



天 気

1984年7月
Vol. 31, No. 7

2次元乱流と地球流体*

柳 瀬 眞一郎**

1. まえがき

ひまわりから見える地球大気の運動は変化に富んで美しく、いくら見てもあきることがない。もっとも目に見えるのは雲の動きであって、もしこの自然の与えてくれたすてきな可視化技術がなければこんな楽しみを味わうことはできないだろう。ひまわりの画像を見れば地球大気がいかに多くの渦や流れから成り立っているかということがわかる。それらはある程度規則的な動きをしているがその中には多くの不規則な運動を含んでいることが読み取れる。大気運動中の乱雑さの一つの重要な側面を抽出するとそれが2次元乱流で表される。近年、測定精度の向上により海洋も2次元的な中規模渦で満たされていることがわかった(高野, 1977)。従って海洋の運動においても2次元乱流は重要な因子となると考えられる。

乱流の定義は元々いくらかあいまいであったが、カオスの研究が進むにつれてますます多様な内容を含むものになってきた***。ここではいちおう‘非定常で空間的に幅広い連続スペクトルを含む流体運動’は広い意味で乱流とみなされると考えておく。2次元乱流は2次元運動をする流体中に現れる乱流である。流体運動は本質的に3次元的であり大気や海洋の乱流もやはり3次元乱流である。けれどもこれらの地球流体は大きなスケールでは著しく異方的で、水平スケールと比べると垂直スケールは極端に小さく、大規模な運動はほとんど水平方向で占

められている。従ってこれらの運動は近似的に2次元的な描像でとらえられると考えられる(小倉, 1978)。また、回転系での流体運動が著しく2次元的になることはよく知られている(Hopfinger *et al.*, 1982)。これらの事が2次元乱流の描像の適用の可能性を生み出したわけである。

それでは2次元乱流の理論を使っていったいどんな現象が説明されているのであろうか。まず第1に古くからよく調べられているのは乱流拡散の問題である。これは気象学や海洋学で特に大切であり乱流研究の大きな動機であった。2次元での乱流拡散の理論は現在も活発に研究されている。次に、気象における高気圧・低気圧や海洋中の中規模渦などの傾圧不安定によって生じる渦が注目される。これらの渦の運動量やエネルギー輸送に果たす役割の研究に対する適用が近年盛んになった。最後に、大スケールの問題として、おそらく渦とロスビー波の相互作用によって生じるジェット気流や黒潮、さらに木星大気の縞模様等に対する適用であって、適用限界の問題はあるもののわれわれに大きなロマンを与えてくれる。

2次元乱流研究に対する刺激は当然地球流体からのものが最も強かったのは確かだが、それ以外にもいづらかの興味から進んできた。一つは純粋に統計流体力学的な興味で、3次元乱流との質的な相異を中心に調べられてきた。もう一つは強磁場中のプラズマの運動で、ある場合には地球流体と同様な方程式で記述される(長谷川, 1980)。次章では2次元乱流の研究が流体力学と応用分野との交流の下にどの様に発達してきたかを概観してみ

* Two-dimensional turbulence in geophysical fluids.

** Shin-ichiro Yanase, 岡山大学工学部.

*** 特集乱流, 数理科学 1982-11.

る。

2. 2次元乱流研究の足どり

流体力学の分野で非常に有名な Lamb の名著 Hydrodynamics の最後の版が出版されたのは1932年で古典流体力学はこの頃完成されていた。一方、G.I. Taylor は既に1910年代から拡散の問題を中心として乱流の研究を行っているし、また Richardson は大気中の粒子拡散のデータを基にして Kolmogorov の理論と本質的に等しい内容を持つ相対粒子拡散の理論を既に1926年に発表している (Richardson, 1926)。けれども乱流の研究が盛んになったのは1930年代以降で、Taylor, von Kármán, Prandtl, Obukhov, Kolmogorov, Heisenberg ら流体力学, 気象学, 理論物理学, 数学の研究者により急速に進歩した。乱流の統計理論の最初の集大成と言える 'Homogeneous Turbulence' が Batchelor によって著されたのは1953年で、その中には一様な3次元乱流に対して確立された理論が体系的に述べられている (不幸なことにこれ以後現在に至るまで、誰もが納得する普遍的な理論は現れていない)。乱流の研究はその解析的な困難さのために初期の時点から2方向に分裂した。一つはさまざまなモデル方程式を組み立てて実験結果を再現しようとするもので半現象論的、半数値実験的理論である。もう一つは非常に理想化された (たとえば一様等方的な) 乱流を考えてできるだけ厳密な取り扱いをしようとするものである。数多くの研究者の努力にもかかわらずこの2つの流れはなかなか再結合できない。

2次元乱流の3次元乱流とは異なった特有の性質に対する関心は、1940年代に既に Onsager によって渦糸の統計理論が考えられていた (Onsager, 1949) が、本格的になったのは50年代に入ってからである。注目すべきことは、日本においても大気現象への2次元乱流理論の適用が Ogura (1952) によって50年代初期に行われたことである。2次元乱流の特異な性質、特にエネルギーの逆カスケードの存在を最初に指摘したのは Fjørtoft (1953) であるが、Batchelor (1953) も同じ頃に同様な内容を述べている。

50年代半ば以後3次元乱流に対してさまざまな統計理論が与えられ、それらが徐々に2次元乱流へ適用されるようになる。初期の統計理論の扱う乱流は最も簡単な一様等方乱流に限定され、2次元乱流の理論は当面純理論

的な方向に発達することになる。50年代中頃に Proudman・Reid (1954) と Tatsumi (1957) によって準正規分布理論 (QN 理論) が与えられた。しかし、後に Ogura (1962) によって2次元乱流へ適用され、負エネルギースペクトルという非物理的な結果を与えることが示された。

これに対して Kraichnan (1959) は Green 関数を含む Direct-Interaction 理論 (DIA 理論) を提出した。彼は後に DIA の欠点を自ら指摘し、ラグランジュ形式を取り入れた Lagrangian-History-Direct-Interaction 理論 (LHDIA 理論) を考案した (Kraichnan, 1965) が、これらの理論の2次元乱流に対する具体的な数値計算は70年代まで待たなければならない。

60年代の後半に入って2次元乱流固有の性質に注目した研究が相ついで現れる様になった。Kraichnan (1967), Leith (1968), Batchelor (1969) らで、彼らによって k^{-3} エネルギースペクトルの存在が予言され以後の理論発展の基礎となった。ところで同じ60年代に Lorenz (1963) は流体方程式の解がある近似の下で、初期条件からは予測不可能な、Caotic な行動を示すことを調べ数値予報の可能性に対して深刻な疑問を投げかけた。彼の研究は一方では統計力学的なカオスの研究へ発展した* が、気象学では数値予報可能な限界時間の問題と関係し、この研究に2次元乱流理論が使われる様になる。

70年代に入ると電子計算機の進歩により2次元乱流理論は3次元乱流とは異なった独自の進歩をする様になる。それはナビエ・ストークス方程式 (NS 方程式) の直接積分が可能になったことで、近似理論を直接比較することができる様になった。この時点で2次元乱流理論は始めて (ある意味で) 実証科学の地位を得たわけである。70年代の前半は既に述べた理論に加え、Markovianized Eddy-damped Quasi-Normal 理論 (EDQNM 理論) (Leith, 1971), Test Field Model (Kraichnan, 1971; Leith・Kraichnan, 1972) 等の数値積分が予知可能性の研究としても行われ、また数値実験との比較が行われた (Herring *et al.*, 1974)。

70年代後半に入ると多様な動きが起こってくる。その中から主要なものを挙げてみる。一つは Subgrid-modelling または Eddy-viscosity の問題で数値実験における parameterization に関係する (Kraichnan, 1976; Basdevant *et al.*, 1978)。これは Large eddy simulation と関連している。次に挙げなければならないのは Intermittency の問題である。これは乱流場の空間的な間欠性を調べる

* 特集カオスとエントロピー, 数理科学 1980-9.

