NVAG 2（地球物理におけるスケーリング則・フラクタル・非線形変動）ワークショップ報告*

矢　野　順　一**

1. はじめに

多くの人は，「フラクタル」という言葉をすでに，どこかで1度くらいは耳にされていることと思う．B. Mandelbrot という数学者が10年か20年前に提唱し始めた新しい幾何学の概念で，それが如何なるものであるかを知りたければ，彼自身が書いた本（エッセー？）がある（Mandelbrot, 1982）ので，これを読めば良い．ただ，日本語版（マンデルブロ，1985）も出ているものの，かなり大部なので，読み通すにはかなり気力を要する．その点，高安（1986）の本は薄手で，簡明にまとめられていて良いかもしれない．

そのどちらの本にも，Lovejoy (1982) が雲の水平パターンがフラクタルであることをデータ解析からちゃんと示したことが書いてあるし，フラクタルの例と言えば，すぐに雲が挙げられるほどだが，そんな話と本来の気象学がどのように結びつくのかと思われる向きも確かにあろう．しかし，気象学にフラクタル幾何学を応用した研究がすでに少なからず行われつつある（例えば，Lovejoy and Schertzer (1986) の review）．1986年夏には，Lovejoy, Schertzer らが中心になって，気象学も含めた地球物理学へのフラクタル幾何学の応用の可能性を探るため，Scaling, fractals and Nonlinear Variability in Geophysics (NVAG) と題された workshop がカナダのモントリオール，McGill 大学で行われた（この会議の報告は EOS に掲載されているので，これを参照されたい：Lovejoy and Schertzer, 1987）．

NVAG 2 と題されて，1988年6月28日から7月1日まで，3日半にわたって，フランス，パリの Ancienne Ecole Polytechnique（旧・理工科大学）で行われた今回の workshop は，これに続くものである．100名近くが登録し，50名近くが常時，Poincaré[1] の名が冠せられた小ホールである会場を占めていた．プログラムは，午前と午後のセッションで，

28日　地球流体力学1　降雨と雲
29日　地球流体力学2　固体地球
31日　気候1　リモート・センシング
1日　気候2

と分けられ，“in Geophysics” と題されながら，大気物理学（気象学）の占める比重が大きかったことが，セッション名からも察せられる．発表は，総計46．また，30日の夕方には，軽い夕食を共にした後，約2時間の round table discussion がもたれた．

この会議の生の雰囲気を少しでも良くお伝えし，また，フラクタル幾何学の大気物理学における位置を少しでも理解していただくために，以下，小生が重要と感じたいくつかの topics をひろいあげて，いささか主観的な報告をしたい[2]．

2. 二つの焦点

3日目の夕の round table discussion の半ばに，L.A. Smith（Cambridge 大）は，第1図のような OHP を我々に示した．2つの絵は，地球物理学（大気物理学）に現われる2種類のフラクタルの典型的な例である．上

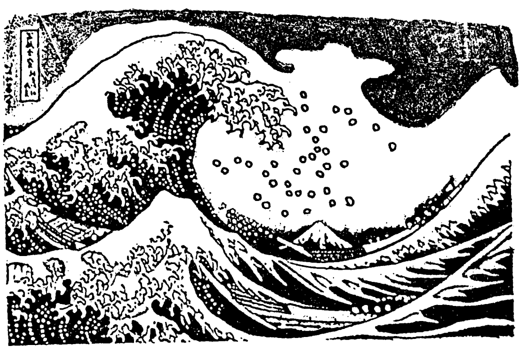
---

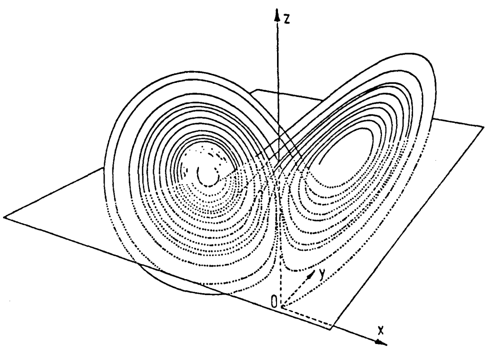
* A Report on the Workshop: Scaling, Fractals and Nonlinear Variability in Geophysics 2 (NVAG 2).

