

大気乱流へのウェーブレット解析の応用*

—1992年度堀内基金奨励賞受賞記念講演—

山田 道夫**

1. はじめに

この度は、日本気象学会堀内基金奨励賞を頂きました。有難うございました。私がこの賞の対象となった研究を始めたのは、数年前、京都大学防災研究所に移り気象学を一から勉強し始めた頃でした。研究所の屋上で観測した大気乱流のエネルギースペクトルが、見事に $-5/3$ 乗則を示すことに感動し、生のデータに含まれる物理の豊かさを想像してわくわくしたことを思い出します。私はそれまで直接には現実のデータを扱わない仕事をしていました。現実から距離をおいたモデルやデータはある意味では理想的なものなのですが、結果に理解しがたい部分があるといつも、これはモデルや数値スキームの不完全さなど人為的な原因によるもので自然とは無関係なものではなかろうか、といった不安を感じていました。そのためか、初めての野外観測から得たデータを見たとき、とにかく測定器の能力の範囲内ではデータは「事実」であり、理解しがたい部分も何らかの物理を反映していることに間違いはない、という安心がありました。あとはこのデータから意味のある情報を取り出すことだけを考えれば良い、という状況は初めての経験でした。そこで、自分の得た一本の時系列データを徹底的に調べたいと思い、始めたのがウェーブレット解析です。やってみると奥が深く初めに望んだような徹底さからはほど遠い状況ですが、新しい解析方法がデータに新しい魅力を与える様子には幾分か触れることができ、今後も引き続きデータ解析の仕事をしてゆきたいと思っています。今回、このような研究を気象学会に認知していただいたことは、年来、気象学に片思いしていたものにとって大変うれしく感謝の思いにたえません。この研究に当たっては、多くの方々から御指導と御援助をいただきました。この場をお借りして、多大な御支援をいた

いた京都大学の気象学・流体力学関係のスタッフや学生の方々、とりわけ大気境界層の分野に導いて下さった光田寧教授（京大防災研）および共同研究を通して数多くの議論を頂いた大木谷耕司氏（京大数理研）に深く感謝致したいと思います。

2. フーリエ解析とウェーブレット解析

データ解析の方法としてフーリエ解析はほかの何にも代え難い手法です。与えられた時系列から周期成分を検出したり、またべき則などスペクトルの形状を議論したりするときには欠くことのできない道具で、データを得たときにはなにはともあれ FFT にかけて様子を見る、というのが常識であろうと思います。フーリエ解析がこのように便利なのにはもちろんわけがあります。まず第一に $\exp(i\omega t)$ という関数が周期関数であること、第二にこの関数は ω の値の異なるもの同士が互いに相似になっていること、が重要です。第一の点は周期成分への分解の基礎を与えています。第二の点は、自己相似的な時系列、つまり慣性小領域における乱流のように自分自身特徴的な長さや時間を持っていない現象に対して、スペクトルがべき形になるための条件です。ふだん使っているときにはあまり意識することはありませんが、このような2重の性質をもっていることがフーリエ解析の汎用性の基礎になっています。しかしこのフーリエ変換も局所的な事象の解析にはあまり適していません。極端な場合、目で見れば明らかに異なる事象が異なる時刻に生起していても、フーリエスペクトルではそのような事象の生起順序の情報は失われています。フーリエ変換の場合、時刻に関する情報はフーリエ像の位相部分にのみ含まれているからです。といって、この位相部分を丁寧に解析することは簡単ではありません。やはりスペクトルそのものが時刻情報を担っているようなものでないと、使いにくいのではないかと思います。フーリエ変換の場合、スペクトルは $\exp(i\omega t)$ の振幅と関連して

* An Application of Wavelet Analysis to Atmospheric Turbulence.