もので、3次元乱流に対しては古くから考慮されて来た (Monin・Yaglom, 1975) が、2次元を含む乱流一般に対して注目される様になった (Frisch *et al.*, 1978). 最後に、この頃になると2次元乱流理論の適用範囲の拡張が行われる様になり、ロスビー波を含む乱流や成層流体に対しても研究が進む様になった。これらの結果が Rhines (1979) によってまとめられている。なお70年代までの乱流理論 (2次元とは限らない) をよくまとめた論文として Rose・Sulem (1978) が参考になる。それから2次元乱流だけをまとめた Kraichnan・Montgomery (1980), またパーガス乱流を含む Tatsumi (1980) のレビューがある。

80年代の状況は一言ではまとめられないので目についた傾向を後でいくらか紹介することにする。本章では2次元乱流について現在わかっている事柄の概略を紹介する。

3. 2次元の乱流

2次元の流体運動は2次元 NS 方程式で支配されるが、非圧縮性を仮定すれば渦度 ω と流れ関数 ψ に対する次の様な方程式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\omega, \psi)}{\partial(x, y)} &= \nu \Delta \omega \\ \omega &= -\Delta \psi \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで ν は動粘性係数である。現実の地球流体では渦粘性が大きく粘性項は必ずしも(1)の様にならないし、浮力や成層の効果もあるので(1)では到底完全な記述はできない。しかし地球流体の運動の基本的な特性はかなりの部分2次元 NS 方程式に含まれていて、基礎研究として(1)を調べることは重要である。

2次元乱流は(1)式の解によって表現されると考えられている。乱流の発生については Landau-Hopf の描像以来、現在のカオスの研究に至るまで多くの研究がなされている*。しかし本稿では簡単のため(1)の解は粘性 ν が非常に小さい時 (レイノルズ数が非常に大きい時) には、乱流的になると考える (この事の証明は現在でも完全には与えられていない)。乱流的な性質としては第1章で述べた '非定常で大きな自由度' に加えて '初期条件敏感性と予知不可能性' を指摘しておく。初期条件敏感性とは初期条件のわずかな違いが、時間がたつにつれ解の大きな違いとなって現れる現象で、これが予知不可能性の原因となる。逆に、系の性質を知るためには初期

条件に敏感でない、たとえば統計的な性質を知ることが必要となる。つけ加えておくと、2次元乱流は幾何的制約が強いため3次元乱流ほどダイナミックなふるまいは示さない事が想像できる。

2次元乱流でしばしば現れる統計量は次の様に定義される。

$$E = \frac{1}{2} \iint (\nabla \psi)^2 dx dy : \text{エネルギー}$$

$$Q = \frac{1}{2} \iint \omega^2 dx dy : \text{エンストロフィー}$$

$$P = -\frac{1}{2} \iint (\nabla \omega)^2 dx dy : \text{パリンストロフィー}$$

積分は全空間にわたって行いが、一様な乱流場に対しては単位面積に対して行うことにする。エンストロフィーは平均自乗渦度を表し、パリンストロフィーは渦度の勾配の大きさを表す。(1)に ψ および $\Delta \psi$ をかけて全空間にわたる積分を行うと次の様な方程式が得られる。

$$\frac{dE}{dt} = -2\nu Q \quad (2)$$

$$\frac{dQ}{dt} = -2\nu P \quad (3)$$

(2), (3)で $\nu = 0$ と置くとエネルギー、エンストロフィーは時間的に変化しない。つまり2次元乱流ではエネルギーとエンストロフィーは非粘性の場合に保存量となる。また、 $\nu > 0$ の時、(3)より $Q(t) \leq Q(0)$ でエンストロフィーは有界である。従って $\nu \rightarrow 0$ の極限で(2)式は

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

となりエネルギーは散逸されない。一方3次元乱流ではエンストロフィーは保存量ではなく、 $\nu \rightarrow 0$ の極限で $Q(t) \sim 0(\nu^{-1})$ となり発散することが予想されている (Tatsumi, 1980)。従って3次元乱流では非粘性極限でエネルギーの散逸がおこる。これを非粘性散逸と呼び、 $\nu = 0$ の解と $\nu \rightarrow 0$ の解が非常に異なる点が乱流で特徴的である。これが起こるのは粘性がいくら小さくても、粘性が支配的となる高波数領域へエネルギーを能率的に運ぶ機構が存在するからであると考えられる。2次元乱流でそれに対応する現象は、 $\nu \rightarrow 0$ の極限でのエンストロフィーの散逸であるが、これについては後で触れることにする。

乱流の構造を考えるには波数空間での様子を調べると便利がよい。簡単のため、乱流場は空間的に一様である

* 特集乱流, 数理科学 1982-11.

と考えて次の様に渦度スペクトル関数を定義する。

$$\Omega(\mathbf{k}, t) = \frac{\langle \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) \hat{\omega}(\mathbf{k}', t) \rangle}{\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')} \quad (4)$$

ここで $\hat{\omega}(\mathbf{k}, t)$ は渦度 $\omega(\mathbf{x}, t)$ のフーリエ変換で $\langle \rangle$ はアンサンブル平均を意味する。 $\delta(\mathbf{k})$ はディラックのデルタ関数であるが、 Ω は普通の関数となる。 さらに乱流場が等方的と仮定できる時はエネルギースペクトル関数が便利で次の様に定義される。

$$\left. \begin{aligned} E(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \Omega(\mathbf{k}, t) d\theta \\ \mathbf{k} &= (k \cos \theta, k \sin \theta) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

一様等方な2次元乱流に対して Batchelor (1969) は非常にわかり易い描像を与えた。これは後に近似理論によっても同じ結果が与えられている (Tatsumi・Yanase, 1981)。彼のアイデアは非粘性エネルギー保存則と、Kolmogorov 相似則 (Batchelor, 1953) の2次元アナロジーに基づくもので要約すると次の様になる。エネルギースペクトル $E(k, t)$ は低波数と高波数で異なった相似則を持つ。

