text{ div } \mathbf{V}$ は近似的に $f \text{ div } \mathbf{V}$ としてある。(1.11) と (1.12) より

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_{1000} = -(\mathbf{V} \cdot \nabla \eta)_{500} + \frac{g}{f} \nabla^2 (\mathbf{V}_{500} \cdot \nabla h) - \frac{S}{f} \nabla^2 \bar{\omega} \quad (1.13)$$

$$\approx -(\mathbf{V} \cdot \nabla \eta)_{500} + \frac{g}{f} \mathbf{V}_{500} \cdot \nabla (\nabla^2 h) - \frac{S}{f} \nabla^2 \bar{\omega} \quad (1.14)$$

1000mb での渦度変化は 500mb での渦度の移流、温度風渦度 ($\nabla^2 h$) の移流及び平均鉛直 p -速度の ∇^2 の三つの項で表現できる。従って地上の低気圧の発達はこの各項のどれが一番大きくかによって表現されることになる。

§ 2 地上低気圧の発達予報方式

(1.13) または (1.14) の各項は発達の初期と十分に発達した場合とにわけて考えると便利である。

(1) 発達しはじめるとき

この時は地上に弱い前線がゆっくりすすんでいるときなので、(1.13) または (1.14) の右辺の第2項及び第3項は非常に小さい。すなわち

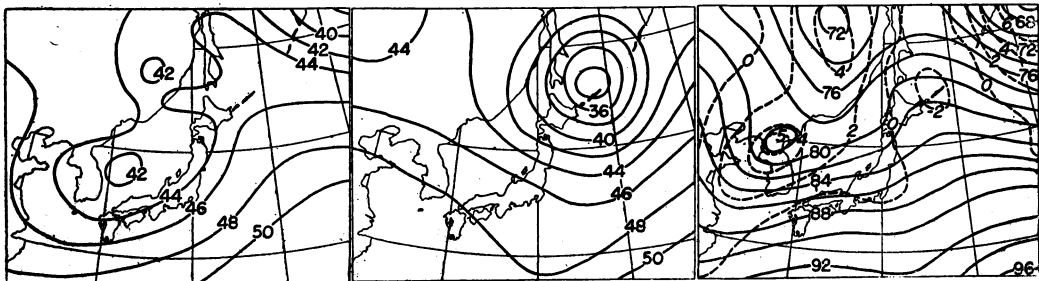
$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_{1000} \approx -(\mathbf{V} \cdot \nabla \eta)_{500} \quad (2.1)$$

このようにおけるのは、発達初期には擾乱の波長が長いので ω または h の ∇^2 という操作で長波の効果は小さいものになるからである。また ω 及び $\mathbf{V} \cdot \nabla h$ 自身の値も小さい。1000mb の渦度変化は 500mb (上層の非発散高度) での渦度の移流にのみよってきまる。ベッテルセンはこのことを次のようにのべている。

「停滞前線またはゆっくりすすむ前線が地上にあり、その上層で強い渦度の移流があるとき低気圧は発達する」。

このことをシノプティックな言葉でもう少し説明を加えると、地上に前線があり、上層にトラフが近づいている場合になる。一例として1954年9月の北海道旋風をとりあげてみる。9月9日03Zにおける850mbの天気図は図1に示してある。朝鮮の東海岸に弱い低気圧があり、これが24時間後に日本海を東進して北海道上層に達し急速に発達した例である。図2は9月10日03Zの850mbの天気図である。中心高度は4,200フィートから3,600フィートにさがっている。9月9日03Zの850mbに対応して地上では日本海から朝鮮附近に前線が走っている。この時500mbでは朝鮮北部に気圧の谷があり、9日03Z以後この谷による渦度の強い移流がおこなわれる。図3には9日03Zの500mbの天気図が示してある。図の中に点線で等渦度線が示してある。特に朝鮮北部の強い渦度に注目してみたい。

この渦度が一般場で日本海の方に流されて、前線をより強め、地上の低気圧の発達をうながす最大の原因となっている。では何故地上に前線が必要になるかということに対して、ベッテルセンは次のように解釈している。