** Michio Yamada, 東京大学大学院数理科学研究科.

いますが、この関数の周期性のために、スペクトル情報を用いて事象の生起時刻を特定することが難しくなっているわけです。

しかし、もちろんこんなことはあらためて言うまでもないことで、ずっと昔から工学的に必要な場合などでは、ウィンドウ関数と称する関数を用いてあらかじめデータを局所化してからフーリエ解析を施すといったことが行われてきました。ウィンドウ関数の選び方にくらか注意する必要がありますが、実際の場面でこの方法は非常に役に立っています。振動成分の季節変化などはまさにその例です。周波数解析の局所化としては、今でも結局この方法が良いのではないかと思います。

しかしフーリエ解析の別の側面であるデータの相似性構造の解析、つまりスペクトルのべき則に関連した解析ではウィンドウ関数を用いる方法はあまり良くありません。周波数に無関係に一定の大きさのウィンドウを用いるため、もともと $\exp(i\omega t)$ が持っていた相似性をこわしているからです。一定幅のウィンドウ関数を使うことは、高い周波数領域において相対的に高い周波数分解能を獲得（周波数の絶対精度が一定）することになりますが、反面、時刻に関する分解能は周波数によらず一定（時刻の絶対精度が一定）です。これは周波数解析を指向したウィンドウ関数の選び方といえるでしょう。これに対して、相似性解析、つまりべき則関連の解析では、むしろウィンドウの幅を周波数に反比例させる形で（同じことですが、周期に比例させる形で）選ぶ方が自然です。このように選ぶことで周波数に関しては相対精度が一定になりますが、データのもつ相似構造が素直な形で展開係数に反映することになりますし、もっと大切なことは、高い周波数成分ほど時間軸上の局所化が強くなり時刻の分解能が向上するという利点が得られます。高周波成分を見ることでいくらかでも時刻の分解能を上げることができるわけです。この可変幅のウィンドウのアイデアは、実は、ウェーブレット変換そのもののアイデアです。標語的に言えば、フーリエ解析は「周期性+相似性」を扱う道具であり、ウェーブレット変換は「局所性+相似性」を扱う道具なのです*1。

3. 時間-周波数解析

ウェーブレットそのものに触れる前に、別の面からウェーブレット解析の性格を述べてみたいと思います。時系列 $f(t)$ とそのフーリエ変換 $\hat{f}(\omega)$ は数学的

に見れば同じものの異なる表現にすぎません。時系列が時間軸上に表現されたデータであるとすれば、そのフーリエ変換は周波数軸上でのデータの表現と言えます。しかしこれだけではしばしば不十分で、なんらかの意味で、ある時刻におけるある周波数の成分、といったものが望まれます。そこで例えばウィンドウと共にフーリエ変換を用いることでデータを時間-周波数の2次元面に表現する方法が採用されます。ウェーブレット変換も時間-周波数の2次元面にデータを表現する方法の一つです。

ところで、時系列もそのフーリエ変換も関数形には（なんらかの有界性以外には）特に制限はありませんので、任意の関数を選ぶことができます。例えば、周波数フィルターをかける、といった処理が可能になるのは、処理されたフーリエ像に対応する時系列の存在が保証されているからです。時系列やフーリエ変換ではこれは当たり前のように思えますが、時間-周波数面でデータを表現し処理しようとするときには実は大きな問題になってきます。そもそも時系列データ $f(t)$ は時間軸上の関数、つまり定義域が1次元の関数です。このデータを、例えばウィンドウ付きのフーリエ変換を用いて時間-周波数面の上の関数で表現する場合、定義域は2次元になります。大変荒っぽく言えば、1次元の上のものを2次元上に表現するわけですからどこかに重複が（文字通りの意味ではありませんが）生じます。このため2次元面での関数は任意のものではありえず、ある特別な条件を満たすもののみが許されることとなります。そのため、例えば時間-周波数面上でフィルターをかけてみても、この結果得られる関数に対応する時系列の存在が必ずしも保証されません。データを加工する場合にはいつもこのようなことに注意して処理しなければならないわけで、実際に実行するには大変難しい処理になります。

このような状況は直交ウェーブレットによって初めて、大幅に改善されました。時系列データの直交ウェーブレットによる表現は、互いに完全に独立な展開係数によって与えられます。この展開係数は全く自由な値

*1 残る一対である「周期性+局所性」を扱う使いやすしい道具があるかどうか私は知りません。不確定性関係との折り合いのつけかたが難しいとも思います。しかしこのような道具は渴望されています。私がウェーブレットの勉強を始めたきっかけも実はこのような性格の道具としてシアーによる波の過剰反射の問題に使いたかったからです。残念ながらこの問題は残ったままですが。

