



# 天 気

1992年10月  
Vol. 39, No. 10

〔解説〕

101; 4011(カオス; 予測可能性)

## カオスと数値予報

### 一局所的リアプノフ安定性と予測可能性<sup>\*</sup>

余田成男<sup>\*1</sup>・木本昌秀<sup>\*2</sup>  
向川均<sup>\*3</sup>・野村真佐子<sup>\*4</sup>

#### 1. はじめに

1991年秋にMIT名誉教授エドワード・ロレンツ氏が第7回京都賞(基礎科学部門)を受賞した。気象学の発展に対する長年の貢献に加えて、熱対流の簡単な数値モデルで「カオス」を発見した功績に対して贈られたものである。組織委員の佐藤文隆京大教授は、受賞記念ワークショップ(津田(1992)の報告を参照)の挨拶で「カオスの認識はニュートン以来の決定論的自然観に変更を迫る革新的な自然観を我々に提示するに至った」と述べている。また、熱心なカオス支持者は、カオスが相対論や量子論とならぶ20世紀科学の大発見であるとまで言っている。ロレンツがカオスを発見した経緯は、Gleick(1987)や戸田(1991)の啓蒙書に詳しく述べられている。内輪ネタをひとつ書くと、この時のプログラマーが、のちにジョン・ギリー博士(NCAR)の夫人となるエレンである。

カオスとは混沌とした秩序のない状態を意味する言葉

であるが、Lorenz(1963)はこれを「決定論に従うが不規則な状態(流れ)」と表現した。ある変動状態がカオスであるかどうかを判別し不規則の程度を調べる手段として、リアプノフ安定性解析がある(例えば、佐野1987)。ある系における状態の時間変化を考えて、その初期時刻にわずかに異なった2つの状態が時間発展とともにそれらの差を増大させるとき、この振舞いをカオスと呼び、指数的増大率をリアプノフ指数と呼ぶ。このような「初期値に対する鋭敏な依存性」がカオスの特徴づける重要な性質の一つである。

ロレンツの研究以来、特にここ10年余り、気象学の分野でもカオスの概念がさまざまな問題で使われるようになってきた(例えば、Ghil, Benzi and Parisi 1985)。大気の子測可能性の問題もその一つである。

Lorenz(1963)は数値予報モデルにおける「鋭敏な初期値依存性」の考察より、たとえ完璧な予報モデルができたとしても観測にともなう初期値誤差は避けられないので、数値予報には限界がある(つまり、有限時間後には予報が不可能になる)と結論した。さらに、Lorenz(1965)はランダムで微小な初期値誤差の線形時間発展を定式化し、簡単な大気モデルを用いて誤差成長の変動に関する数値実験を行った。その大枠は今日の局所的リアプノフ安定性解析にあたるものであり、ロレンツの先駆性を示すものである。しかし、1960年代は数値予報モ

\* Chaos and numerical weather prediction  
—Finite-time Lyapunov stability and atmospheric predictability—

<sup>\*1</sup> Yoden Shigeo, 京都大学理学部。

<sup>\*2</sup> Kimoto Masahide, 気象研究所気候研究部。

<sup>\*3</sup> Mukougawa Hitoshi, 気象大学校。

<sup>\*4</sup> Nomura Masako, 神戸製鋼所。

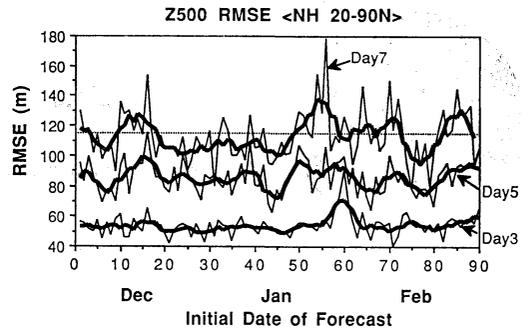
デルの揺籃期であり、まずは、ちゃんとしたモデルを作ることがその頃の最重要課題であった。当時のモデルは不完全なもので系統的誤差が大きく、ロレンツが指摘した初期値誤差の拡大などは実際的な問題ではなかったと言える。

近年、数値予報モデルの改良が進み、数日程度の子報は十分信頼できるようになってきた。気象庁においても、1988年3月より毎日、全球モデルを用いた8日間予報が行われている。ところが、予報期間を延ばすと予報誤差が格段に増大し、その日々の変動も顕著となる。1週間程度の中期予報では、予報誤差の見積りが予報自体と同様に重要であることがわかってきた。すなわち、ロレンツが20年以上前に言ったことをもう一度考え直してみる必要性が出てきたわけである。これまで、我々は、簡単な概念モデルから実際の子報モデルまでのいくつかの階層の数値モデルを用いて、予報誤差成長の変動に関する研究を進展させてきた(木本1988; 向川1989; 余田1989; 野村・余田1990; 余田・野村・木本・向川1990; Mukougawa, Kimoto and Yoden 1991; 向川・木本・余田1991; 野村1991; Kimoto, Mukougawa and Yoden 1992; Yoden and Nomura 1992; 木本 1992; 余田 1992)。この解説ではこれらの研究論文・報告のまとめを行う。2節では実際の中期予報における予報誤差の変動を紹介し、3節では誤差成長の理論—局所的リアプノフ安定性理論—について概説する。さらに、4節では順圧大気モデルを用いて局所的リアプノフ安定性解析の実例を示し、5節でこの理論の数値予報への応用を議論する。

## 2. 予報誤差の変動

ここでは、予報値と解析値の差を予報誤差としよう。このように定義した誤差には、予報モデルが不完全であることに起因する誤差とロレンツの言う初期値誤差の拡大にもなるものが含まれている。しかし、大気の状態(観測誤差を含まない状態)を知ることができないので、両者を分離することは原理的に不可能である。

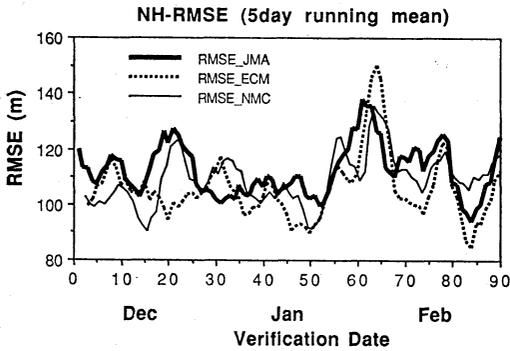
第1図は気象庁全球スペクトルモデルにおける1988年12月1日から90日間の予報誤差の変動を示したものである(Kimoto *et al.* 1992)。ここでは、予報誤差の指標として北緯20度以北での500 mb 等圧面高度の Root Mean Square (RMS) 誤差を用いる。RMS 誤差とは、各格子点での誤差の二乗を領域平均してその平方根をとったものである。予報誤差は予報期間が延びるに従って増大するが、その変動の大きさも大きくなる。例えば7日子報の



第1図 気象庁全球スペクトルモデルにおける1988年12月1日から90日間の予報誤差の変動。3日、5日および7日子報についての北半球(20°N以北)500 mb等圧面高度場のRMS誤差。太線は5日移動平均、点線は気候的標準偏差値。