第1図 1954年9月9日03Zにおける850mbの等圧面高度。単位100フィート。

第2図 1954年9月10日03Zにおける500mbの等圧面高度。単位100フィート。

第3図 1954年9月9日03における500mbの等圧面高度(実線)。単位100フィート。図中の点線は等温度線。単位 $0.5 \times 10^{-5} \text{sec}^{-1}$

上層のトラフの移動と共に上層に冷い空気の移流がおこり、上下の温度差をよりはげしくする。それは温度風の卓越となり、それにつれて上層の渦度の増大がおこる。そのことは渦度の移流を更に増大する役目をする。すなわち(1.13)または(1.14)で示された上層での渦度の移流をより強める役割を果している。

(2) 十分に発達したとき

この場合には擾乱の波長も短いので(1.13)または(1.14)の右辺の第二項及び第三項はかなりの量となり、第一項の渦度の移流に対して無視しえなくなる。(1.10)で定性的に論ずれば、左辺の二項の比は普通次のようになる。

$$f \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} \ll \frac{S}{f} \nabla^2 \omega \quad (2.2)$$

従って(1.10)は近似的に

$$\frac{S}{f} \nabla^2 \omega \approx \frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{V} \cdot \nabla \eta) - \frac{g}{f} \nabla^2 (\mathbf{V} \cdot \nabla \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right))$$

ここで $\frac{S}{f} \nabla^2 \omega \ll -\omega$

$$\text{div } \mathbf{V} = -\frac{\partial \omega}{\partial p^2} \sim \frac{\partial^2}{\partial p^2} (\mathbf{V} \cdot \nabla \eta) - \frac{g}{f} \nabla^2 (\mathbf{V} \cdot \nabla \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right)) \quad (2.3)$$

このことを考慮すると、下層の発達(2.3)の右辺の各項を正確に計算しなければならない。

ところで、発達するか否かの定性的議論に関する限り、前述の(2)のことを考慮する必要はない。(2)のことは、発達が定量的にどの位になるかを論ずるのに必要なことである。以上の考えからベッテルセン等は、前線の有無と、その上層での渦度の移流の強弱の二つで、低気圧が発達するか否かの予報の目印にした。またそうすることによってかなりの成果をえている⁵⁾。

§ 3 エストークの方法

前節迄の予報形式は発達を渦度方程式にむすびつける点ではすぐれているが、予報はやはり定性的である。ベッテルセンに示されたエッセンスをどう定量化するかは誰でも望むことだと思う。歴史的には1953年にプリンス

トン・グループで予報の定量化はすでに行われ、発達の問題はソルベルグ・ホイランド流の不安定波によるものではなく、パロクリンの効果(上下の層のかみ合せ)であると実証もされまた結論もされた。しかし何分計算が電子計算機によるために、結果の方が先立っているように思われた。プリンストン・グループによってえられた結果をシノプティックな言葉で表現し直したことにベッテルセンの果たした大きな役割があるのだろう。このような背景をもとにして、エストークはベッテルセンの考えを定量的予報形式にすることを考えた。

エストークは500mbを一応非発散高度と考え、前節でのべた上層での渦度の移流は500mb面におけるものを採用した。すなわち

$$\frac{dn}{dt} = 0 \quad (3.1)$$

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{500} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_{500} = -(\mathbf{V} \cdot \nabla \eta)_{500} \quad (3.2)$$

これと前にのべた(1.13)を併用すれば、定量的議論ができるわけであるが、長い時間間隔にわたっては(1.13)の右辺の各項を計算しにくい。それは h とか ω が保存系でないために、時間と共に変化するからである。これに反して(3.1)で示されているように、 η_{500} は保存系なので時間と共にいくらでも追っている。そこで(1.13)を別の形式でかき、保存系になるような量を探せばよいことになる。エストークは1000mbでの渦度方程式

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_{1000} = -(\mathbf{V} \cdot \nabla \eta)_{1000} + \left(f \frac{\partial \omega}{\partial p} \right)_{1000} \quad (3.3)$$

と(3.2)の差をつくり、次のような保存系を見出した。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}}_{500} \cdot \nabla \right) \left(h - \frac{1}{2} \bar{h} \right) = 0 \quad (3.4)$$

ただし $h = Z_{500} - Z_{1000}$ 、 $-$ の記号は $\Delta S = 1000 \text{km}$ の間隔による平均値を示している。