を取れますので、展開係数にたいしてどのような操作が加えられようとも、必ず対応する時系列の存在が保証されています。直交ウェーブレットが、初めて、時間-周波数の2次元面での自由なデータ操作を可能にしたのです*2。あとでご紹介する一つの例は、このような直交ウェーブレットの利点を用いて、フーリエ解析では困難なデータ処理を試みたものです。

4. ウェーブレット：定義と性質

応用例をお話する前にウェーブレットの性質を簡単にまとめておきたいと思います。数学的な詳細については昨年あたりから次々と出版されている教科書(Chui, 1992; Daubechies, 1992; Meyer, 1990)を見ていただくとして、ここではおおまかな説明にとどめます。

ウェーブレット解析は80年代の初めフランスの石油探査技術者によってアイデアが提出され、その後数学者によって急速に体系づけられました。ウェーブレット変換には、大きく分けて連続ウェーブレット変換(continuous wavelet transform)と離散ウェーブレット変換(discrete wavelet transform)の2種類があります。フーリエ変換とフーリエ級数に似ていますが基本的に異なる面もあります。しかしいずれにせよ、与えられたデータ(関数)を何らかの基底関数を用いて表現することに変わりはありません。フーリエ解析の場合はこの基底関数はいつも完全直交系を成していました。しかしウェーブレット解析の場合は、基底関数は直交しているとは限りませんし、そればかりでなく、一次従属な場合さえあります。事実、連続ウェーブレット変換は一次従属な(従って一般には直交しない)基底系による展開です(Grossmann *et al.*, 1985a, 1985b)。一方、離散ウェーブレット変換では、基底が完全直交系をなす場合となさない場合があり、前者の場合を特に直交ウェーブレット変換(orthonormal wavelet transform)あるいは直交ウェーブレット展開(orthonormal wavelet expansion)と呼んだりします。

定義が大変おそくなってしまいましたが、ウェーブレットとは、何か一つ関数 $\psi(t)$ を選び(これを analyzing wavelet あるいは mother wavelet と呼びます。通常 mother wavelet $\psi(t)$ は積分がゼロになる関数の中から選ばれます)、これを用いて作られた2-パラ

メーターの関数

$$\psi^{(a,b)}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a(\neq 0), b \in \mathbf{R}$$

のことで、普通は $\psi(t)$ として十分局所的な関数を選びます。2つのパラメーターはそれぞれ、 a が周波数の逆数(周期)、 b が時刻に対応していることに注意してください。要するにウェーブレットとは、一つの関数から相似変換と平行移動によって作られる一群の関数のことです。

フーリエ変換が $\exp(i\omega t)$ と $f(t)$ の内積で与えられるのと同じく、関数 $f(t)$ の連続ウェーブレット変換 $T(a, b)$ は、ウェーブレット $\psi^{(a,b)}(t)$ と関数 $f(t)$ の内積として定義されます(Combes, 1989; Meyer, 1990; Meyer, 1991; Daubechies, 1992; Chui, 1992)。このように定義することで、連続ウェーブレット変換 $T(a, b)$ は「時刻 b における「周波数」 $1/a$ の成分」に対応していると解釈されます。しかしこの場合、 $\{\psi^{(a,b)}\}$ が一次従属な基底系であるため、先にお話ししましたように、 $T(a, b)$ の任意関数にはならないという事情があり、データ操作の点で不満が残ります*3。そこで、ウェーブレットを離散化して完全直交系にすることができればこのような不便は解消するわけです。