(I) 低波数 $k \ll O(1)$

$$E(k, t) = E^{3/2} t g(E^{1/2} k t) \quad (6)$$

ここで g は無次元関数、 E はエネルギーで時間によらず一定。

(II) 高波数 $k \gg O(\nu^{-1/2} \eta^{1/6})$

$$E(k, t) = \nu^{1/2} \eta^{1/2} k^{-2} f(k \nu^{1/2} \eta^{-1/6}) \quad (7)$$

η はエンストロフィー散逸率 ($\eta = -d\theta/dt$) で ν に依存しないとす。 f は無次元関数である。 $\nu^{1/2} \eta^{-1/6}$ は2次元 Kolmogorov 長さ、(7)式は2次元 Kolmogorov 相似則と呼ばれる。(7)式で与えられるエネルギースペクトルが低波数で粘性によらなくなり、(6)式で与えられる相似則へつながると仮定すると、 g, f は漸近的に

$$\begin{aligned} g(s) &\propto s^{-3} \quad s \rightarrow \infty \\ f(s) &\propto s^{-1} \quad s \rightarrow 0 \end{aligned}$$

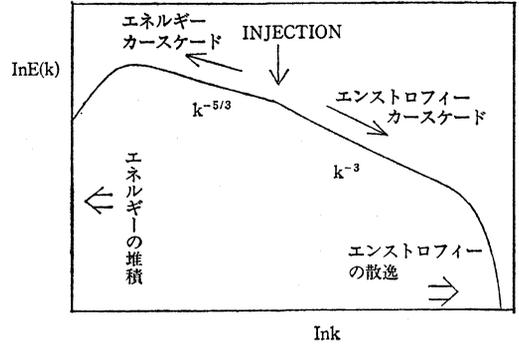
となる。この時、 A を定数として

$$\eta = 2At^{-3} \quad (8)$$

となり、(I)、(II) 領域はべき法則

$$E(k, t) = C\eta^{2/3} k^{-3} = C(2A)^{2/3} t^{-2} k^{-3} \quad (9)$$

で結ばれる。この領域をエンストロフィー慣性小領域と呼び、領域(III)とする。ここで C は2次元 Kolmogorov



第1図 2つのカスケード。

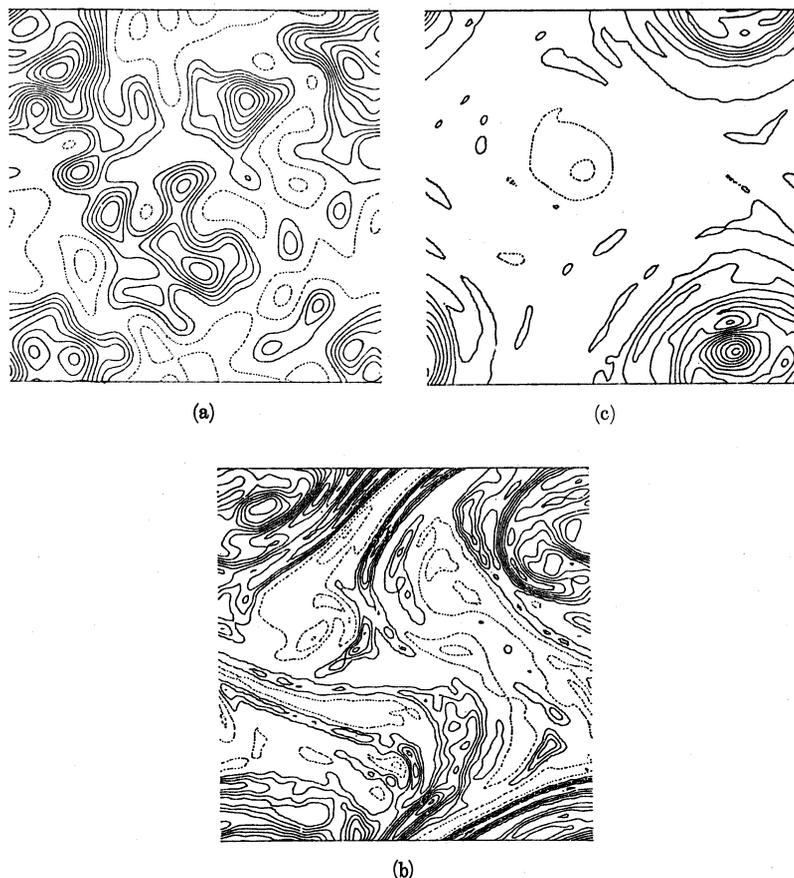
定数と呼ばれる。この結果によればエネルギーは $k \sim O(t^{-1})$ の領域に含まれ、時間がたつにつれ波数ゼロの近傍に集中して行く逆カスケードの発生が示されている。またエンストロフィーは単位時間当たり η の速さで高波数領域へ運ばれ散逸される。従って、 η はエンストロフィーカスケードの割合とも呼ばれる。

これに対して Kraichnan (1967) は波数空間での非線形相互作用のダイナミックスを調べ、波数空間における自己相似的な輸送を仮定して次の様な描像を示した(第1図参照)。 $k = k_i$ でエネルギー(エンストロフィー)を注入すると、エネルギーは低波数方向へ $k^{-5/3}$ 領域に沿って流れ、エンストロフィーは高波数領域へ k^{-3} 法則に従って流れる。エネルギースペクトルは $k \ll k_i$ では

$$E(k, t) = C' \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (10)$$

となる。これはエネルギー慣性小領域と呼ばれ、 ϵ はエネルギー増加率またはエネルギーカスケードの割合で、 C' はこの場合の Kolmogorov 定数である。この領域ではエンストロフィーの輸送が全く起こらないことが示される。一方、 $k \gg k_i$ では(9)式で与えられ、エネルギーの輸送はない。彼は k^{-3} スペクトルに関連して、この領域では波数空間での非局所相互作用、つまり遠くへたった波数成分間の相互作用が強い対数関数の補正が必要であると考え、後に TFM を使って具体的な形を与えている (Kraichnan, 1971)。この予想は、近似理論による計算において非局所相互作用が大きく現れている事実 (Pouquet et al., 1975) などから考えて、たぶん正しいと考えられるが対数補正そのものはまだ確認されていない。

以上の2つの理論とは全く見方の異なる理論が Saffman (1971) によって与えられた。彼は渦度場がちょうどバーガース乱流における速度場の様に 'つ立ち' を



第2図 (Fornberg, 1977).

(a) 0 (b) 360 (c) 3060

起こすと考え,

$$E(k,t) \propto k^{-4} \quad (11)$$

を得た. この時エンストロフィー散逸率は

$$\eta \propto \nu^{2/3}$$

となり $\nu \rightarrow 0$ で有限にとどまらない. これはある種の間欠的な描像であって今後も検討すべき内容を含んでいる.

以上の3つが現在までに2次元乱流に対して与えられた主な見方であり, 各種の近似理論もこれ以外の大きな特性は与えていないし数値実験や観測結果も特に否定的な結果は与えていない. Batchelor と Kraichnan の理論はどちらもエンストロフィーの非粘性散逸を仮定しているのに対し, Saffman の理論では非粘性散逸は起こらな

い. CLOSURE を使った近似理論 (次章で説明する) は, k^{-3} スペクトルを与えているし, エンストロフィーの非粘性散逸の可能性も示されている (Pouquet *et al.*, 1975; Tatsumi・Yanase, 1981). しかし, 数値実験の結果は k^{-4} スペクトルを与えむしろ Saffman の描像を支持している様に思われる (Fornberg, 1977). けれども数値実験が確定的な結果を与えるまでには, まだ少し時間がかかる様である. なおエンストロフィー慣性小領域でのべきの指数に関して, Sulem と Frisch (1975) が興味深い議論を行っている.