こうすれば $h - \frac{1}{2} \bar{h}$ が保存系になり、また500mbでの ζ_{500} が保存するので、両者のくみ合せから Z_{1000} の時間変化が求まることになる。(3.4)の詳しい導き方は附録2を参照されたい。

エストークの原文では(3.4)は次のようになってい

る。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_{500} \cdot \nabla\right) \left(h - \frac{1}{2}\bar{h}\right) = 0 \quad (3.5)$$

上式をかき直すと

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(h - \frac{1}{2}\bar{h}\right) = \frac{g}{f} J \left(h - \frac{1}{2}\bar{h}, Z_{500}\right) \quad (3.6)$$

更にヤコビアン^{*}の性質を利用して

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(h - \frac{1}{2}\bar{h}\right) &= \frac{g}{f} J \left(h - \frac{1}{2}\bar{h}, Z_{10}\right) \\ &+ \frac{1}{2} (\bar{Z}_5 - \bar{Z}_{10}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$= \frac{g}{f} J \left(h - \frac{1}{2}\bar{h}, Z_{10} + \frac{1}{2}\bar{h}\right) \quad (3.8)$$

即ち Z_{500} の場で $\left(h - \frac{1}{2}\bar{h}\right)$ を流すことは数学的には

$Z_{10} + \frac{1}{2}\bar{h}$ の場で $\left(h - \frac{1}{2}\bar{h}\right)$ を流すことと同じである。

(3.4) は フォルトフト^{*}によって改良されたものであるが、エストークが原文で与えた (3.5) または (3.8) と本質的には同じことである。両者の差は附録3を参照されたい。近似をどこでとめるかの問題であるから、本文では (3.4) で議論をすすめていく。 \bar{V}_{500} で流すのがよいか、 V_{500} または $V_{1000} + \frac{1}{2}(V_{500} - V_{1000})$ で流す方がよいかは、経験によってきめる以外にはない。何故なら非発散高度が500mbという仮定は、(3.4) 及び (3.5) の両者の近似論からくる差違より、よほど大きい誤差をもっているからである。

エストークの図式方法を順を追ってかくと

- (1) Z_{500} より渦度に比例する量 $\left(\frac{1}{4}\sum Z - Z\right)$ をつくる。

ただし $\frac{1}{4}\sum Z$ は考える点を中心に 1000km の格子間隔によるまわりの点の Z の平均値である*。

- (2) Z_{500} より \bar{Z}_{500} をつくり、 $\left(\frac{1}{4}\sum Z - Z\right)$ を24時間だけ

流してもとの $\left(\frac{1}{4}\sum Z - Z\right)$ との差をとる。この差が $\Delta\zeta$ となっている。ここでコリオリーのパラメーター f の変化を省略したのは、一つは値自身が小さいこと及びわれわれがエストークの方法を充分に適用できるのは偏西風の強い場合すなわち f が一定と見做しうる場合だからである。

- (3) Z_{500} と Z_{1000} よりまたは Z_{500} と Z_{850} から \bar{h} をつくる。 Z_{500} に対し、 Z_{1000} または Z_{850} のいずれをと

* 平均値の図式求め方は、数値予報グループ発行の解説書を参照されたい。

** $\Delta h = \Delta h - \frac{1}{2}\Delta\bar{h} + \frac{1}{2}\Delta\bar{h} - \frac{1}{4}\Delta\bar{h} + \dots$
 $= \Delta\left(h - \frac{1}{2}\bar{h}\right) + \frac{1}{2}\left(\Delta h - \frac{1}{2}\Delta\bar{h}\right) + \dots$

∴ $\Delta h \approx \Delta\left(h - \frac{1}{2}\bar{h}\right)$

ってもよいわけで、地形の影響を除く場合は Z_{850} の方がよい。地上のプログノを相似的にでも一度に求めようと思うときは Z_{1000} の方が得策である。

- (4) h から \bar{h} (この時も平均値をつくる時の格子間隔は 1000km) をつくり、更に $h - \frac{1}{2}\bar{h}$ をつくる。

- (5) $h - \frac{1}{2}\bar{h}$ を \bar{Z}_{500} で24時間流して、もとの $h - \frac{1}{2}\bar{h}$ との差をつくれれば、近似的に Δh が求まる**。