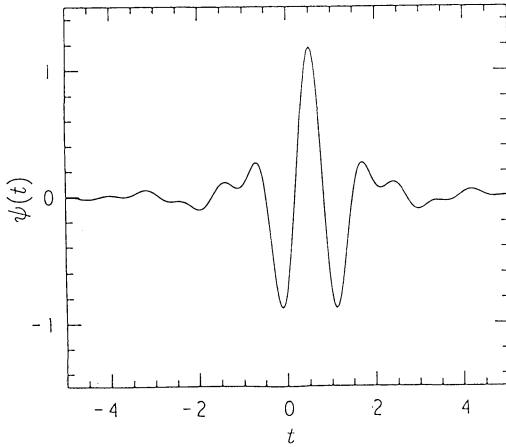
完全直交ウェーブレットを与える mother wavelet は、80年代の中頃にフランスの数学者によって発見されました。これは発見者の名をとって Meyer のウェーブレット [8] と呼ばれています。現在ではその他にもいくつかの直交ウェーブレットが開発され、またある程度統一的に議論する数学的な枠組みも整えられています(Meyer, 1990; Daubechies, 1992; Daubechies, 1988)。このような直交ウェーブレットは普通 mother wavelet から

$$\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j(t - \frac{k}{2^j})), \quad j, k \text{ は整数}$$

のように平行移動と相似変換によってつくられます。ここではこの関数系の数学には立ち入りませんが、 j が周波数、 k が時刻のパラメーターになっていて、展開係数 $\alpha_{j,k}$ が時刻 $\sim k/2^j$ における周波数 $\sim 2^j$ の成分の大きさを表していることだけを注意しておきます。以下の応用例では、Meyer のウェーブレット(第1図)を用いることにします。このウェーブレットでは $\psi(t)$ が有限範囲の周波数成分しか含まないという性

*2 連続ウェーブレット変換にはこのようなメリットはありません。

*3 しかし、ここではふれませんが、別の様々な利点もあります。



第1図 Meyer のウェーブレット

質があります。詳しくは述べませんが、このような性質は数値計算に役立ちますし、また次のような利点もあります。まずデータ $f(t)$ を Meyer の直交ウェーブレットで展開します。

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$

ここで $\alpha_{j,k}$ は展開係数です。さて、いまデータ $f(t)$ のフーリエスペクトル $E(\omega)$ がべき形

$$E(\omega) \sim \omega^{-p}$$

であったとすると、ウェーブレット展開係数から作った次の量（ここではウェーブレットスペクトルとよぶことにします）

$$E_j \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_{j,k}|^2$$

についてもやはりべき則

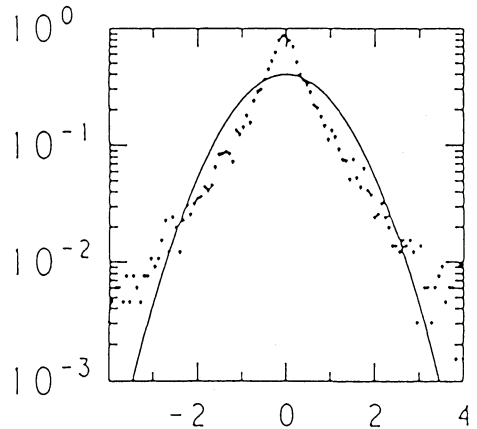
$$E_j \sim 2^{-(p-1)j}$$

の関係があることを適当な条件のもとで示すことができます。この性質は従来のフーリエ解析と直交ウェーブレット解析の接点になっていることに注意してください。またこの関係が、エネルギースペクトルの値そのものに関するものではなく、べき指数という「相似的構造」を特徴づけるものであることにも注意してください。これは、ウェーブレット解析がデータの相似性の解析にこそ適していることの一つのあらわれです。

5. 大気乱流の速度変動

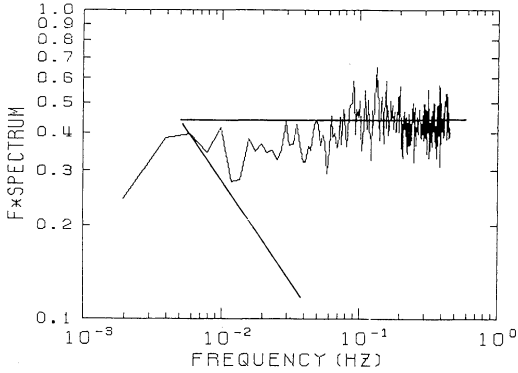
気象学において、大気乱流は、大気境界層における様々な量のフラックスの大きさを定め、大気運動全体