次に2次元乱流に対する数値実験の結果を紹介しよう. 数値実験が盛んになったのはもちろん計算機の発達の結果であるが, 計算スキームの改良も大きな力となった. 初期に Lilly (1971) によって行われた計算は Ara-

kawa (1966) の方法を用いた差分法であったが, Orszag (1971) が合成積の効率的な計算法を発表してからはフーリエ空間で計算するスペクトル法が主流になった。これらの方法に対する精度の検討が Herring ら (1974) によってなされている。ここでは少し古くなったが Fornberg (1977) によって行われた結果を引用する。彼は(1)式で $\nu=0$ と置いた式をスペクトル法で解き, ある一定波数以上の成分は切り捨てることによって非常に粘性の小さい流れに対応する計算を行った。これ以後, (1)式を非常に小さな ν を与えて解いた計算も行われているが, 定性的には変わらない様である。第2図の(a), (b), (c)は, ある初期条件から出発して, それぞれ時間ステップ数で0, 360, 3060の時の渦度場の様子である。中間の360 stepにおいて特徴的な事は, 渦度勾配の大きな領域が細長い形で発達していることである。これはエンストロフイーのコースケードに対応していると思われるが, 空間的に間欠的な構造が見出されるとも考えられる。一方終期 3060 step では渦度場はいくつかの大きなかたまりに分かれてしまう。これは低波数へのエネルギーコースケードによって系の持つ最小波数へエネルギーが堆積された状態をあらわしていると考えられる。なお最近のスーパーコンピュータの普及によって近いうちにある程度確定的な結果が得られると期待されている。

一方, 大気乱流の観測結果は k^{-3} べき領域の存在を支持するデータが多い (Wiin-Nielsen, 1967; Debois, 1975)。この領域は水平スケールで 1000 km 以上で幅広く存在している。実際の大気乱流の2次元乱流的構造の解析が今後の課題であろう。おな $k^{-5/3}$ 領域についての観測結果も与えられている (Gage, 1979)。

次に乱流拡散問題について触れてみる。元々乱流理論は拡散現象の解明がその大きな動機の一つであり, 拡散問題, あるいは一般的に 'passive scalar' の問題は常に研究者によって取り扱われてきた。ここでは2粒子の相対拡散について少し紹介する。先に述べた様に2次元等方性乱流には2つの慣性小領域が存在するが, 相対拡散に対する効果もこれに対応して2つの領域を持っている。粒子間の距離を $r(t)$ とするとエネルギー逆コースケード領域では3次元乱流と同様に (Obukhov, 1941)

$$\langle r(t)^2 \rangle \sim \epsilon t^3 \quad (12)$$

となると考えられる。ところがエンストロフイーコースケード領域では非局所的相互作用, 特に大きな渦によるシア効果が強

$$\ln \langle [r(t)/r(0)]^2 \rangle \sim \eta^{1/3} t \quad (13)$$

となる。Lin (1972) により予想された。この理論は観測と比較されている (Morel・Larcheveque, 1974)。

最後に Intermittency (間欠性) について触れておく。3次元乱流ではレイノルズ数が非常に大きくなると流れ場は空間的にまだらな構造を持つ様になり, 速度勾配が非常に大きな値を取る特異領域がそれ以外のむしろ非回転的で層流に近い流れの中に局在する様になると考えられている。これをフラクタル次元との関連から説明しようとする研究が近年行われている (Frisch *et al.*, 1978)。2次元乱流での Intermittency の効果は観測結果の不足のため不明な点が多いが, 理論的研究は盛んに行われていて, エネルギー慣性小領域, エンストロフイー慣性小領域に対する影響がそれぞれ調べられている (Kraichnan, 1975; Monin・Yaglon, 1975; 数理科学 1982-11 中の木田の記事)。しかし, 2次元乱流が本当に Intermittent になっているのかという点や, Saffman (1971) のモデルとの対応など残された課題は多い。

4. 統計理論 (CLOSURE を中心にして)

乱流を支配する方程式は非線形であるから統計的な取り扱いをするために, 種々の統計量を決定するための閉じた関係式を得るのは非常に困難である。もちろん前章で紹介した様に, 保存量や自己相似性の仮定に基づいて有益な結果が得られているが一步進で定量的な研究を行うためには, どうしても上述の問題を避けて通るわけにはいかない。ここではいわゆる CLOSURE と呼ばれる理論の中から代表的なものを紹介する。

(1)式をフーリエ変換すると次の様になる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\omega}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} + \nu k^2 \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) \\ = \iint \frac{k'_x k_y - k'_y k_x}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \hat{\omega}(\mathbf{k}', t) \hat{\omega}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t) d\mathbf{k}' \end{aligned} \quad (14)$$

(14)式に $\hat{\omega}(\mathbf{k}', t')$ をかけて統計平均を取ると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2 \right) \Omega(\mathbf{k}, t, t') \\ = \iint \frac{k'_x k_y - k'_y k_x}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} P(\mathbf{k}', \mathbf{k} - \mathbf{k}', t, t') d\mathbf{k}' \end{aligned} \quad (15)$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{k}, t, t') &= \langle \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) \hat{\omega}(\mathbf{k}', t') \rangle / \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \\ P(\mathbf{k}, \mathbf{k}', t, t') &= \frac{\langle \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) \hat{\omega}(\mathbf{k}', t') \hat{\omega}(\mathbf{k}'', t'') \rangle}{\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'')} \end{aligned}$$

で, 乱流場は一様と仮定した。また $\Omega(\mathbf{k}, t) = \Omega(\mathbf{k}, t, t)$ で, (15)式で $t' \rightarrow t$ とし, $\partial/\partial t$ を $(1/2)\partial/\partial t$ で置き換える

と $\Omega(\mathbf{k}, t)$ に対する式が得られる。(14式)に $\omega(\mathbf{k}', t')\omega(\mathbf{k}'', t'')$ をかけて同様のことを行くと、 P に対する方程式が得られるが右辺には $\hat{\omega}$ の4次相関が入っていて閉じない。一般に n 次相関の式には $(n+1)$ 次相関が含まれいくらか続けても閉じた式が得られない。これは非線形方程式の確率的取り扱いには必ず現れる困難である。乱流の場合に特に深刻な点は摂動的取り扱いを可能にする微小パラメータが存在しない事で、そのためたとえ‘繰り込み’的な手法を用いたとしても正当化に困難が付きまとう。それでも何とか近似を行って統計量に対する閉じた方程式を作って解く方法は CLOSURE と呼ばれ現在も理論的方法の中心となっている。