- (6) 前に求めた $\Delta\zeta$ より Relaxation によって ΔZ_{500} を求める。または図式で次式の関係式を用いて ΔZ_{500} を求める。

$$\Delta Z_{500} = -\Delta\zeta - 2\bar{\Delta\zeta}$$

- (7) ΔZ_{500} と Δh との差から ΔZ_{1000} または ΔZ_{850} を求める。

- (8) Z_{1000} または Z_{850} に ΔZ_{1000} または ΔZ_{850} を加えて24時間後のプログノが求まる。

§ 4 日本附近への応用例

具体例として前にあげた北海道旋風をあげておく。図4は、 Z_{500} で図5は Z_{500} と Z_{850} との差から求めた h の分布を示している。 h から $h - \frac{1}{2}\bar{h}$ をつくったのが図

6である。朝鮮附近の冷い空気が \bar{Z}_{500} で流されて、北海道上層附近で強い Δh をおこすことが容易にわかる。図式に計算された Δh が図7に実線で示してある。 Z_{850} のプログノをつくる代りに、ここでは Δh の精度をみるために、24時間後に観測された Δh を図7に点線で示してある。

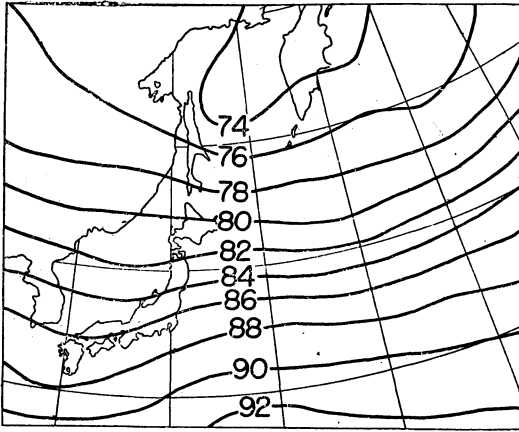
附録3で示されているように、エストークの原文に従えば $V_5 \cdot \nabla \eta_{1000}$ 、 $V_{10} \cdot \nabla \eta_{1000}$ が小さいと省略されている。改良されたフォルトフトの方法では $\Delta S = 1000km$ という制約がある。更に非発散高度を 500mb としている。前にのべた北海道旋風の例は上述の仮定を割合に満足した場合である。一般的には必ずしも非発散高度が 500mb にあり、また1000kmで平均された \bar{Z} で24時間渦度がうまく流されるかどうかかわからない。時には \bar{Z} で流される距離の8割位で流す場合の方がよい場合もあろう。エストークの近似では平均に用いる ΔS は任意性があるが、 $V_5 \cdot \nabla \eta_{1000}$ を無視する近似は発達した低気圧や台風の場合にはゆるぎない。一例として1954年9月の台風12号を例にとってみる。図8は \bar{Z}_{500} であり、図9は流されるべき $h - \frac{1}{2}\bar{h}$ を示してある。図8からわかるよう

に、 $h - \frac{1}{2}\bar{h}$ をどの方向に流してよいのか充分にわからない。とくに台風の場合には非発散高度も多様性をもち擾乱の大きいも小さいので、この方法の適用に注意する必要があると思う。

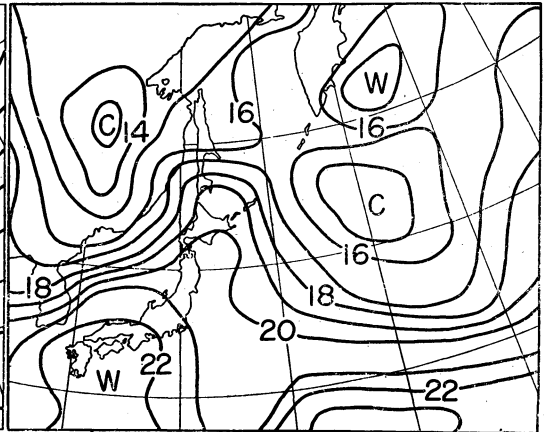
これらの簡便法は利点もあり短所もある。正確にとく

ことは一番よいわけであるが、時間、労力の点でむずかしい点もある。電子計算機によってはじめて低気圧の発達が立証され、それが現在では解釈も充分に行われたり、近似的な図式計算も考えられてエッセンスは多くの人々にわかるような言葉で語られはじめた。この傾向は更に正確な計算をおしすすめることを示していると思