$J=13.$

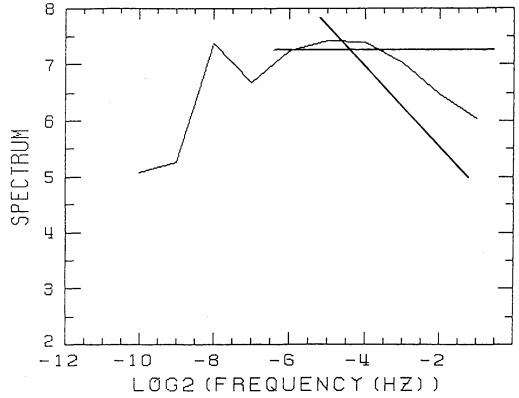


第2図 乱流速度の時系列を直交ウェーブレット展開したときの展開係数 $\alpha_{j,k}$ ($j=13$) の分布 (平均=0, 分散=1に規格化). 正規分布 (実線) からずれている。

の下方境界条件を決定する重要な役目を持っています。同時に大気乱流は、乱流運動そのものの研究においても欠くことのできないデータ源となっています。乱流理論の最も重要な課題の一つは慣性小領域における速度変動の統計的性質を決定することですが、強い非線形性を伴う乱流運動を解析的に扱うことは非常に難しく、現状では、実験や観測をもとにした現象論的なアプローチが多く試みられています。例えば、現実の乱流は、いわゆる Kolmogorov のスケージング則から微妙にずれていることが知られており、そのずれの性格や程度が盛んに研究されています。このような研究の基礎となるデータは広い慣性小領域を持つことが望ましく、この点に限って言えば、数値実験より風洞実験の方が、また、風洞実験より大気乱流観測の方が優れたデータとなります。このような基礎研究に直交ウェーブレットを応用した例を第2図に示します (Yamada *et al.*, 1990, 1991a, 1991b)。これは大気乱流データを直交ウェーブレット変換し、ある '周波数 (j)' におけるウェーブレット係数の分布 (分散を1に規格化) を調べたものです。この図では縦軸が対数で目盛られており、実線が正規分布をしめています。一目見てわかるように、ウェーブレット係数の分布は正規分布からかなりずれています。中心付近と裾の端のほうで正規分布より大きな頻度を示しています。先に述べたことから想像されるように、ある周波数 j のウェーブレット展開係数の分布はその周波数成分の時



第3図 -1乗則に従う乱流速度のフーリエスペクトル ($\omega E(\omega)$). 2本の直線はそれぞれ $E(\omega) \sim \omega^{-1}$, $\omega^{-5/3}$ を示す.



第4図 「混合」状態の乱流速度のウェーブレットスペクトル (E). 2本の直線はそれぞれ $E(\omega) \sim \omega^{-1}$, $\omega^{-5/3}$ に対応.

間軸上における分布の様子を表しています. 従ってこの図は, 周波数 j に対応する成分の分布が正規分布からかなりの程度はずれていることを示しています. 実はこの傾向は周波数が高くなるほど顕著になることがわかっており, もっと詳しくどのように正規分布からはずれているのか, といった問題は乱流の力学の重要な問題の一つです. このような問題において, 各周波数成分毎の分布の様子やそれらの間の関係をデータ解析において研究しようとするとき, 互いに独立性が保証されていてしかももとの時系列と過不足のない情報を与える直交ウェーブレット展開の展開係数は大変使いやすい道具となります.

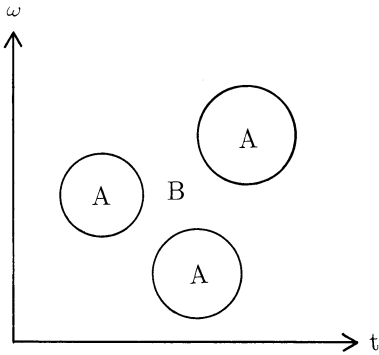
さて, このような乱流物理の研究とは異なり, もっと現実的な大気乱流データの処理に応用した例にも触れたいと思います. 先に述べたように, ウェーブレットは時系列を時間-周波数の2次元面に展開する道具です. 以下でお話しするのは, このような特徴を生かして, いままで困難だった種類の解析が可能になった例です (山田他, 1990).