誤差を見ると、日々の変動も大きい。1週間以上のゆっくりした変動が顕著で、変動幅は平均値の30%以上の大きさとなっている。また、日々の変動を詳細に見ると、7日子報のほうが5日子報よりも誤差が小さい場合があり、予報期間が長い方が予報誤差が大きいとは一概に言えない。この領域における500 mb等圧面高度の標準偏差を90日で平均すると115mであるので、ちょうど、7日子報の誤差がこの「気候的標準偏差値」あたりで変動していることになる。RMS誤差が気候的標準偏差値を越えると予報値はないので、この予報誤差を前もって予測できれば中期予報の情報価値を高めることになる。例えば、「今日の7日子報は予報誤差の予測値が小さいので、自信を持って出す(結構当たる)予報です。」というような予報ができるようになるだろう。

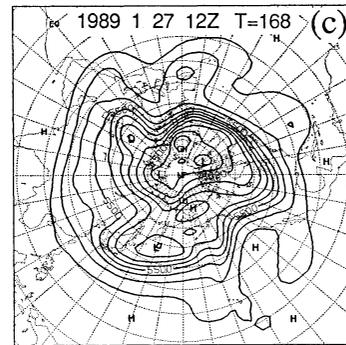
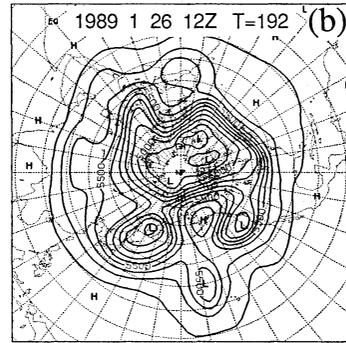
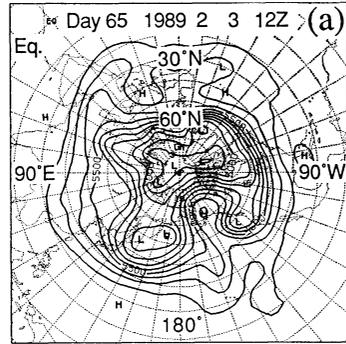
第1図で顕著な中期(7日)予報のゆっくりした誤差変動が何によってもたらされているか原因を探ってみよう。気象庁、ヨーロッパ中期予報センター(ECMWF)および米国気象センター(NMC)の三機関で上記期間に行われた7日子報の誤差変動(5日移動平均したもの)を第2図に示す。1週間以上のゆっくりした変動は三機関の結果とも類似している。特に12月末から1月中旬にかけての小さな値や1月末から2月初めの大きな値など良く一致している。各モデルは独立に開発されたものであるため、このような変動にはモデルにもなる系統的な誤差の変動よりも、大気運動の「リアプノフ不安定性」に起因する誤差成長の変動が大きく寄与していると



第2図 5日移動平均をした、7日予報についての北半球(20°N以北)500mb等圧面高度場のRMS誤差。太線は気象庁、点線はECMWF、細線はNMCの予報モデルの結果。

考えられる。つまり、大気循環場の変動に伴って初期値誤差の成長率が変動したことが示唆される。このような循環場変動に伴う誤差成長変動の可能性は、近年になって指摘され始めたばかりである。Legras and Ghil(1985)は、簡単な大気モデルを用いて大気循環の状態(例えば、中緯度ジェットの蛇行型と直流型)によって誤差成長率(リアプノフ指数)が異なることを示した。また、Palmer(1988)は実際の子報結果の解析をもとに予報誤差が太平洋/北米域の長期変動(PNAモード)と密に関連していることを示した。

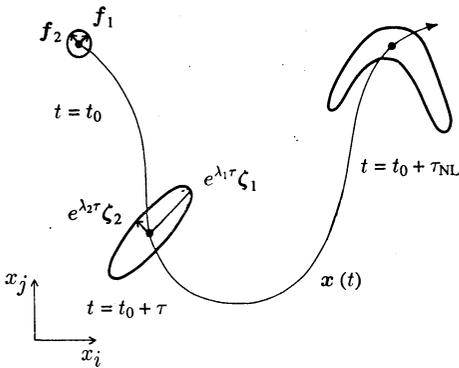
この期間の大気循環場を見ると、12月末から1月中旬にかけては中緯度ジェットは直流型で、誤差が大きくなった1月末から2月初めにかけて蛇行(ブロッキング)型に遷移していることがわかる。第3図(a)は1989年2月3日の500mb等圧面高度場の解析図で、アラスカ付近に典型的なブロッキング高気圧が発達していることを示している。この日に対する予報例を(b)と(c)に示す。(b)は1月26日を初期値とした8日子報であり、(c)は27日を初期値とした7日子報である。明らかに(b)の方が成績の良い予報でブロッキング高気圧の出現を予報できている。(c)は初期値が一日違うだけであるが、予報結果に大きな違いをもたらしている。予報期間が1日短い(c)の方が大きい予報誤差を出していることに注意すべきである。(b)と(c)の差は、このモデル内で初期値の差((b)の1日子報値と(c)の初期値の差)が拡大したものである。これらは、カオスの特徴として挙げた「初期値に対する鋭敏な依存性」を示す具体



第3図 (a) 1989年2月3日12GMTの500mb等圧面高度場解析図、(b)1月26日12GMTを初期値とする8日子報、(c)1月27日12GMTを初期値とする7日子報。

例と言えよう。

ここで示したのはある冬の一例である。当時は毎日の8日子報が始まったばかりで、事例解析をやるのが精いっぱいであった。それ以来、毎日の業務として中期予報が出されその結果が蓄積されているので、より長い期間のデータ解析により循環場と誤差成長の関連の統計的有意性を示すことが可能になりつつある(例えば、Molteni



第4図 非線形力学系における初期値誤差の成長を示す概念図。Hoffman and Kalnay (1983)をもとに作図した。

値  $x(t_0)$  と評価時間  $\tau$  に依存することになる。ここでは、Lorenz (1965) に従って  $M$  を誤差行列と呼ぶ。

この摂動がランダムで等方的であるとし、分散  $a^2$  のガウス分布を仮定すると、初期摂動の確率密度関数は次で与えられる：

$$p(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} a^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2a^2} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right\}. \tag{4}$$

相空間内での等確率密度面は、 $\sum_{i=1}^n y_i^2 = \varepsilon^2 = \text{const.}$  という半径  $\varepsilon$  の  $n$  次元球となる。

野村 (1991) や Yoden and Nomura (1992) では、非等方なランダム誤差や系統的初期誤差を含む一般的な場合について議論しているが、ここでは、最も単純化した「等方的ランダム初期誤差」のみを考える。

力学系 (1) をある数値予報モデルとするならば、 $x(t)$  が予報変数 (各格子点値または各スペクトル係数値) となり、 $n$  が  $10^6$  オーダーの巨大な力学系となる。 $x(t)$  が真の状態で、 $y(t)$  が初期値に含まれる小さな誤差の時間発展を表すこととなる。

3.2 線形安定性とリアプノフ安定性

定常解  $\bar{x}(F[\bar{x}]=0)$  の線形安定性は、 $J$  (定常解なので時間とともに一定) の固有値・固有ベクトルを求めることにより調べられる。 $J$  は普通の実行列であるので、その固有値は一般に複素数であり、固有ベクトルは一般に直交していない。少なくとも1つの固有値が正の実部をもつとき、摂動は指数的に増大するので、定常解  $\bar{x}$  は不安定である。