** Jun-Ichi Yano, 京都大学理学部.

1) Julés Henri Poincaré (1854–1912)：フランスの数学者，天文学者，物理学者．一般向き著作に，『科学と仮説』，『科学の価値』，『科学の方法』（岩波文庫）．

2) ただ，この報告は，self-contained であることを意図していないので，聞き慣れない用語が出てきても，あまり気にしないで，感じだけで読んでいただければ，と思う．より深く学びたい方のためには，比較的ていねいな文献リストを付したつもりである．なお，編集委員の求めに応じて，必要最小限度の用語の説明を脚注として付すことにした．





第１図

は，有名な北斉の浮世絵，下は，すでに良く知られているローレンツ・アトラクター[3] (Lorenz, 1963; あるいは，高安，1986, pp. 74-76) である．Smith は，この２つが質的に異なったものであることに注意をうながした．北斉の絵は，物理空間（実空間）におけるフラクタル（空間パターン・時間変動パターン），一方，ローレンツ・アトラクターは位相空間（Fourier 空間）におけるフラクタルである．「後者の概念については，すでにその有効性が確かめられているが，前者も同様に有効であるかについては，今のところまだ分かっていない．」という彼のコメントは，以下で見る様に，大気物理学の文脈では意味深長であるが，とにかく，今回の workshop は，この２つの種類のフラクタル（実空間と位相空間）を２つの焦点として動いていた，と言える．

3. 気候アトラクター

２番目の種類のフラクタル（位相空間におけるフラクタル）の焦点となっていたのは，気候アトラクター[4] の問題である．Nicolis and Nicolis (1984) が数百万年にわたる酸素同位体比の深海底コア・データ（海底の地層をドリルで堀りだした円柱状のサンプル・データ）を用いて，気候システムのアトラクター次元[5] は約 3.1 であるという見つもりを与えて以来，気候システムがはたして少数次元のアトラクターで記述できるか，それを如何にしてデータによって検証していくかは，大きな関心であった．

このアトラクター次元は，データの相関を計算することによって見つもられている（相関次元[6]：Grassberger and Proccacia, 1983) が，最近，Grassberger (1986) らによって，気候（気象）データを用いた相関次元の見

3) Lorenz attractor: あるＮコの変数についての常微分方程式系の解は，それぞれの変数の値を直交座標軸としたＮ次元の（位相）空間で軌道(曲線）として見ることでできる．かんたんには，この解の軌道のことを attractor と呼ぶ，と理解していただければ良い．やや正確には，適当な初期条件から出発して，解が落ちついていく先の軌道のこと．「ローレンツ・アトラクター」というのは，Lorenz (1963) が提案した三変数の常微分方程式のモデルの解のアトラクターのこと．なお，この Lorenz のモデルは，その後，少変数の常微分方程式系のモデル（少数次元モデル, low order model) の解のふるまいを幅広く調べていく先がけとなった．

4) ここで言う「気候」は，単に年変動より長い時間スケールでの大気の時間変動，という程度の意味．「気候アトラクター」というのは，気候システムを記述する微分方程式系の解のアトラクターのこと．

5) アトラクターの次元のこと．ここで言う「次元」は，測度 (measure) で定義されたもの．例えば，アトラクターが，長さという１次元の測度をもっておれば，次元は１，面積という２次元の測度をもっておれば，次元は２，体積という３次元の測度をもっておれば，次元は３，となる．ただ，この「次元」は，常に，整数値をとるとは限らない．例えば，北斉の絵に見られるような（１つの平面の断面で見た）波のパターン，雲の水平パターンなどの曲線の長さは，正確に測ろうとすればするほど大きくなって，有限の値には収束しない．したがって，長さという１次元の測度をもたない．もちろん，２次元の測度である面積は（見ているものが「曲線」であるという事実から）０なので，これらの図形は，１と２の間の非整数の次元を持つことになる．なお，本稿の主題である「フラクタル」は，非整数の次元をもつ図形，と定義される．

つもりには，収束性の問題があることが指摘されていた．今回の workshop では，Nicolis and Nicolis よりも質の良い気候データを用いて，埋め込み次元（embedding dimension）[7] を増やしてもアトラクターの相関次元が収束しなかった事例が報告された：