最も簡単で物理的に無理のない仮定は、準正規分布の仮定すなわち4次キュムラントをゼロと置くことである。これを $\hat{\omega}$ の相関を使って具体的に書くと次のようになる。

$$\begin{aligned} & \langle \omega(\mathbf{k}, t)\omega(\mathbf{k}', t')\omega(\mathbf{k}'', t'')\omega(\mathbf{k}''', t''') \rangle \\ & = \langle \omega(\mathbf{k}, t)\omega(\mathbf{k}', t') \rangle \langle \omega(\mathbf{k}'', t'')\omega(\mathbf{k}''', t''') \rangle \\ & + \langle \omega(\mathbf{k}, t)\omega(\mathbf{k}'', t'') \rangle \langle \omega(\mathbf{k}', t')\omega(\mathbf{k}''', t''') \rangle \\ & + \langle \omega(\mathbf{k}, t)\omega(\mathbf{k}''', t''') \rangle \langle \omega(\mathbf{k}', t')\omega(\mathbf{k}'', t'') \rangle \end{aligned} \quad (15)$$

この仮定の下で $\Omega(\mathbf{k}, t)$ に対する閉じた方程式が次の様に得られる (QN 理論)。

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2 \right\} \Omega(\mathbf{k}, t) = T(\mathbf{k}, t) \quad (17) \\ & T(\mathbf{k}, t) = \iint d\mathbf{p} \int_0^t ds e^{-\nu(k^2+p^2+q^2)(t-s)} \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{k} \\ & \times [a_{kpq} \Omega(\mathbf{p}, t)\Omega(\mathbf{q}, t) - 2b_{kpq} \Omega(\mathbf{q}, t)\Omega(\mathbf{k}, t)] \end{aligned} \quad (18)$$

ただし

$$\begin{aligned} a_{kpq} & = |\mathbf{p} \times \mathbf{q}|^2 \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2} \right)^2 \\ b_{kpq} & = |\mathbf{p} \times \mathbf{q}|^2 \left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{p^2} \right) \left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{k^2} \right) \end{aligned}$$

残念ながら第1章で述べた様に(17)の解は負エネルギースペクトルという結果 (Ogura, 1962) を生じ、QN 理論は乱流では不適当となったわけであるが後に現れた多くの理論は陰に陽に準正規分布の仮定を含んでいる。同様の困難は QN を3次元乱流に対して適用した時にも現れる (Ogura, 1963)。Orszag (1970) はこの原因を、QN がそれ自身可逆的な形式を取っていて非可逆的な要素を含まないからであると考えた。そして(18)式の右辺の粘性項を、渦の統計的效果を取り入れた Eddy-damping 項で置き換えることを提案した。

しかし負エネルギースペクトルの困難を避ける最も簡単な方法は(18)式の右辺を次の様に変更することである。

$$\begin{aligned} T(\mathbf{k}, t) & = \iint d\mathbf{p} \theta_{kpq}(t) \\ & \quad \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{k} \\ & \quad \times [a_{kpq} \Omega(\mathbf{p}, t)\Omega(\mathbf{q}, t) - 2b_{kpq} \Omega(\mathbf{q}, t)\Omega(\mathbf{k}, t)] \quad (19) \\ \theta_{kpq}(t) & = \frac{1 - \exp\{-\nu(k^2+p^2+q^2)t\}}{\nu(k^2+p^2+q^2)} \quad (20) \end{aligned}$$

これはある種のマルコフ化を行ったと考えられるので Markovianized QN (MQN) (Orszag, 1977) あるいは修正キュムラント展開 (Tatsumi, 1980) と呼ばれている。MQNは非常に簡単な理論であるが、2次元乱流の性質をよく表すことが示されている (Tatsumi・Yanase, 1981)。

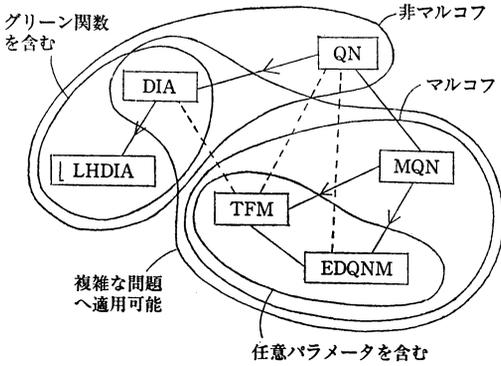
一方、Eddy-damping 項を取り入れた理論と考えられるものに EDQNM と TFM がある。どちらもマルコフ的な理論であり、 $\theta_{kpq}(t)$ は(20)式とは異なるが(17)、(19)式は同じ形で用いる。従ってこれらの理論は、MQNを任意パラメータを含む Eddy-damping 項を加えた形へ拡張したものであるとも言える。最近精力的に研究を行っているフランスグループの使う EDQNM では $\theta_{kpq}(t)$ を次の様に与える (Pouquet *et al.*, 1975)。

$$\left. \begin{aligned} \theta_{kpq}(t) & = (1 - \exp(-\mu_{kpq} t)) / \mu_{kpq} \\ \mu_{kpq} & = \nu(k^2+p^2+q^2) + g^2(\mu_k + \mu_p + \mu_q) \\ \mu_k & = g^2 \left(\int_0^k p \Omega(p, t) dp \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ここで g は任意パラメータで乱流は等方と仮定した。一方 TFM では $\theta_{kpq}(t)$ は ‘Test field’ によって支配されるもう一つの方程式によって決定される (Kraichnan, 1971)。

以上の MQN, EDQNM, TFM はマルコフ的な理論で過去の記憶の影響は除いてあるが、記憶を積極的に取り入れた理論が Kraichnan によって提案されている。オイラー的表現で行うのが DIA で、ラグランジュ的表現を取り入れたのが LHDIA である。DIA はダイアグラム展開を使った繰り込み理論によってある程度の近似の根拠を与えられている点で有名である (Martin *et al.*, 1974)。その特徴は外力に対する場の応答を表すグリーン関数 $G(\mathbf{k}, t, t')$ を利用する点で、一様な2次元乱流に対しては次の様になる。

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right\} \Omega(\mathbf{k}, t, t') = T(\mathbf{k}, t, t') \quad (22)$$



第3図 CLOSURE ダイアグラム.

$$T(\mathbf{k}, t, t') = \iint d\mathbf{p} \left\{ \frac{1}{2} a_{kpq} \int_0^{t'} G(\mathbf{k}, t', s) \right. \\ \times \Omega(\mathbf{p}, t, s) \Omega(\mathbf{q}, t, s) ds - b_{kpq} \int_0^t G(\mathbf{p}, t, s) \\ \left. \times \Omega(\mathbf{q}, t, s) \Omega(\mathbf{k}, s, t') ds \right\} \quad (22)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right\} G(\mathbf{k}, t, t') + \int_{t'}^t \eta_k(t, s) G(\mathbf{k}, s, t') ds \\ = \delta(t - t') \quad (23)$$

$$\eta_k(t, s) = \iint d\mathbf{p} b_{kpq} G(\mathbf{p}, t, s) \Omega(\mathbf{q}, t, s) \quad (24)$$