つぎに、アトラクタ上の時間的に変化する基準解  $x(t)$  のリアプノフ安定性を考える。アトラクタとは、「散逸力学系で解軌道が  $t$  無限大で落ち込む集合の閉包」のことである。アトラクタには、時間変化しない不動点や周期変化するリミットサイクルのほかにも、ロレンツの発見したカオスをはじめとするストレンジアトラクタがある。Oseledec (1968) は、あるアトラクタ上の任意の初期値  $x(t_0)$  に対して、次の極限を持つ正規直交系  $f_i(t_0)$  が存在することを示した：

$$\lambda_i = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \log \| M(x(t_0), \tau) f_i(x(t_0)) \|. \tag{5}$$

この極限  $\lambda_i (1 \leq i \leq n)$  をリアプノフ指数、 $f_i$  をリアプノフベクトルと呼ぶ。リアプノフ指数は初期値  $x(t_0)$  に依存せず、無限期間 ( $\tau \rightarrow \infty$ ) で評価したアトラクタの大域的な性質を表す。式 (5) は、解軌道の近傍で  $f_i$  方向にわずかに離れた2点間の距離が基本的に  $e^{\lambda_i t}$  で時

and Tibaldi 1990). このような研究は、延長予報の可能性を追求する上で大変重要な解析の一つとなるであろう。

3. 局所的リアプノフ安定性理論

この節では非線形力学系の理論で導入された局所的リアプノフ安定性の概念を紹介し、次節で簡単な大気モデルを用いてその解析方法を例示する。モデルは完全である (系統的誤差がない) と仮定し、初期値誤差を真の解に加えられた小さな摂動であるとして、その線形的成長だけを考える。

3.1 非線形力学系における基準解と摂動

$n$  次元の非線形力学系 (連立常微分方程式系) を考える：

$$\frac{d}{dt} x(t) = F[x(t)]. \tag{1}$$

この解  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$  を基準解と呼ぶことにする (第4図)。ある初期時刻  $t=t_0$  において、基準解  $x(t_0)$  に微小な摂動  $y(t_0)$  を与えると、その時間発展は (1) を局所的に線形化した方程式で記述できる：

$$\frac{d}{dt} y(t) = J(x(t)) y(t). \tag{2}$$

ここで、 $J(x(t))$  は  $F$  の  $x(t)$  におけるヤコビアン行列 ( $J_{ij} = \partial F_i / \partial x_j$ ) である。(2) を  $t_0$  から  $t_0 + \tau$  まで積分して  $y(t_0 + \tau)$  を求めると、次のようになる：

$$y(t_0 + \tau) = M(x(t_0), \tau) y(t_0), \tag{3}$$

行列  $M(x(t_0), \tau)$  は  $y(t_0)$  から  $y(t_0 + \tau)$  への写像であり、 $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$  の間の基準解  $x(t)$  に依存する。 $x(t)$  は  $x(t_0)$  を定めれば一意に定まるので、 $M$  は初期

間変化することを表している。「少なくとも一つのリアプノフ指数が正」である場合には2点間の距離が時間とともに指数的に増大しうるので、これをカオスの定義とする。つまり、 $\lambda_i > 0$  が「初期値に対する鋭敏な依存性」を示す場合である。このリアプノフ指数スペクトル  $\{\lambda_i\}$  をもとにアトラクタを分類することが可能である。指数の定義(5)より、リアプノフ安定性解析が線型安定性解析を時間依存する系に一般化したものではないことは明らかである。

3.3 局所的リアプノフ安定性

評価時間  $\tau$  が有限として、リアプノフ指数と同様の量を考えることができる (Goldhirsch, Sulem and Orszag 1987)。まず、半正値対称行列  $\mathbf{M}^T \mathbf{M}$  の固有値を大きい順に並べたときの  $i$  番目を  $e^{2\lambda_i(\mathbf{x}(t_0), \tau)}$  とし、それに対応する正規化された固有ベクトル (対称行列だから直交系をなす) を  $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t_0), \tau)$  とする:

$$\mathbf{M}^T(\mathbf{x}(t_0), \tau) \mathbf{M}(\mathbf{x}(t_0), \tau) \mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t_0), \tau) = e^{2\lambda_i(\mathbf{x}(t_0), \tau)} \mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t_0), \tau) \quad (6)$$

両辺に左から  $\mathbf{f}_i^T(\mathbf{x}(t_0), \tau)$  をかけて、 $\|\mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t_0), \tau)\| = 1$  を使うと、最終的に次を得る:

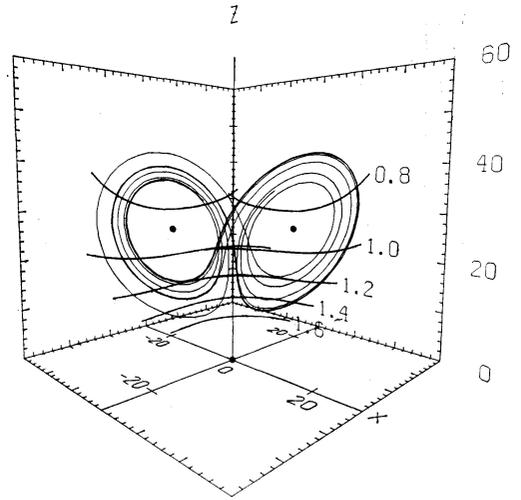
$$\lambda_i(\mathbf{x}(t_0), \tau) = \frac{1}{\tau} \log \|\mathbf{M}(\mathbf{x}(t_0), \tau) \mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t_0), \tau)\| \quad (7)$$

ここで、 $\tau \rightarrow \infty$  の極限をとれば(5)に一致するので、 $\lambda_i(\mathbf{x}(t_0), \tau)$  を局所的リアプノフ指数、 $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t_0), \tau)$  を局所的リアプノフベクトルと呼ぶ。  $\lambda_i$  が  $\mathbf{x}(t_0)$  のみに依存するならば「局所」という用語がふさわしいが、この場合は  $\tau$  にも依存しているので「有限評価期間リアプノフ指数」とでも呼んだほうが誤解を与えにくいであろう。しかし、冗長となるので、ここではあえて「局所的リアプノフ指数」と呼ぶことにする。  $\lambda_i > 0$  であれば、 $\mathbf{f}_i$  方向に離れた摂動は評価時間  $\tau$  に対して指数的に増大する。リアプノフ指数がアトラクタ全体の大域的な指標であるのに対して、局所的リアプノフ指数は初期値  $\mathbf{x}(t_0)$  と評価時間  $\tau$  に依存することに注意すべきである。

これらの量は、Lorenz (1965) の考えた等方的ランダム初期誤差の時間発展と直接関連する。時刻  $t_0$  において基準解  $\mathbf{x}(t_0)$  の近傍で等方的にランダムに分布した、大きさ  $\varepsilon$  の摂動 (初期値誤差) は、 $\mathbf{y}^T(t_0) \mathbf{y}(t_0) = \varepsilon^2$  と表されるが、(3)式より時刻  $t_0 + \tau$  では

$$\mathbf{y}^T(t_0 + \tau) [\mathbf{M}(\mathbf{x}(t_0), \tau) \mathbf{M}^T(\mathbf{x}(t_0), \tau)]^{-1} \mathbf{y}(t_0 + \tau) = \varepsilon^2, \quad (8)$$