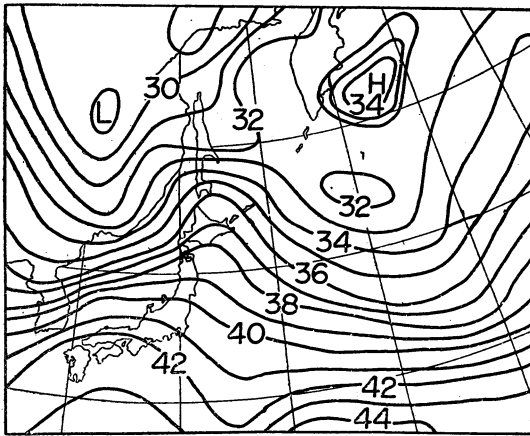
う。なお、日本における低気圧の三次元的な追求は、斎藤、村上、藤原、岸保によって正確な計算のもとに試みられている⁶⁾。また台風の場合は村上、増田、荒川によって行われている⁷⁾。あらい近似をどの程度補足しているかという点で参照して貰えれば幸いである。



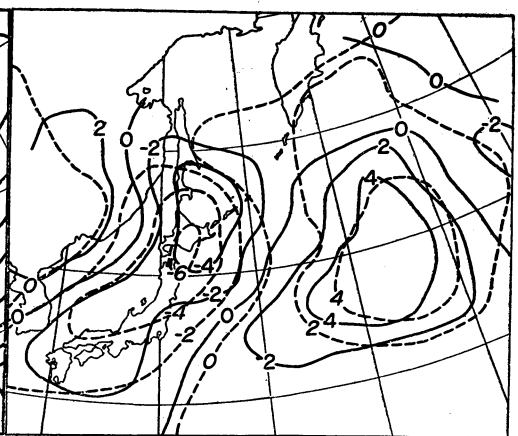
第4図 1954年9月9日03Zにおける Z_{500} . 単位100フィート.



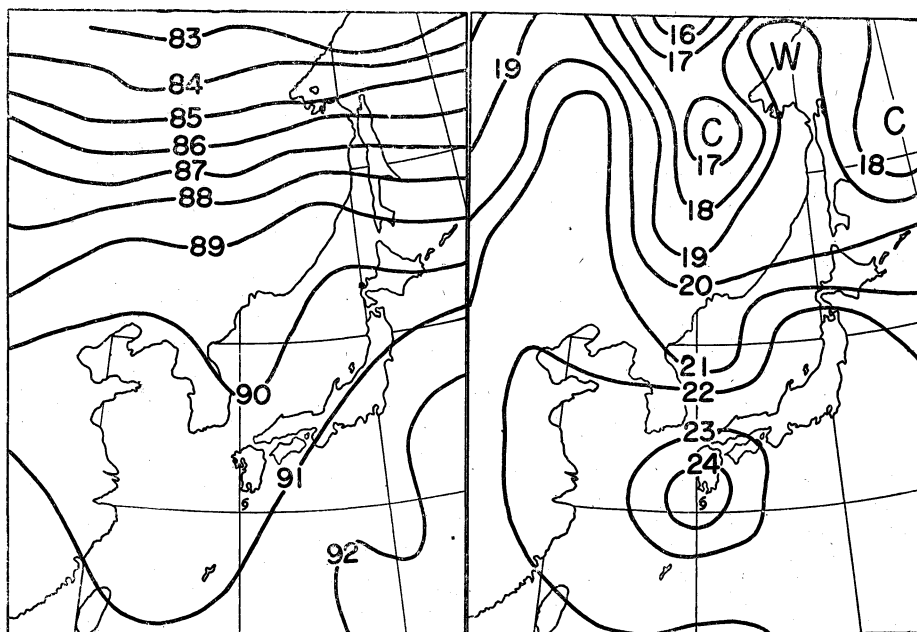
第5図 1954年9月9日03Zにおける h . ただし $h = Z_{500} - Z_{850}$. 単位100フィート.



第6図 $h - \frac{1}{2}\bar{h}$ の図. 単位100フィート.