E. Aurell (Göteborg 大，スウェーデン）は，エーゲ海領域の木の年輪の記録とイタリア，Padova, 1725年—1934年の年降水量記録から，各々，相関次元 D_e の見つもりを行い，埋め込み次元 D_m を増やしても，ほぼ $D_m \simeq D_e$ という白色ノイズ的結果しか得られないことを示した．

L.A. Smith は，現実の有限個のデータから相関次元を見つもるには，２つの大きな制限が加わることを指摘した．第１は，北斎の絵に象徴的に示されているように，現実のフラクタルは，無限の階層構造を示さず，必ず，最小のスケール（一般に，粘性で決まる）をもつことによる制約．したがって，小さな位相空間距離での相関には粘性によるノイズが大きくなる．第２は，データが有限個であるために，位相空間でのデータの分布に境界が生じること．埋め込み次元を増すごとに，データ分布の境界の効果が強く効いてきて，小さな位相空間距離での誤差と重なりあって，次元が見かけ上，小さな値に収束しているように見えてしまう．このような見かけ上の収束を避けて，m次元位相空間で相関次元を５％以内の誤差で見つもるためには，十分なサンプリング間隔で少なくとも 42^m 個のデータが必要なことを Smith は示した．したがって，現実に入手可能な気象データの個数を考えると，５次元以上のアトラクター次元の見つもりは，実質上不可能ということになる．

R. Viswanthan (BIS, Paris) らは，フランス気象庁の観測データと GCM（大循環モデル）のデータを用いて，実際，与えられる相関次元の値が用いたデータ数に強く依存することを示し，また，白色ノイズを示すはずのフラクタル・ブラウン運動でさえ，はっきりとした見かけ上の収束を示すことを指摘した．

C. Nicolis (Institut d'Aéromie Spatiale, Bruxelles) は，Aurell の用いた年輪のデータは，生物的要因が強すぎて気候データとしては不適当である，と反駁したが，M. Ghil (UCLA) に，酸素同位体データにも程度の差こそあれ同様のことが言えると，たしなめられ，彼女自身の講演の冒頭には，もはや気候システムは $D \simeq 3.1$ のような少数次元ではなく，無限次元（$D=\infty$）のシステムであると考えねばならない，と宣言するまでに至った．

１つの大気・気候データの時系列は，事実上，無限個とも言える要因によって決まっている，というのが実際のところのようである．だとすれば，気候アトラクターの idea は，もはや葬り去られたかと言うと，少なくとも，M. Ghil はそうは考えていない様であった：実際の様々の時間スケールを含む生のデータの中から，気候変動のモードとして意味のある長時間スケールの成分（気候シグナル）を少数個，他の残りの（短時間スケールの）部分（ノイズ）から取り出すことが可能かもしれないし，それらの少数個のモードが（ある種の近似の下で）閉じた方程式系を成している，ということがありうる．Ghil と R. Vantaurd (UCLA) は，実際の気候データ（酸素同位体比）は，気候シグナル（気候変動によるものと見なせる信号）と白色ノイズの和から構成されているという仮定の下で，EOF 解析[8]（主成分解析）によって気候の独立モードの数を決定する試みを行い，独立モード数は少なくとも４つ（おそらく，高々10程度）という結果を得た．

4. 多重フラクタル

第１番目の種類のフラクタル（空間・時間パターン）の焦点となったのは，multifractal（多重フラクタル）の問題である．フラクタル幾何学が自然のパターンに適用され始めた段階では，自然パターンは，単純に，単一のフラクタル（simple fractal）から成っていると考えられていた．しかし，解析を進めていくにつれて，自然パターンの様相は，実は，それほど単純ではなく，様々な異なった次元をもったフラクタルがまじりあったもの（multifractal）であることが明らかになってきた（Scher-

6) アトラクター（あるいは，一般に任意の図形）上の点を一定（時間）間隔で取ったとき，それらの点の分布によって定義される次元．お互いに l 以下の距離にある点の組の数を $C(l)$ としたとき

$$C(l) \propto l^{D_e}$$

の関係が成り立てば，D_e が相関次元となる．

7) Takens によって，１変数の時系列から，任意の次元の位相空間を再構成する方法が提案されている（例えば，高安（1986），p. 167，式（6.33））．そのようにして再構成された位相空間の次元のことを「埋め込み次元」と言う．