となり、 $n$ 次元球が  $n$ 次元楕円体に変形される。半正値対称行列  $\mathbf{M} \mathbf{M}^T$  の固有値を大きい順に並べたときの  $i$  番



第5図 ロレンツアトラクタ上での局所的誤差成長率 (ロレンツインデックス)。パラメータは標準値 ( $\sigma=10, b=8/3, r=28$ )。

目を  $\Gamma_i(\mathbf{x}(t_0), \tau)$ 、対応する正規化された固有ベクトル (直交系をなす) を  $\zeta_i(\mathbf{x}(t_0), \tau)$  とすると、楕円体の主軸長は  $\varepsilon \Gamma_i^{1/2}$ 、主軸方向は  $\zeta_i$  である。これらは局所的リアプノフ指数およびベクトルと次の関係にあることが示される (野村 1991):

$$\Gamma_i(\mathbf{x}(t_0), \tau) = e^{2\lambda_i(\mathbf{x}(t_0), \tau)}, \quad (9)$$

$$e^{\lambda_i(\mathbf{x}(t_0), \tau)} \zeta_i(\mathbf{x}(t_0), \tau) = \mathbf{M}(\mathbf{x}(t_0), \tau)$$

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t_0), \tau). \quad (10)$$

すなわち、局所的リアプノフベクトル  $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t_0), \tau)$  は評価時間  $\tau$  後に誤差楕円体の主軸方向  $\zeta_i(\mathbf{x}(t_0), \tau)$  を向くベクトルで、等方的ランダム初期誤差の適当な正規直交基底であることがわかる (第4図)。

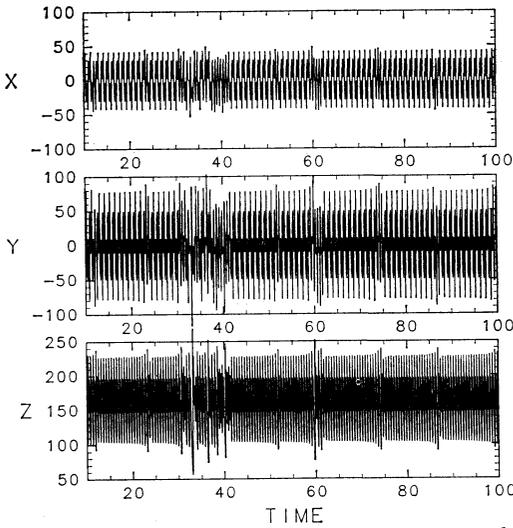
時刻  $t_0 + \tau$  における摂動の大きさのアンサンブル平均は楕円体の主軸長の RMS で与えられる。Lorenz(1965) は、局所的誤差成長率の指標としてこのアンサンブル平均した摂動の増幅率を用いた:

$$\alpha(\mathbf{x}(t_0), \tau) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Gamma_i(\mathbf{x}(t_0), \tau)}. \quad (11)$$

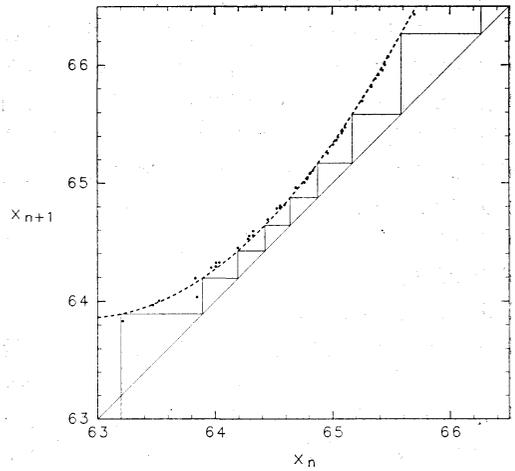
ここでは、 $\alpha(\mathbf{x}(t_0), \tau)$  をロレンツインデックスと呼び、等方的ランダム誤差の成長の指標とする。

3.4 単純な系でのイラストレーション

これまでに導入してきた概念を具体例を用いてイラストしてみよう。線形の力学系では  $\mathbf{J}$  が一定であるので、摂動の時間発展は初期値に依らない。それが初期値に依存して変動するのは非線形な力学系である。第5図は、



第6図 ロレンツシステムにおける間欠的カオス解 ( $\sigma=10, b=8/3, r=166.2$ ).



第7図 間欠的カオス解の1次元ポアンカレ写像 (小さい点). 詳細は本文参照. 破線は2次曲線で近似した写像であり, 細実線は軌道の例.

簡単な3次元の非線形系であるロレンツアトラクタ上でロレンツインデックスを求めた1例である (Mukougawa *et al.* 1991). ここで与えた評価時間  $\tau=0.1$  に対して, RMS 誤差はアトラクタ上での位置に依存して増大 ( $\alpha > 1$ ) したり減少 ( $\alpha < 1$ ) したりしている. この誤差成長率の大きさが何によって決まっているか, 基準解  $\mathbf{x}(t)$  の何と関連しているか, 大変興味ある問題であるが, 簡単なロレンツアトラクタにおいてでさえ良く判っていない.

ただし, 同じ系の間欠的カオス解においては, 誤差成長が基準解の「準定常状態」(Mukougawa 1988) と直接関係することがわかった. ある間欠的カオス解での各変数 ( $X, Y, Z$ ) の時系列を第6図に示す. ほぼ周期的な状態の間に乱れた状態が間欠的・非周期的に現れている. この間欠的カオス解の出現は, 1次元ポアンカレ写像 (第7図) をもとに理解できる (Pomeau and Manneville 1980). ここで, ポアンカレ写像とは, 第5図のような相空間内で軌道と交差するひとつの断面 (ポアンカレ断面) を考えた時の,  $n$  番目の交点から  $n+1$  番目の交点への写像のことである (この3.4節では  $n$  は交差した回数を表す). 具体的には, 第7図においては, ポアンカレ断面を  $Z=120$  ととり, この面と交差する軌道の座標 ( $X_n, Y_n$ ) より, 次の1次元写像を考えた:

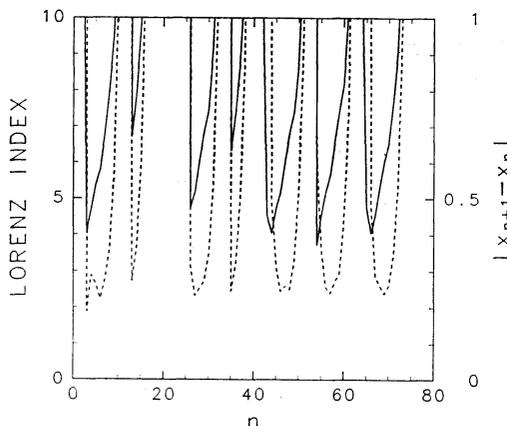
$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}. \quad (12)$$

第7図の小さな点はこの写像を表し, それらは破線で示

す2次曲線で充分よく近似できることがわかる. さらに, この曲線は  $x_{n+1} = x_n$  との間に狭いチャンネルを形成していることも見てとれる. 従って, 軌道がこのチャンネルを通過するには長い時間が必要となり, この期間の振舞いが第6図のほぼ周期的な状態として表れている.