第7図 $\Delta t = 24$ 時間に対する h の変化量即ち Δh の図(実線). 図中の点線は観測された Δh . 単位100フィート.



第9図 1954年9月13日03Zにおける h 。ただし $h = Z_{500} - Z_{850}$ 。単位 100 フィート。

第8図 1954年9月13日03Zにおける \bar{Z}_{500} 。単位 100 フィート。◎は12号台風の中心の位置。

文 献

- 1) Estoque, M. A., 1956: J. Met. **13**, No. 1.
- 2) Fjortoft, R., 1955: Tellus **7**, No. 3.
- 3) Orihata J., 1956: Journ. Met. Soc. Japan, **34** No. 4.
- 4) Petterssen, S., 1955: J. Met. **12**, No. 1.
- 5) Petterssen, S., Dunn, E. G., and Means, L., 1955: J. Met. **12**, No. 1.
- 6) 齋藤, 村上, 藤原, 岸保, 1956: 研究時報 (印刷予定)
- 7) 村上, 増田, 荒川, 1956: 気象研究所報告会にて発表。

附録1: ω の方程式

渦度方程式:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \eta = (f + \zeta) \frac{\partial \omega}{\partial p} = f \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

または

$$\frac{g}{f} \nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} = \mathbf{V} \cdot \nabla \eta - f \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (1.1)$$

断熱の式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \theta + \mathbf{V} \cdot \nabla \ln \theta + \omega \frac{\partial}{\partial p} \ln \theta = 0$$

$\ln \theta = \ln \alpha + \frac{c_v}{c_p} \ln p + \text{const}$ を代入

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \alpha + \omega \frac{\alpha}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} = 0$$

釣合いの式 $g \frac{\partial z}{\partial p} = -\alpha$ を代入

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\left(-\frac{\alpha}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} \right)} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right] \alpha \\ &= -\frac{g}{S} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

ただし $S = -\frac{\alpha}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}$

S を一定と見做し (1.1) に $\frac{\partial}{\partial p}$, (1.2) に ∇^2 の

操作をすると

$$\begin{aligned} f \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} + \frac{S}{f} \nabla^2 \omega &= -\frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{V} \cdot \nabla \eta) \\ &\quad - \frac{g}{f} \nabla^2 \left(\mathbf{V} \cdot \nabla \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right) \right) \end{aligned}$$

附録2: エストークの式

渦度方程式:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \eta = f \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

ここで

$$\zeta = \frac{g}{f} \nabla^2 Z = \frac{4g}{d^2 f} (\bar{Z} - Z) : Z \text{ は } \bar{Z} \text{ のまわりの平}$$

均值, d はその時の格子間隔を用いると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{Z}-Z)-J(\bar{Z}, Z)=\frac{f d^2}{4g} J(f, Z) + \frac{d^2}{4} \frac{f^2}{g} \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (2.1)$$

ここで

$$Z=Z_{500}+\left(1-\frac{2p}{p_0}\right)h: p_0=1000mb, h: \text{層厚}$$

というパラメーター・モデルの仮定を用いると

$$\frac{\partial Z}{\partial p}=-\gamma h: \gamma=\frac{2}{p_0}$$

(2.1) を p で微分して

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+V \cdot \nabla\right)(h-\bar{h})+(\bar{V}-V) \cdot \nabla h =-\frac{f^2 d^2}{4g} J(f, h)+\frac{d^2 f^2}{4g} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \omega_{pp} \quad (2.2)$$

または

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{V} \cdot \nabla\right)(h-\bar{h})+(\bar{V}-V) \cdot \nabla h =-\frac{f^2 d^2}{4g} J(f, h)+\frac{d^2 f^2}{4g} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \omega_{pp} \quad (2.3)$$

ω について, 更に p について二次函数であるというパラメーター・モデルの仮定を用いる.

$$\omega=4\omega_5\left(\frac{p}{p_0}\right)\left(1-\frac{p}{p_0}\right)$$

ただし ω_5 は 500mb の ω で (1.2) より次式で与えられる.

$$\omega_5=\frac{g}{S} \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}+V \cdot \nabla\right) h$$