(22)式が(19)式と非常によく似た構造を持っている点に注意していただきたい。これは DIA が準正規分布の仮定を利用していることを反映している。実際

$$G(\mathbf{k}, t, t') = e^{-\nu k^2(t-t')}, \Omega(\mathbf{k}, t, t') = e^{-\nu k^2(t-t')} \Omega(\mathbf{k}, t)$$

と仮定すると QN が得られる。Orszag (1970) はこれらの事から DIA は QN を渦による統計的效果をつけ加えて改良した理論になっていると考えた。この様に DIA は非常に魅力的な面もあるが、高レイノルズ数の乱流に対しては2次元でも3次元でもよい結果を与えないことがわかっている (Orszag, 1977)。それは低波数領域のシア的な効果が慣性小領域でも強過ぎるからで、DIA がガリレイ不変な形をしていない事実と対応している。これを回避するために LHDIA が提案された。数値実験の結果 LHDIA はよい性質を持っている様に思われる (Herring et al., 1979, 1982) が、非常に複雑で実際的な取り扱いはあまりにも困難である。

以上述べた理論の関係をダイアグラムの的に表現したの

が第3図である。実線は強い関係を表し、矢印は適当な意味での拡張になっていることを示す。破線は弱い関係で、発想の共通性などを示す。これらの理論と数値実験との比較が Herring らによって行われている (Herring et al., 1974, 1979, 1982) が、諸理論の間の優劣がはっきりと決まるというほどの明確な結果は与えていない様に思われる。なお、ここで挙げた理論以外にもいろいろな CLOSURE が考えられているが、それらについては前出のレビューなどを参照していただきたい。

CLOSURE 以外の代表的な方法として、Wiener-Hermite 展開が挙げられる。これはガウス型確率変数で乱流場を展開するもので興味深い方法であるが、2次元乱流への適用は今後の課題である (今村, 1976)。

最近の研究の傾向を見ると、CLOSURE 理論の基礎的な改良を旨としたものもある (Kaneda, 1981) が、全般的な関心はむしろ今までに得られた理論を非一様な乱流場に対して拡張して行こうとする方向にある様である。今後その方面の結果が多く現れると思われる。一方、CLOSURE に対する限界も考えられ始めている。たとえば、Intermittency を表現できる様な乱流モデルの開発が期待されている。渦系モデルはそれになるかも知れないが、それについては後の章で言及する。

5. 地球流体への適用

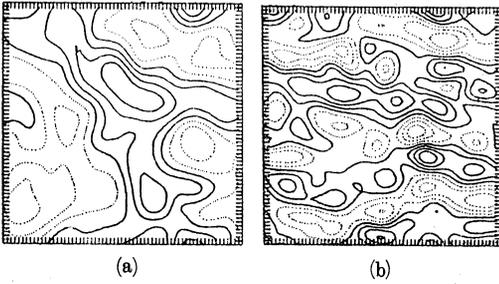
地球流体の大スケールの運動は2次元乱流としてとらえることが可能であるが、過度の従う式は必ずしも(1)で与えられるわけではない。運動は2次元的であるとしても、さまざまな効果、たとえばベータ効果、成層効果、地形の効果などが重要である。これらは主として大きなスケールで働くため2次元乱流に対しては第2章で述べた領域(I)でのエネルギースペクトルに対して大きな影響を持つと考えられている。しかし、2次元乱流における非線形相互作用の非局所性を考えれば、領域(III)、(II)に対してもかなりの影響を及ぼすと考えられるがそれはこれからの研究課題である。

5.1. ベータ効果

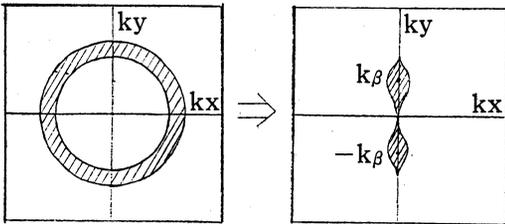
多くの効果の中で特に注目されるのはベータ効果である。これを含めると(1)は次の様に変形される。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\omega, \psi)}{\partial(x, y)} = \nu \Delta \omega - \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (25)$$

ただしコリオリ力の変化はy方向と仮定し、ベータ面近似を行っている。x方向を帯状方向と呼ぶ。(25)は(1)と比べて、エネルギー、エンストロフィーの保存則は変化し



第4図 異なった β の値を持つ流れの同一時刻での流線 (Rhines, 1975).
(a) $\beta = 0$ (b) $\beta = 52$



第5図 渦度スペクトルの変化.

ない。つまりベータ効果はエネルギー、エンストロフィーの波数空間での輸送に対して影響を及ぼす(ベータ効果はコリオリ項に入っているから当然エネルギーへの寄与はない)。この方程式を最初によく調べたのは Rhines (1975) である。彼は (2) 式の数値積分を行って、2次元乱流がロスビー波の集合とみなされる波動的な状態を経て、帯状流へ変化して行くことを示した(第4図)。その幅は彼の理論によれば U を系の代表速度とすると $(2U/\beta)^{1/2}$ となる。この様子を渦度スペクトル $\Omega(\mathbf{k}, t)$ を使って説明しよう。もし乱流が初期に等方的であったとすると Ω がある一定値より大きな領域(エネルギーが含まれる領域)は、最初原点を取りまく環状領域である。時間がたつにつれ k_x 方向には狭くなり k_y 軸上の $\mathbf{k} = (0, \pm k_\beta)$, $k_\beta = (\beta/2U)^{1/2}$ を中心とした領域に移って行くと考えられる(第5図)。 k_β の値は最も簡単には、(2)式で非線形項とベータ項の釣り合いから与えられる。同じ問題を、Holloway と Hendershott (1977) は TFM を使って調べた。彼らの結果はエネルギー逆カスケードが、非線形相互作用がロスビー波の三波相互作用が効果的になる領域で、抑制されることを示している。これに従い乱流場が非等方化されて行くことも示されている。

Williams (1978) は、このモデルを木星大気の縞模様の説明に利用した。彼は球面上でコリオリ力の変化を考慮した2次元流体方程式を解いて、縞模様を見事に再現した。

5.2. 成層効果

成層流体中の乱流は準地衡風平衡近似の方程式をもとにして取り扱われることが多い。この問題に対して最初に興味深い議論を行ったのは Charney (1971) である。彼は適当な仮定の下に成層流中の乱流が2次元乱流と類似の性質を持つことを示した。成層流体は最も簡単な近似として、鉛直方向の変化を2層の流体層で近似した次の方程式系で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial(q_i, \psi_i)}{\partial(x, y)} &= 0 \\ q_i &= -\Delta\psi_i - F(\psi_j - \psi_i) + \beta y \\ i=1, 2 \quad j=3-i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

q_i, ψ_i はそれぞれ i 層のポテンシャル渦度と流れ関数で、 F は2層間の内部フルード数である。 $(2F)^{-1/2}$ は内部ロスビー変形半径と呼ばれる。方程式系(2)を用いて Rhines や Salmon らは主として傾圧不安定の問題を取り扱った (Salmon, 1978; Rhines, 1979)。傾圧不安定の問題は Charney (1947) や Eady (1949) 以来層流の不安定問題として取り扱われてきたが、彼らはそれに2次元乱流的な非線形相互作用を取り入れたのである。彼らの結果によれば傾圧的な状態から順圧的な状態への変化が主に内部ロスビー変形半径程度のスケールで起こり、一時的にエネルギーカスケードの向きが普通の2次元とは逆に高波数へ向かう場合があることが示されている。