一方, 以上のことは, 多次元力学系においてカオス運動で生じる準定常状態のアナロジーとして捉えることができる. 一般に準定常状態は, 基準解が相空間内において非定常極小点の近傍を通過する際に生ずることが示されている (Mukougawa 1988). ここで, 非定常極小点とは  $\|d\mathbf{x}(t)/dt\| = \|F[\mathbf{x}(t)]\|$  が相空間内で極小となる点である. つまり, 1次元写像においては, 非定常極小点は「 $|x_{n+1} - x_n|$  が極小となる点  $x_n$ 」として定義することができる. 第7図では, 非定常極小点は2次曲線の写像が  $x_{n+1} = x_n$  と最も接近する  $x_n \approx 64.4$  となる. 第6図のほぼ周期的な状態は, 軌道が1次元ポアンカレ写像における非定常極小点を通過する際に生じているので, これを準定常状態として解釈することができる.

この間欠的カオス解における局所的誤差成長 (ロレンツインデックス) の変動を第8図の実線で示す. 評価時間  $\tau$  を  $n$  番目の交差から  $n+1$  番目の交差までの時間として求めたもので, 横軸はポアンカレ断面との交差回数  $n$  である. 破線は周期性の指標  $|x_{n+1} - x_n|$  で, この値が小さい時に解はほぼ周期的な状態となる. この図より, 誤差成長はほぼ周期的な状態に入る直前に極小となり,



第8図 ポアンカレ断面を交差する時間毎のロレンツインデックス (実線) と周期性の指標  $|x_{n+1} - x_n|$  (破線) の時間変化. 横軸はポアンカレ断面との交差回数  $n$ .

徐々に増加した後、乱れた状態に入る直前に極大となることがわかる。このことは、1次元ポアンカレ写像を用いれば容易に理解できる。すなわち、軌道が非定常極小点に近づく時、 $|x_{n+1} - x_n|$  は次第に小さくなるので、摂動は減少し ( $df(x_n)/dx_n < 1$ )、ロレンツインデックスも小さな値になる。一方、遠ざかる時は逆に摂動が増加するので、ロレンツインデックスも大きな値になる。

このような誤差成長と基準解との関係の1次元的イメージが、より複雑な力学系でも有効かどうかはまだ明らかでない。多次元の力学系で、さらに最終的には現業の数値予報モデルで、誤差成長率の大きさと基準解 (つまり、大気循環場) との関係を示すのが、ここからの目標である。

#### 4. 順圧大気モデルにおける局所的リアプノフ解析

##### 4.1 順圧スペクトルモデル

中緯度  $\beta$  平面上での2次元非発散流は次の無次元化された渦度方程式で記述できる:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + J(\psi, \nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (13)$$

ここで、 $\psi(x, y, t)$  は流線関数、 $(x, y)$  は東向きおよび北向きの座標、 $t$  は時刻、 $\nabla^2$  は水平ラプラシアン、 $J(a, b)$  はヤコビアン、 $\beta$  は無次元ベータ・パラメータである。境界条件としては、 $x$  方向には  $2\pi$  で周期的とし、 $y$  方向には  $y=0$  と  $y=\pi$  に剛体壁があるとする。この境界条件を満たす適切な直交関数系で従属変数  $\psi$  を

展開し、(13) に代入して直交性を使うと、最終的に次のスペクトル表現を得る ( $F_i$  の具体的表式は Yoden (1985) を参照):

$$\frac{d\phi_i}{dt} = F_i(\phi_1, \phi_2, \dots), \quad i=1, 2, \dots, M \times (2N+1). \quad (14)$$

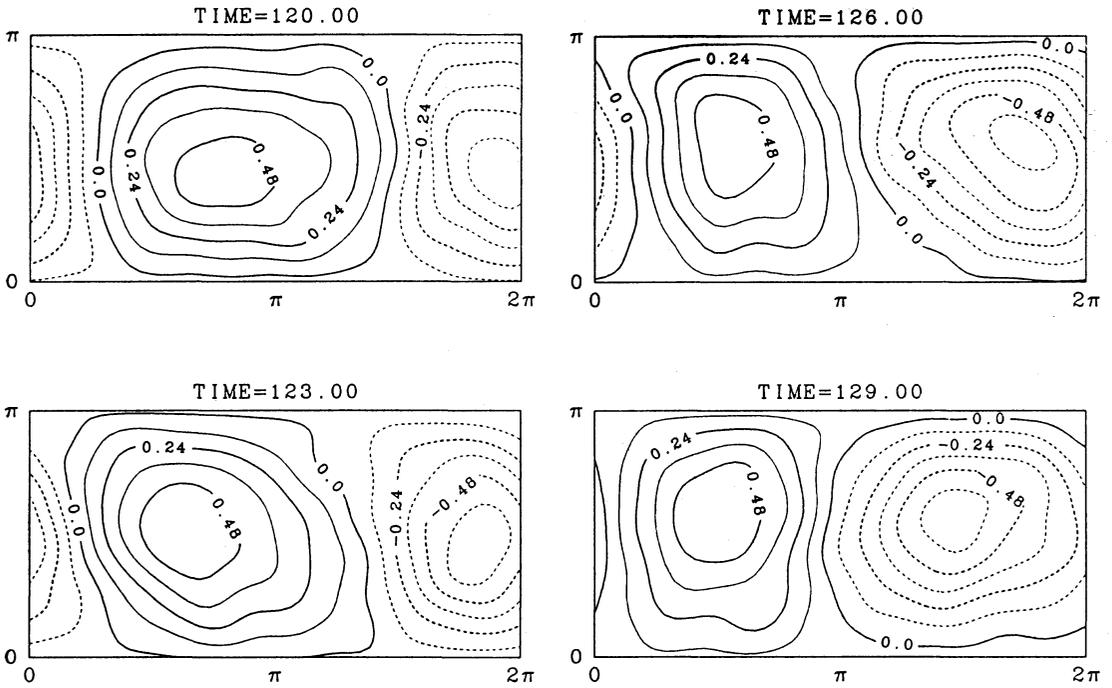
ここで、 $\phi_i(t)$  は展開係数であり、 $M$  と  $N$  は、 $y$  および  $x$  方向の切断波数である。

$M=N=8$  で切断すると、(14) は 136 変数の非線形常微分方程式系となる。差分モデルでも同様に考えることができる。領域を  $I \times J$  の格子点でおおいうならば、 $I \times J$  変数の非線形常微分方程式系となる。この方程式系 (14) を力学系 (1) と考えて、局所的リアプノフ安定性解析を行う。局所的線形方程式 (2) は (14) を直接微分して求める。まず、基準解を時間積分で求め、同時に、136 個の直交基底をそれぞれ初期値として局所的線形方程式を 136 回時間積分して、誤差行列  $M$  を計算する。次に、 $M^T M$ 、および  $MM^T$  の固有値・固有ベクトルを求め、局所的なリアプノフ安定性を調べる。

##### 4.2 局所的リアプノフ解析の実例

Yoden and Nomura (1992) では、基準解として定常解、周期解、およびカオス解を考え、それぞれについて詳細な解析を行った。とくに、局所的リアプノフ指数の評価時間  $\tau$  依存性と局所的リアプノフベクトルに含まれる情報内容について、また、これらと基準解との関連について調べた。渦度方程式 (13) は保存系であるので、得られたカオス解は強制-散逸系のカオスと異なる性質を持っている。しかし、この研究の目的は流体システムでの局所的リアプノフ解析法を例示することにあるので、この系の持つカオスの性質には詳しく触れない。