乱流が理想的な状態, つまりいわゆる一様等方とよばれる状態で, エネルギースペクトルに $-5/3$ 乗則が見えることは良く知られています. 一方, 現実の境界層乱流ではスペクトルは必ずしもこの法則に従いません. それは地表面の存在のために乱流が必ずしも一様等方ではなく, むしろ, 平均流の強いシア-のなかにあるからです. このような境界の効果はエネルギースペクトルの形を大きく変形します. 多くの実験やいくつかの大気境界層の観測から, そのスペクトル形は -1 乗であることが知られています.

実際に, このようなスペクトル形が観測された例を

第3図に示します. これは海に面した谷状の地形のところにかかる高い橋の上で観測された風速のスペクトルですが, かなりの強風時に -1 乗スペクトルが見えています. しかし, この原因は実は地面ではありません. この橋の上, 何ヶ所かで測定した結果によると, 平均風の水平シア-の大きな時に -1 乗スペクトルが現れ, 水平シア-の小さな時に $-5/3$ 乗スペクトルが現れることが分かりました. 実はこの測定を行った橋のすこし海側に崖があり, 海からの風がこの崖近くを通過して橋付近に吹き込むときには, 崖を境界として水平シア-を伴う境界層乱流となっているようです (樋口他, 1991). そのためこのシア-の強い時は境界の効果が大きく乱流は -1 乗スペクトルを示すと考えられます.

ここまでは, 手間はかかりますが, 普通のデータ処理で得られる結果です. そこでもう一歩踏み込んで, この橋の上で観測される一般のスペクトルがどのような形態を示すか, という点に注目します. 先に, 風速のスペクトルは, 強いシア-中では -1 乗, 弱いシア-中では $-5/3$ 乗, ということを言いましたが, 実はこのような典型的なスペクトルが見える場合は多くありません. 大抵は, スペクトルの形はどっちつかずで, そもそもべき則かどうかははっきりしません. 一例を第4図に示します. このようなスペクトルはどのように解釈すべきでしょうか. 他に多くの原因を考え出せないこともないのですが, ここでは, このどっちつかずのスペクトルは上の二つの典型的な場合がある割合で「混合」しているためである, と考えることにします. ここで「混合」ということばを括弧でくくったのはわけがあります. 普通, 2つの異なる時系列AとBが



第5図 「混合」状態の概念図。
時間一周波数の2次元面上で見たとき「混合」の様子がでてくる。時間軸や周波数軸への投影では分離が不可能であることに注意。

混合しているという、ある時間帯ではAが、別の時間帯ではBが、というように、時間帯毎に別々の時系列からなっているようなものをまず思い浮かべないでしょうか(少なくとも私の場合はそうでした)。実際にも、そうでないような「混合」は、一般的に言って、解析して意味のある結果を得ることが困難です。ところが、ここで考えている風速の時系列のスペクトルは、このような単純な混合としていろいろやってみても、スペクトルの形は解釈ができませんでした。これはこの時系列の状態が時間的にほぼ一様であることから納得できます。ある時間帯には平均風が崖を避けるように吹き、別の時間帯には崖の影響を強く受けながら吹く、というように時間帯を分割することができないのです。そこで「混合」の意味が問題になります。

先にウェーブレット解析は時間一周波数面での解析である、といいました。そこで、風速の時系列の「混合」とは、このような時間一周波数の2次元面における混合ではないか、と考えてみます。概念図を書けば第5図のようになります。この図の混合状態では、AとBは時間-周波数面でのみ分離が可能になっています。時間軸上や周波数軸上に射影したときには、AとBが全く区別できなくなることに注意してください。つまり、もとの時系列を生のまま扱っても、またフーリエ変換して周波数分解してみても、分離することはできません。

さて、時間-周波数面の位置は、ちょうど直交ウェーブレットによる展開の j と $k/2^j$ が座標になっていることに注意してください。つまり、ウェーブレット展開係数 $\alpha_{j,k}$ は時間-周波数面におけるある特定の位置

(正確にはその位置の付近の領域)の成分を表しているわけです。従って、AとBの分離は、とりもなおさず、ウェーブレット係数 $\alpha_{j,k}$ をAとBに対応する2つのグループに分離することを意味します。そこで結局重要な問題は、ウェーブレット係数をどのような基準で分離するか、ということになります。