8) N次元の位相空間中にデータの分布が与えられたとき，そのデータの散らばりの方向を大きい順にお互いに直交するように取って，変動の主成分とする解析法．

tzer and Lovejoy, 1987). 例えば，レーダー反射強度のしきい値を変えながら box counting 法 (高安 (1986), p. 16, 定義式 (1.9)′) でレーダー雲画像のフラクタル次元を測定すると，しきい値を大きくするにつれて，フラクタル次元が小さくなる (Lovejoy, Schertzer, and Tsonis, 1987). これは，雲パターンが simple fractal ではなく，multifractal であることを示している.

今回の workshop では，この multifractal の概念をどのように明らかにしていくか，という視点から様々な議論が行われた：D. Schertzer (EERM/CRMD, Paris) は，乱流の β-model を用いて，multifractal が multiplicative processes の下では普遍的であることを示した. S. Lovejoy (McGill 大, Montreal) は，様々な雲画像データを用いて，box counting 法による解析によって，雲の multifractal な特性を明らかにし，また，simple fractal を仮定した以前の解析法では，見かけ上のスケーリング則 (自己相似性) の破れが生じることを指摘した. この解釈に立てば，例えば，Yano and Takeuchi (1987) が用いた平均化法では，温度の低い雲が自己相似性を示さなかったが，これも見かけ上のスケーリング則の破れの一例ということになる.

Schertzer や Lovejoy たちの主張は，box counting 法が数学的にきちんと根拠づけられている点にある様だったが，しかし，この box counting 法によって，様々な異なった解像度の画像データを統一的に扱おうとすると困難が生じる. Box counting 法では，データが現象の最小スケールまで分解していることを前提としているが，実際のデータには分解能の限界があり，しかも，その分解能はデータの種類によって異なる. そこで，この言わば〝衣をつけた (dressed)〟実際のデータから，〝裸の (bare)〟生のフラクタルの特性をいかに引き出していくか，ということが問題になってくる. D. Lavalleé (EERM/CRMD, Paris) はこの点について議論を展開した. (しかし，一方，平均化法では，データの分解能にともなう問題は生じない. その意味では，むしろ，こちらの方が自然なアプローチと言えるかもしれない. ただ，こちらの手法には数学的基礎づけが欠けている.)

Y. Tessier (McGill 大, Montreal) は，降雨の全球観測点データの multifractal 解析について報告し，Lovejoy と Schertzer は，この multifractal 統計量を用いた内挿法によって，観測点の少ない海洋上の降雨量の正確な見つもりが与えられるはずである，とコメントを加えた. この見込みが正しいかどうかは別として，Lovejoy, Schertzer and Ladoy (1986) によって，気象観測点の分布がフラクタル・セットになっていることが指摘されており，観測点データの適切な内挿法を今後考えていくとき，このフラクタル性を考慮に入れる必要がでてくることだけは確かだろう.

一方，C. Gauthier (UCSD, San Diego) は，画像解析で用いられる雲分類の手法の review を行い，実際の解析で multifractal 統計量の計算は必ずしも容易でない，というコメントを加えた.

雲物理では「アルベド・パラドックス」として知られている問題がある. 雲のアルベド (反射率) から見つもられた雲水量が，実際に測定された雲水量よりも約10%大きくなる. このズレは，雲のフラクタル性を考慮していないためである，という観点から，フラクタル的な雲の場での放射場解析について初等的な議論が P. Gabriel, S. Lovejoy (McGill 大, Montreal), A. Davis (CARTEL, Sherbrooke) らによって行われた.

ただ，全体として，具体的な大気現象と結びつけた議論は多くは見られず，その中で目についたのは，矢野が熱帯大気の時間変動の特性について，川上伸一(岐阜大)が日本における降雨特性の季節変化について，各々，フラクタル次元解析を用いた解釈を展開したことである.