定常解に対する局所的リアプノフ安定性解析は、Farrell (1988, 1989, 1990) の提唱する最適励起問題の解析と基本的に同じである。ここで、最適励起問題とは、ある基本定常場が与えられたとき、一定期間内に最も効率良く中立波を励起するにはどのような初期値を与えれば良いか、または、一定期間内で最も発達する不安定波はどのようなものかを調べる問題である。例えば、線形不安定の場合にはヤコビアン行列の固有ベクトルは一般に直交していないので (3.2節)、評価時間が短ければ最大発達するのは不安定固有ベクトルではない。評価時間を長くすると、指数的増大に勝るものはないので不安定固有ベクトルが最大発達するようになる。従来の線形安定性理論では無限小の摂動 (言い換えれば、無限大の評価時間) を仮定していたのに対して、これらの解析では、線形化できる程度に小さいけれど有限の大きさを

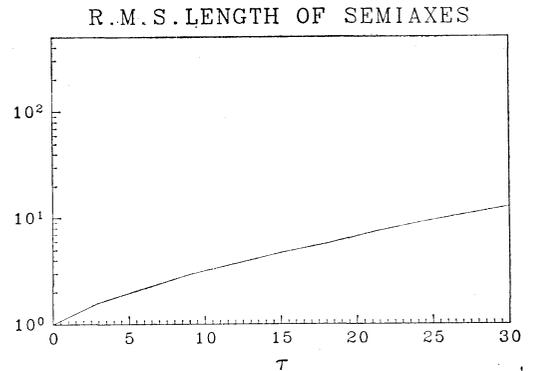


第9図 中緯度 $\beta$ 平面上の非発散渦度方程式におけるカオス解の一例。流線関数の時間的推移。

持つ摂動が有限評価時間内でどう発達するかを議論することになる。

指数的発達をする摂動がない中立な周期解（ロスビー波解）の解析では、ロレンツインデックスが $\tau$ に比例して代数的に増大する結果が得られた。やはり、ここでの有限評価時間に対するリアプノフ安定性解析によって、従来の線形安定性解析では見落としていた点が明瞭になる。

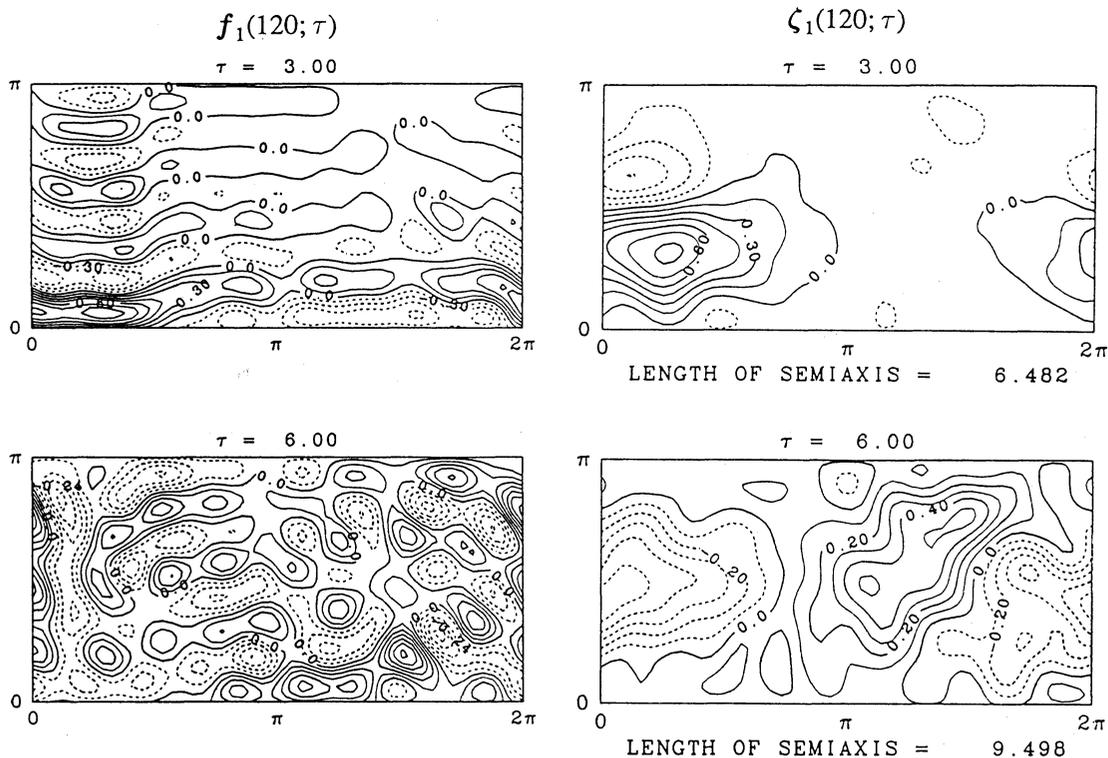
以下では、あるカオス解の解析例について詳しく述べる。ある不安定定常解に微小な摂動を加えて時間積分したところ、第9図に示すような非周期解が得られた。東西波数  $k=1$  のロスビー波が卓越し西進している。高波数成分も存在し、これらの相互作用の結果、不規則な変動が出現している。この基準解のまわりでの局所的リアプノフ安定性解析を行った。ロレンツインデックス  $\alpha(\phi(t_0=120), \tau)$  の評価時間  $\tau$  依存性を第10図に示す。定常解の不安定固有ベクトルの線形発達率と比べるとロレンツインデックスの増大率、 $\partial\alpha/\partial\tau$ 、(すなわち、アンサンブル平均した等方的ランダム誤差の成長率) はかなり小さいが、 $\tau$  を大きくするにつれてロレンツインデック



第10図 第9図のカオス解に対するロレンツインデックスの評価時間 $\tau$ 依存性。

スが指数的に増大している。これより、この非周期解がカオスであるといえる。小さな評価時間 $\tau$ に対する誤差成長率は後半の指数的成長率より大きいことに注意すべきである。

$\tau=3$  および6での1番目の局所的リアプノフベクトル  $f_1$  と誤差楕円体の長軸  $e_1$  の実空間におけるパター



第11図 基準解  $\phi(t_0=120)$  に対する1番目の局所的リアプノフベクトル(左側)と誤差楕円体の長軸(右側)の空間パターン。上段から  $\tau=3, 6$ 。長軸の空間パターンの下に書かれた数字は長軸の長さを示す。

ンを第11図に示す。小さな評価時間 ( $\tau=3$ ) では、この局所的リアプノフベクトルは、実空間で見ると東西に伸びた構造をもっており、基準解の合流部分の1つ(第9図の  $x \sim 1, y \sim 0$  付近)で大きな振幅を持つ。これが  $\tau=3$  後には誤差楕円体の長軸となり(実空間パターンは第11図右)、図左の初期誤差が基準解の「移流」効果で変形されたと考えることができる。この時刻では、誤差は限られた領域でのみ大きな振幅を持っている。評価時間が長くなると、 $f_1$  の実空間パターンはモデルの分解能程度まで細かな構造となり、 $\zeta_1$  のパターンは、振幅の大きな領域が全体に広がっている。