したがって

$$\omega_{pp}=-\frac{2x\gamma}{\Delta p^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+V \cdot \nabla\right) h \quad (\Delta p=500mb, x \equiv \frac{g}{S}) \quad (2.5)$$

(2.5) を (2.3) に代入して

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{V} \cdot \nabla\right)\left[(1+\alpha^2)h-\bar{h}\right]+(\bar{V}-V) \cdot \nabla(h-\alpha^2 \bar{h})=-\frac{f^2 d^2}{4g} J(f, h)$$

ただし

$$\alpha^2=\frac{2f^2 x}{g \Delta p^2}-\frac{d^2}{4}$$

$\alpha^2=1$ とすれば

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{V} \cdot \nabla\right)\left(h-\frac{1}{2}\bar{h}\right)=-\frac{1}{2}(\bar{V}-V) \cdot \nabla(\bar{h}-h) +\frac{f^2 d^2}{4g} J(f, h) \approx 0$$

$\alpha^2=1$ より d が必然的にきまる. $\Delta p=500mb,$

$f=10^{-4}, x=5.2 \times 10^2 \times \frac{mb^2}{m}$ とすれば

$$d \approx 1000km$$

附録3 エストークの方法とフョルトフトの方法

エストークの方法は附録2の(2.2)より出発する. フョルトフトの方法では附録2の(2.5)で示されてあるように ω_{pp} は高度に無関係に一定である. しかしこれは一つの仮定である. フョルトフトは(2.3)が500mbで成立つとしている. これに対し, エストークは(2.3)と等式である(2.2)が500mbと1000mbの間で平均的に成立っているとしている. 彼の与えた ω の分布は \sin 型であり, ω_{pp} は p の函数になっている. そこで(2.2)を500mbから1000mbまで p について積分すると,

$$\int_{500}^{1000} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t}+V \cdot \nabla\right)(h-\bar{h})+(\bar{V}-V) \cdot \nabla h \right\} dp =-\frac{f^2 d^2}{4g} J(f, h) \Delta p+\frac{f^2 d^2}{4g} \frac{1}{\gamma}(\omega_p)_{1000}$$

ただし $\Delta p=500mb$

ここで

$$(\omega_p)_{1000}=-2\omega_5\left(\frac{2}{p_0}\right) \text{ 及び } Z=Z_{500}+\left(1-\frac{2p}{p_0}\right)h$$

(h : 常数) を代入して積分を行えば

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+V_5 \cdot \nabla\right)\left[(1+\alpha^2)h-\bar{h}\right]+(\bar{V}-V_5) \cdot \nabla h -\bar{V}_T \cdot \nabla h=-\frac{f^2 d^2}{4g} T(f, h)$$

ただし

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{2f^2 x}{g \Delta p^2} \cdot \frac{d^2}{4} \\ V &= V_{500} + \left(1 - \frac{2p}{p_0}\right) V_T \end{aligned} \right.$$

更に

$$(\bar{V}_5 - V_5) \cdot \nabla h - \bar{V}_T \cdot \nabla h = (V_{1000} - V_5) \cdot \nabla h = V_{1000} \cdot \nabla(Z_{1000} - Z_{1000}) - V_{500} \cdot \nabla(Z_{1000} - Z_{1000})$$

を用いて

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+V_5 \cdot \nabla\right)\left[(1+\alpha^2)h-\bar{h}\right]=V_{500} \cdot \nabla(\bar{Z}_{1000}-Z_{1000}) -V_{1000} \cdot \nabla(\bar{Z}_{1000}-Z_{1000}) -\frac{f^2 d^2}{4g} T(f, h)$$

上式の右辺の第一項及び第二項は夫々 $V_5 \cdot \nabla \zeta_{10}$ 及び $V_{10} \cdot \nabla \zeta_{10}$ に比例する量である. エストークはこれらの量を小さいとして次式をえている.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+V_5 \cdot \nabla\right)\left(h-\frac{1}{(1+\alpha^2)}\bar{h}\right) \approx 0$$

すなわち α^2 は任意にえらべることになる. これらの例からわかるように ω の分布の '仮定' の仕方によって, たがいに異った方程式をえているが, 本質的にどちらが正しいという問題ではない. エストークが経験的に $d \approx 1000km$ と採用したことは, フョルトフトの仮定の方がより近似的なものを示しているように思う.