以上紹介した2つの例以外にも地形の影響や、平均流生成の問題が研究されていることを追加しておく。

6. 2次元乱流のモデルとまとめ

2次元乱流のモデルとして Onsager (1949) 以来古くから渦糸の集合が考えられていて今日も活発に研究が行われている。特に Aref ら (1982) によって少数渦糸系でのカオスが調べられてから一層関心が高まっている。けれども、いったい渦糸系が2次元乱流の近似になっているかどうかという点については現在でもよくわかっていない点が多い。2次元渦糸系はハミルトニアンを持ち(今井, 1973)、その平衡状態に関する統計的性質はよく調べられている。平衡状態としては同符号の渦糸同志が集まった、統計力学的に言えば負温度の状態が得られていてこれはエネルギー逆カスケードの結果を表現して

いると考えられる (Kraichnan, 1975; Kida, 1975; Lundgren・Pointin, 1977). しかし, 渦系の集合で2次元乱流を表そうとする時, いくつかの困難が存在する. まず第1に渦系が表すのは非粘性流れであるが, NS方程式に従う流れは粘性があり, それが非常に小さいとしても渦系系が有限粘性からの極限の状態を表現しているという証明はまだ得られていない. 第2番目は渦度分布の問題で, 連続渦度場をパルスのな渦度場でどれほどよく近似できるのかという点と, 境界から流れ場に注入される渦度の大きさに関するあいまいさである. しかしこれらの問題点にもかかわらず, 多くの研究者によって行われているシア流の渦系近似はたいへん興味深い結果を与えていて (例えば Aref・Siggia, 1981), 今後の発展が望まれる.

渦系モデルの拡張としていくつかの興味深いモデルが存在する. まずその一つは, 有限の渦度のひろがりを持った渦領域間の相互作用を調べるもので (Saffman・Schatzman, 1981; Kida, 1982), 渦系モデルの自然な拡張である. まだ乱流状態は取り扱われていないが Saffman (1971) のモデルとの比較も含めて今後が楽しみである. 一方, 渦系モデルのまま地球流体に特有な効果を取り入れたモデルが存在する. 一つは, ロスビー半径の効果を取り入れたもので Morikawa (1960) により行われた. このモデルでは渦系のもつ流れ関数はゼロ次の変形ベッセル関数で表される. もう一つはベータ効果を取り入れようとするもので, 河野と山形 (1977), Zabuskyら (1982) によって考えられている. これはベータ面上を渦系が動く時, 渦系の強さが緯度によって変化する様にしたモデルである. これらの変形された渦系モデルがどれほど有効であるかは今後の研究に待つ所が大きい.

最後に言うまでもないことであるが, 現実の乱流モデルとして考えた時2次元乱流は, 非等方3次元乱流の一つの極端な近似である. 従って特に高波数領域では次元効果が決して無視できないわけで, 非線形相互作用でも3次元の効果が必要になる. サブグリッドスケールの問題では3次元の渦粘性をどうやって取り入れるかは非常に重要である. この問題と, 非一様な系での2次元乱流に対して強力な方法が考案されれば, 地球流体力学も大きく進歩すると思われる.

あとがき

本稿は, 1983年8月に新潟県にある筑波大学石打研修

所で行われた, 第4回地球流体セミナーでの講演を中心にとまとめたものです. 本稿をまとめる様にお薦めいただいた, 筑波大学の吉沢能政教授, 東大海洋研の吉崎正憲博士に感謝いたします.

文 献

- Arakawa, A., 1966: Computational design for long-term integration of the equations of fluid motion, Two-dimensional incompressible flow, Part I., J. Comp. Phys., 1, 119-143.
- Aref, H. and E.D. Siggia, 1981: Evolution and breakdown of a vortex street in two dimensions, J. Fluid Mech., 109, 435-463.
- , and N. Pomphrey, 1982: Integrable and chaotic motions of four vortices, I. The case of identical vortices, Proc. Roy. Soc., A380, 359-387.
- Basdevant, C., M. Lesieur and R. Sadourny, 1978: Subgrid-scale modeling of enstrophy transfer in twodimensional turbulence, J. Atmos. Sci., 35, 1028-1042.
- Batchelor, G. K., 1953: The theory of homogeneous turbulence, Cambridge Univ. Press.
- , 1969: Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence, Phys. Fluids Suppl. II, 233-239.
- Charney, J.G., 1947: The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current, J. Met., 4, 135-163.
- , 1971: Geostrophic turbulence, J. Atmos. Sci., 28, 1087-1095.
- Debois, M., 1975: Large-scale kinetic energy spectra from Eulerian analysis of Eole wind data, J. Atmos. Sci., 32, 1838-1847.
- Eady, E., 1949: Long waves and cyclone waves, Tellus, 1, 33-52.
- Fjørtoft, R., 1953: On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for twodimensional, nondivergent flow, Tellus, 5, 225-230.
- Fornberg, B., 1977: A numerical study for 2-D turbulence, J. Comp. Phys., 25, 1-31.
- Frisch, U., P.L. Sulem and M. Nelkin, 1978: A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence, J. Fluid Mech., 87, 719-736.
- Gage, K.S., 1979: Evidence for a $k^{-5/3}$ law inertial range in mesoscale two-dimensional turbulence, J. Atmos. Sci., 36, 1950-1954.
- 長谷川晃, 1980: ドリフト波とロスビー波, その乱流特性, 日本物理学会誌, 35, 144-148.
- Herring, J.R., S.A. Orszag, R.H. Kraichnan and D.G. Fox, 1974: Decay of two-dimensional tur-