#### 4.3 局所的リアプノフ解析のまとめ

大気の子測可能性問題への応用を念頭において、これまで行ってきた局所的リアプノフ解析をまとめると次のようになる：

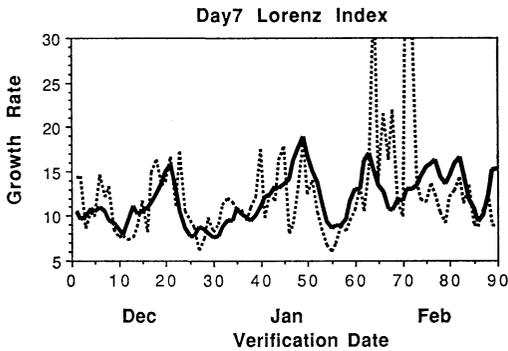
(1) 局所的リアプノフ指数は等方的ランダム初期誤差の成長率を与える。また、ロレンツインデックスの増大率は、等方的ランダム誤差の成長率のアンサンブル平

均である。これらは元の方程式系を線形化して得られた指標であるので、短い評価時間に対して有効である。

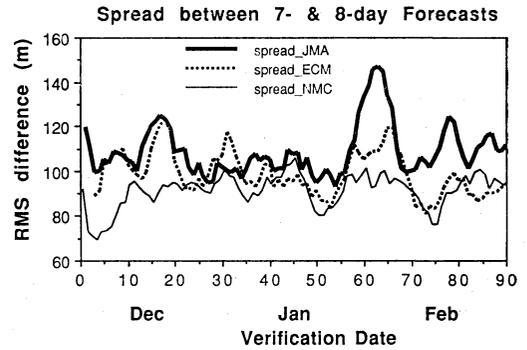
(2) ロレンツインデックスの大きさは線形安定な場合を除いて評価時間とともに増大し、その増大の様子は基準解に依存する。つまり、誤差成長の様子は流れの状態によって異なっている。しかし、基準解がどのような状態の時に誤差成長率が大きくなるのか、両者の一般的な関係はまだ明らかになっていない。

(3) 評価時間が短い場合、最大発達した誤差楕円体の主軸は実空間の限られた領域で大きな振幅を持つので、ランダム初期誤差がどこで大きくなるかという情報を与える。それが大きく発達する領域は、基準解の流れ場のある特徴的な場所、合流部分である。

(4) 系統的初期誤差や非等方的ランダム初期誤差が存在する場合、最大発達する局所的リアプノフベクトルへの射影成分の大小によって、これらの初期誤差の成長率が変動する。射影成分が大きい時に成長率も大きい。



第12図 気象庁モデルの解析値（実線）および予報値（破線）を基準解として、北半球パロトロピックモデルを用いて見積もったロレンツインデックス。解析期間は第1図と同じ。評価期間は $\tau=7$ 日。移動平均は行っていない。



第13図 ある検証日（横軸）に対する7日予報と8日予報の差のRMS。北半球（ $20^{\circ}\text{N}$ 以北）500 mb 等圧面高度場の予報値をもとに計算し5日移動平均を行っている。太線は気象庁、破線はECMWF、細線はNMCの予報モデルの結果。

## 5. 数値予報への応用

現業の数値予報モデルにおける予測可能性問題、とくに、1週間程度の評価時間に対する予測可能性問題に対して、局所的リアプノフ解析がどう使えるか、その可能性を考えてみよう。

現在使われている数値予報モデルは $10^8$ 変数以上の巨大なシステムであるので、ここで用いた手法がそのまま使えるわけではない。今日の最先端のコンピュータ環境でも $n$ が $10^8$ オーダーの系を解析するのが限界であろう。しかし、そのまま使うべきかどうかの検討も必要である。なぜならば、そのような系では、小さな空間規模成分が大きな線形誤差成長率をもつが、実際には短い時間内に「飽和」してしまふと考えられるからである。

これに代わる方法の一つとして随伴方程式を用いる方法がある。Lacarra and Talagrand (1988) は、客観解析法の一つである随伴 (adjoint) 法 (例えば、楠1990) を応用して最大の局所的リアプノフ数とベクトルを求めることを提案し、 $64 \times 64$ 格子点の浅水モデルを用いてその実例を示した。Houtekamer (1991) は、やはり簡単なモデルを用いて、50組の局所的リアプノフ数とベクトルを求めるには元方程式と随伴方程式を150回ずつ時間積分すれば良いことを示した。複雑な数値予報モデルで随伴方程式を求めることは容易でないが、この方法を用いると巨大なシステムでも局所的リアプノフ解析が可能である。ECMWF や NMC では、すでに、客観解析や予報誤差予測のために数値予報モデルの随伴コードの

作成が進み、実用化の実験を行っている。

もう一つ別の方法として、基準解は数値予報モデルで求め局所的リアプノフ解析は簡単なモデルで行う方法がある。Kimoto *et al.* (1992) は、北半球非発散パロトロピックモデル (T 21 波数切断で231変数) で局所的線形方程式を構成し、その基準解として予報モデルの300 mb 流線関数を用いた。2節で示した冬期期間について得られたロレンツインデックスの変動を第12図に示す。評価時間は7日としている。第2図と比べると、12月20日頃や1月末など予報誤差が大きい時にロレンツインデックスも大きくなっているが、余り対応の良くない期間もある。とくに、実際の子報誤差予測にこのロレンツインデックスを使うとすれば、予報値を基準解としなければならないが、こちらの変動はさらにノイズが目立っている (破線)。将来に期待を持たせる結果ではあるが、いずれにしても、実用までにはまだまだ検討が必要である。

局所的リアプノフ安定性解析はあくまで初期値誤差の線形成長の理論である。誤差が大きくなると非線形性が重要となり、ランダム誤差は楕円でなくなる (第4図)。線形の議論が有効な期間は初期値誤差の大きさと系の不安定度に依存している。実際の数値予報ではそれが1日なのか1週間なのかをまず見積もらなければならないが、この中間であることは間違いないであろう。初期値誤差の非線形成長を把握するには、多くの似たような初期値から時間積分を行い、それらのアンサンブル平均を

とり、個々の予報の広がり(ズレ)を見ることになる。これまで、モンテカルロ法(Leith 1974) やずらし平均法(Hoffman and Kalnay 1983) などいくつかのアンサンブル予報方法が提案されてきた。

初期値誤差の非線形成長期には、アンサンブル予報における個々の予報の広がり予報誤差を予測する指標の一つとなる(Dalcher, Kalnay and Hoffman 1988; Palmer and Tibaldi 1988)。第13図は、ずらし平均法をもとにした予報の広がり(ある検証日に対する7日予報と8日予報の広がり)の変動を示す。気象庁、ECMWF、NMCの予報結果ともに、予報の広がりには似たような時間変動をしている。とくに、予報誤差が大きくなった1月末から2月にかけて、どの予報結果も大きな広がりとなっていることに注意すべきである。ここで示した結果は三機関の予報結果を独立に解析したものである。しかし、最近では、データネットワークの発達により、中期予報結果そのものも短時間内に交換できるようになっている。三機関の予報を一つのアンサンブル予報と考えて、それらの平均や広がりを求めることは試みる価値があるだろう。