5. むすび

3日目の夕の round table discussion の冒頭での M. Ghil の問題提起が今回の workshop 全体のひとつの総括を与えてくれるかもしれない：

科学の目的は，prediction にある. 少なくとも，この点だけは前提としたい. それとも，この点でさえ一致できないのだろうか？――と Ghil が問い正すと，会場は一挙にどよめいた. 実は，デリケートな問題をここですでに含んでいる. ――この点を認めた上で，彼は，2つの問題提起を行った.

第1の問いは，何らかの1つの定数値――空間的あるいは時間的次元，Lyapunov 指数[9] など――を求めるということ自体は，この科学の目的に何ら寄与しないのではないか，という点。第2の問いは，モデル数値実験の解釈には，multifractal, singular spectra などの概念が確かに有効だが，同様のことが実際の (例えば) 大気データにも言えるのか，という点.

9) アトラクターの性質を特徴づける指数. ここでは，具体的に何を意味するかは，別に気にしなくても良い. 例えば，高安 (1986), p. 79, 式 (3.7).

まさに，この第2の問いに関連した様々な議論が今回の workshop の中心を占めていたと言っても過言ではない．第1の問いに関しては，フラクタル次元の値そのものには，物理的意味があると言えないのではないか？と矢野がたたみかけたところ，L. Kadanoff (Chicago 大）に，tax rate そのものには意味がないと君は思うかね，とまぜかえされた．

Schertzer は，Ghil に対して，概念的理解の重要性を強調した．――我々がここに集まっているのは，すでに確立されている概念をどう応用するか，について話しあうためではない．我々の間では，まだ，基本的概念の定義でさえ一致できていない．例えば，multifractal が重要であるという点では，我々は同意しているが，しかし，multifractal が何であるか，という点に関しては，一致した答がない．気候アトラクターの問題に関しても同様だ．この問題についても，まだ答が出たとは思えない．――

Lovejoy は，そもそも，フラクタルの概念が物理学の他の分野（特に物性論：E. Stanley (Boston 大）はこの分野の立場から workshop 冒頭の講演を行った；彼は講演を「最近，東海岸では，今世紀は3つの厄難で最期(おしまい)になるのではないか，といううわさがはびこっている．その3つというのが，フラクタル，エイズ，……」と切り出した）と同様に，地球物理学でもその有用性が確立されているわけではない点を強調した．〝The time will answer…….〃 という彼の言葉は印象的であった．しかし，だからこそ，今後，少なくともしばらくは，この分野での積極的な取り組みが求められる，と思わされた．

なお，今回の出席にあたっては，国際学術交流基金の援助を受けた．

文　献

Grassberger, P., 1986: Do climate attractors exist? Nature, 323, 609–612.

____, and I. Procaccia, 1983: Characterization of strange attractors. Phys. Rev. Lett., 50, 346–349.

Lorenz, E., 1963: Deterministic nonperiodic flow. J. Atmos. Sci., 20, 130–141.

Lovejoy, S., 1982: Area-perimeter relation for rain and cloud area. Science, 216, 185–187.

____, and D. Schertzer, 1986: Scale invariance, symmetries, fractals, and stochastic simulations of atmospheric phenomena. Bull. Amer. Meteor. Sco., 67, 21–32.

____, and ____, 1987: The meeting report: Scaling fractals, and nonlinear variability in geophysics. EOS, 69, 143–145.

____, ____, and P. Ladoy, 1986: Fractal characterizaton of inhomogeneous measuring network. Nature, 319, 43–44.

____, ____, and A.A. Tsonis, 1987: Functional boxcounting and multiple elliptical dimensions in rain. Science, 235, 1036–1038.

Mandelbrot, B.B. 1982: The Fractal Geometry of Nature, W.H. Freeman and Co., New York,

マンデルブロ，B., 1985: フラクタル幾何学（広中平祐監訳），日経サイエンス．

Nicolis, C. and G. Nicolis, 1984: Is there a climate attractor? Nature, 311, 529–532.

Schertzer, D., and S. Lovejoy, 1987: Physical modeling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes. J. Geophys. Res, 92, 9693–9714.

高安秀樹，1986: フラクタル，朝倉書店．

Yano, J.-I., and Y. Takeuchi, 1987: The self-similarity of horizontal cloud pattern in the intertropical convergence zone. J. Meteor. Soc. Japan, 65, 661–667.