- bulence, *J. Fluid Mech.*, **66**, 417-444.
- Herring, J.R. and R.H. Kraichnan, 1979: A numerical comparison of velocity-based and strain-based Lagrangian-history turbulence approximations, *J. Fluid Mech.*, **91**, 581-597.
- Herring, J.R., D. Schertzer, M. Lesieur, G.R. Newman, J.P. Collet and M. Larcheveque, 1982: A comparative assessment of spectral closures as applied to passive scalar diffusion, *J. Fluid Mech.*, **124**, 411-437.
- Holloway, G. and M.C. Hendershott, 1977: Stochastic closure for nonlinear Rossby waves, *J. Fluid Mech.*, **82**, 747-765.
- Hopfinger, E.J., F.K. Browand and Y. Gagne, 1982: Turbulence and waves in a rotating tank, *J. Fluid Mech.*, **125**, 505-534.
- 今井 功, 1973: 流体力学前編, 装華房.
- 今村 勤, 1976: 確率場の数学, 岩波書店.
- Kaneda, Y., 1981: Renormalized expansions in the theory of turbulence with the use of the Lagrangian position function, *J. Fluid Mech.*, **107**, 131-145.
- Kida, S., 1975: Statistics of the system of line vortices, *J. Phys. Soc. Japan*, **39**, 1395-1404.
- , 1982: Stabilizing effects of finite core on Kármán vortex street, *J. Fluid Mech.*, **122**, 487-504.
- 河野次朗・山形俊男, 1977: ベータ面上の渦対の挙動, 日本海洋学会秋季大会講演要旨集, 83-84.
- Kraichnan, R.H., 1959: The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.*, **5**, 497-543.
- , 1965: Lagrangian-history closure approximation for turbulence, *Phys. Fluids*, **8**, 575-598.
- , 1967: Inertial ranges in two-dimensional turbulence, *Phys. Fluids*, **10**, 1417-1423.
- , 1971: Inertial range transfer in two and three-dimensional turbulence, *J. Fluid Mech.*, **47**, 525-535.
- , 1975: Statistical dynamics of two-dimensional flows, *J. Fluid Mech.*, **67**, 155-175.
- , 1976: Eddy viscosity in two and three dimensions, *J. Atmos. Sci.*, **33**, 1521-1536.
- , and D. Montgomery, 1980: Two-dimensional turbulence, *Rep. Prog. Phys.*, **43**, 547-619.
- Lamb, H., 1974: *Hydrodynamics*, Cambridge Univ. Press.
- Leith, C.E., 1968: Diffusion approximation for two-dimensional turbulence, *Phys. Fluids*, **11**, 671-673.
- , 1971: Atmospheric predictability and two-dimensional turbulence, *J. Atmos. Sci.*, **28**, 145-161.
- , and R.H. Kraichnan, 1972: Predictability of turbulent flows, *J. Atmos. Sci.*, **29**, 1041-1058.
- Lilly, D.K., 1971: Numerical simulation of developing and decaying two-dimensional turbulence, *J. Fluid Mech.*, **45**, 395-415.
- Lin, J.T., 1972: Relative dispersion in the enstrophy-cascading range of homogeneous two-dimensional turbulence, *J. Atmos. Sci.*, **29**, 394-396.
- Lorenz, E.N., 1963: Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.*, **20**, 130-141.
- Lundgren, T.S. and Y.B. Pointin, 1977: Statistical mechanics of two-dimensional vortices, *J. Stat. Phys.*, **17**, 323-355.
- Martin, P.C., E.D. Siggia and H.A. Rose, 1974: Statistical dynamics of classical systems, *Phys. Rev.*, **A8**, 423-437.
- Monin, A.S. and A.M. Yaglom, 1975: *Statistical Fluid Mechanics*, **2**, M.I.T. Press.
- Morel, P. and M. Larcheveque, 1974: Relative dispersion of constant-level balloons in the 200-mb general circulation, *J. Atmos. Sci.*, **31**, 2189-2196.
- Morikawa, G.K., 1960: Geostrophic vortex motion, *J. Met.*, **17**, 148-158.
- Obukhov, A.M., 1941: Energy distribution in the spectrum of a turbulent flow, *Izv. Acad. Nauk SSSR Ser. Geogr. Geofiz.*, **5**, 453-466.
- Ogura, Y., 1952: The structure of two-dimensionally isotropic turbulence, *J. Met. Soc. Japan*, **30**, 59-64.
- , 1962: Energy transfer in a normally distributed and isotropic turbulent velocity field in two dimensions, *Phys. Fluids*, **5**, 395-401.
- , 1963: A consequence of the zero-fourth-cumulant approximation in the decay of isotropic turbulence, *J. Fluid Mech.*, **16**, 33-40.
- 小倉義光, 1978: 気象力学通論, 東京大学出版会.
- Onsager, L., 1949: Statistical hydrodynamics, *Nuovo Cimento Suppl.*, **6**, 279-287.
- Orszag, S.A., 1970: Analytical theories of turbulence, *J. Fluid Mech.*, **41**, 363-386.
- , 1971: Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries I, Galerkin (Spectral) representations, *Stud. Appl. Math.*, **50**, 293-327.
- , 1977: Lectures on the statistical theory of turbulence, In *Fluid Dynamics*, Les Houches 1973, eds. R. Balian and J.L. Peube, Gordon and Breach.
- Pouquet, A., M. Lesieur, J.C. Andre and C. Bas-

- devant, 1975: Evolution of high Reynolds number two-dimensional turbulence, *J. Fluid Mech.*, **72**, 305-319.
- Proudman, I. and W.H. Reid, 1954: On the decay of normally distributed and homogeneous turbulent velocity field, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A247**, 163-189.
- Rhines, P., 1975: Waves and turbulence on a beta-plane, *J. Fluid Mech.*, **69**, 417-443.
- , 1979: Geostrophic turbulence, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **11**, 401-440.
- Richardson, L.F., 1926: Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. *Proc. Roy. Soc.*, **A110**, 709-737.
- Rose, H.A. and P.L. Sulem, 1978: Fully developed turbulence and statistical mechanics, *J. de Physique*, **39**, 441-484.
- Saffman, P.G., 1971: On the spectrum and decay of random two-dimensional vorticity distributions at large Reynolds number, *Stud. Appl. Math.*, **50**, 377-383.
- , and J.C. Schatzman, 1981: Properties of a vortex of finite vortices, *SIAM J. Sci. Stat. Compt.*, **2**, 285-295.
- Salmon, R., 1978: Two-Layer quasi-geostrophic turbulence in a simple special case. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **10**, 25-53.
- Sulem, P.L. and U. Frisch, 1975: Bounds on energy flux for finite energy turbulence, *J. Fluid Mech.*, **72**, 417-423.
- 高野健三, 1977: 海洋の渦, *科学*, **47**, 91-97.
- Tatsumi, T., 1957: The theory of decay process of incompressible isotropic turbulence, *Proc. Roy. Soc.*, **A239**, 16-45.
- , 1980: Theory of homogeneous turbulence, *Adv. Appl. Mech.*, **20**, 39-133.
- , and S. Yanase, 1981: The modified cumulant expansion for two-dimensional isotropic turbulence, *J. Fluid Mech.*, **110**, 475-496.
- Wiin-Nielsen, A.C., 1967: On the annual variation and spectral distribution of atmospheric energy, *Tellus*, **19**, 540-559.
- Williams, G.P., 1978: Planetary circulations, 1. Barotropic representation of Jovian and terrestrial turbulence, *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1399-1426.
- Zabusky, N.J. and J.C. McWilliams, 1982: A modulated point-vortex model for geostrophic, beta-plane dynamics, *Phys. Fluids*, **25**, 2175-2182.

文献追加

原稿を気象学会へ送った後、東大海洋研の木村竜治先生から大気乱流の観測に関する新しい論文を教えていただいた。これに最近著者の眼についた文献を合わせて追加しておく。

Lilly, D.K., 1983: Stratified turbulence and the mesoscale variability of the atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, **40**, 749-761.

———, and E.L. Petersen, 1983: Aircraft measurements of atmospheric kinetic energy spectra, *Tellus*, **35A**, 379-382.

Nastrom, G.D. and K.S. Gage, 1983: A first look at wavenumber spectra from GASP data, *Tellus*, **35A**, 383-388.