計算機の性能がさらに向上すると、中期予報がアンサンブル予報となることは間違いない。そのとき、個々の初期値をどう与えるかが大きな問題となる。とくに、予報数が限られる場合には、どのように「ランダム」な摂動を与えればよいか問題である。最近、ECMWFのティム・パーマーのグループは、局所的リアプノフ解析と組み合わせた、適切な初期値の与え方を提案した(Molteni, Mureau and Palmer 1991; Mureau, Molteni and Palmer 1992)。すなわち、局所的リアプノフベクトルを求め、指数の大きい順に何組かを初期値の摂動として、アンサンブル予報を行うという方法である。非線形計算なので、当然ながら正負両方の符合を与えてそれぞれを時間発展させる。また、検証例が多くないので即断できないが、従来のアンサンブル予報に比べて大きな改良となっており、有効な延長予報の可能性を示す結果である。

## 6. おわりに

我々は、ここで紹介した一連の研究のなかで、大気予報可能性問題の視点から局所的リアプノフ安定性の概念を整理し、簡単な順圧大気モデルを用いてその有効性を検討した。また、現業の数値予報モデルを用いて予報誤差の予測に応用できるか可能性を検討した。現業への応

用はまだまだ実験的な段階であるが、予報誤差予測ができるようになれば中期予報の情報価値は飛躍的に増大するので、今後もこのような研究を進展させていきたい。

この研究を通して、大気運動のカオス的な性格をことさら強調するのが我々の目的ではない。しかし、少数自由度系のカオスを例題として発展してきた非線形力学の概念や手法は、大気運動の混沌の中から何がしかの秩序を取り出し、それを理解する手がかりとして役立つものと信じている。

この解説は、ロレンツ博士の京都賞受賞記念ワークショップでの講演をもとにまとめたものである。本研究を行うにあたり、部分的に気候変動国際協同研究計画(WCRP)研究費の補助を受けた。

## 参考文献

- Dalcher, A., E. Kalnay, and R. Hoffman, 1988: Medium range lagged average forecasts. *Mon. Wea. Rev.*, **116**, 402-416.
- Farrell, B.F., 1988: Optimal excitation of neutral Rossby waves. *J. Atmos. Sci.*, **45**, 163-172.
- , 1989: Optimal excitation of baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 1193-1206.
- , 1990: Small error dynamics and the predictability of atmospheric flows. *J. Atmos. Sci.*, **47**, 2409-2416.
- Chil, M., R. Benzi, and G. Parisi (Eds.), 1985: Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics. North-Holland Physics Publishing, 449 pp.
- Gleick, J., 1987: Chaos: making a new science. Viking Penguin Inc., 352 pp. 「カオス」(大貫昌子訳), 新潮文庫, 536 pp.
- Goldhirsch, I., P.-L. Sulem, and S.A. Orszag, 1987: Stability and Lyapunov stability of dynamical systems: a differential approach and a numerical method. *Physica*, **27D**, 311-337.
- Hoffman, R.N., and E. Kalnay, 1983: Lagged average forecasting, an alternative to Monte Carlo forecasting. *Tellus*, **35A**, 100-118.
- Houtekamer, P.L., 1991: Variation of the predictability in a low-order spectral model of the atmospheric circulation. *Tellus*, **43A**, 177-190.
- Kimoto, M., H. Mukougawa, and S. Yoden, 1992: Medium-range forecast skill variation and blocking transition: A case study. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 1616-1627.
- 木本昌秀, 1988: 対流圏長周期変動と力学的延長予報の可能性. 気候変動国際協同研究計画(WCRP)第2回シンポジウム報告集, 104-109.
- , 1992: 天気予報とカオス. 数理科学,

- 348, 59-63.
- 楠 昌司, 1990: 気象データと客観解析 (第5章変分法). 数値予報課報告・別冊, 36, 109-131.
- Lacarra, J.-F., and O. Talagrand, 1988: Short-range evolution of small perturbations in a barotropic model. *Tellus*, 40A, 81-95.
- Legras, B., and M. Ghil, 1985: Persistent anomalies, blocking and variations in atmospheric predictability. *J. Atmos. Sci.*, 42, 433-471.
- Leith, C.E., 1974: Theoretical skill of Monte Carlo forecasts. *Mon. Wea. Rev.*, 102, 409-418.
- Lorenz, E.N., 1963: Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20, 130-141.
- , 1965: A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model. *Tellus*, 17, 321-333.
- Molteni, F., R. Mureau, and T.N. Palmer, 1991: Atmospheric instability and ensemble weather prediction. ECMWF Technical Memorandum No. 177, 8 pp.
- , and S. Tibaldi, 1990: Regimes in the wintertime circulation over northern extratropics. II; Consequences for dynamical predictability. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 116, 1263-1288.
- Mukougawa, H., 1988: A dynamical model of "quasi-stationary" states in large-scale atmospheric motions. *J. Atmos. Sci.*, 45, 2868-2888.
- , M. Kimoto, and S. Yoden, 1991: A relationship between local error growth and quasi-stationary states: case study in the Lorenz system. *J. Atmos. Sci.*, 48, 1231-1237.
- 向川 均, 1989: 大気の予測可能性とカオス—予報誤差の予測—. 東管技術ニュース, 95, 2-13.
- ・木本昌秀・余田成男, 1991: 予報誤差の変動と準定常状態. *グロスベッター*, 29-2, 1-19.
- Mureau, R., F. Molteni, and T.N. Palmer, 1992: Ensemble prediction using dynamically-conditioned perturbations. Submitted to *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*
- 野村真佐子, 1991: 予報誤差の時間的・空間的変動に関する理論的研究. 京都大学大学院理学研究科修士論文, 56 pp.
- ・余田成男, 1990: 順圧不安定波の時間発展にともなう誤差成長の変動. 気候変動国際協同研究計画 (WCRP) 第4回 シンポジウム報告集, 93-97.
- Oseledec, V.I., 1968: A multiplicative ergodic theorem. Ljapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Trans. Moscow Math Soc.*, 19, 197-231.
- Palmer, T.N., 1988: Medium and extended range predictability and stability of the Pacific/North American mode. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 114, 691-713.
- , and S. Tibaldi, 1988: On the prediction of forecast skill. *Mon. Wea. Rev.*, 116, 2453-2480.
- Pomeau, Y., and P. Manneville, 1980: Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Commun. Math. Phys.*, 74, 189-197.
- 佐野雅己, 1987: カオスの構造とフラクタル. 「フラクタル科学」(高安秀樹 編著), 朝倉書店, 58-116.
- 戸田盛和, 1991: カオス—混沌のなかの法則. *NEW SCIENCE AGE* 46, 岩波書店, 140 pp.
- 津田一郎, 1992: 第7回京都賞受賞記念ワークショップ「天気予報からカオスへ」. *数学セミナー*, 31-3, 83-85.
- Yoden, S., 1985: Multiple stable States of quasi-geostrophic barotropic flow over sinusoidal topography. *J. Met. Soc. Japan*, 63, 1031-1045.
- , and M. Nomura, 1992: Finite-time Lyapunov stability analysis and its application to atmospheric predictability. *J. Atmos. Sci.*, in press.
- 余田成男, 1989: 大気循環の変動とその予測—天気予報の当たり外れを学問する—. 第11回関西支部夏季大学テキスト, 1-14.
- , 1992: 大気現象の予測可能性—簡単な大気モデルにおける局所的リアプノフ安定性解析—. *京大数理研講義録*, 782, 262-273.
- ・野村真佐子・木本昌秀・向川 均, 1990: 予報誤差の変動と大気循環の準定常状態. 気候変動国際協同研究計画 (WCRP) 第4回シンポジウム報告集, 87-92.