このような基準は、一般的に通用するものがあるわけではなく、自分の目的に合わせてケースバイケースで考えるしかありません。今の場合、つぎのように考えることができます。ここでの作業仮説は、時系列が-1乗スペクトルを示す部分と-5/3乗スペクトルを示す部分の「混合」になっている、というものです。このふたつのべき指数の大小から、高周波数域では-1乗の部分がエネルギーの大半を占めると推測することができます。このことは、 $\alpha_{j,k}$ のグループ分けは、その成分の持つエネルギーの大小で判定してやればよいことを示唆します。そこで具体的には、つぎのような判定基準を採用することにします。

$$\alpha_{j,k} \in A \text{ if } |\alpha_{j,k}|^2 \geq CE_j^{(mean)}$$

$$\alpha_{j,k} \in B \text{ if } |\alpha_{j,k}|^2 < CE_j^{(mean)}$$

$$E_j^{(mean)} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N_j} |\alpha_{j,k}|^2}{N_j}}$$

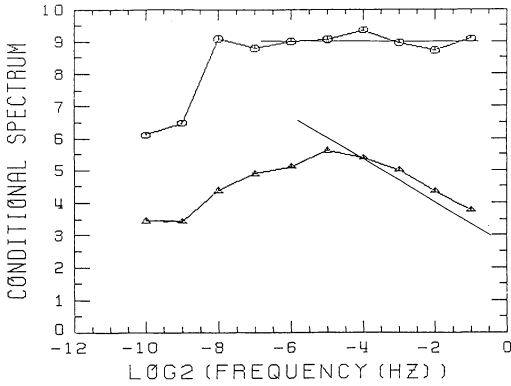
ここでA、Bはそれぞれ、-1乗則と-3/5乗則に対応するウェーブレット係数の集合です。またCは定数、 N_j は平均に用いたウェーブレット係数の個数です。各 j 毎に異なるしきい値 $E_j^{(mean)}$ を用いていることに注意して下さい。また定数Cはこちらが適当に選びます。いったいどのような値が良いのかをあらかじめ知る方法はなくトライアンドエラーで決めるしかありませんが、ここでの目的のためには、この値を多少変化させても結果が変わらないことが望めます。

さて、このようにしてとにかくウェーブレット係数を2つのグループA、Bに分離できました。これらは本当に-1、-5/3の2つのべきスペクトルに対応しているのでしょうか。これを見るために、A、Bそれぞれのグループに対して先に述べたウェーブレットスペクトル E_j に対応するものを作ります。

$$E_j^A = \frac{1}{\#A} \sum_{\{k | (j,k) \in A\}} |\alpha_{j,k}|^2$$

$$E_j^B = \frac{1}{\#B} \sum_{\{k | (j,k) \in B\}} |\alpha_{j,k}|^2$$

ここで $\#A$ 、 $\#B$ はそれぞれA、Bに属するウェーブレット係数の個数です。従って E_j^A 、 E_j^B はそれぞれA、



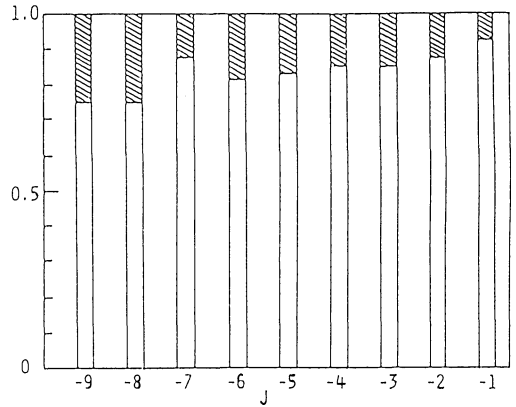
第6図 「混合」状態の乱流速度の時系列を直交ウェーブレット展開し、ウェーブレット係数を2つのグループAとBに分離後、それぞれのウェーブレット係数から作ったウェーブレットスペクトル密度。上がA、下がBに対応。それぞれ2本の直線の傾き ($E(\omega) \sim \omega^{-1}$ と $\omega^{-5/3}$ に対応) とよく一致している。

Bの部分で平均されたウェーブレットスペクトルということができます。

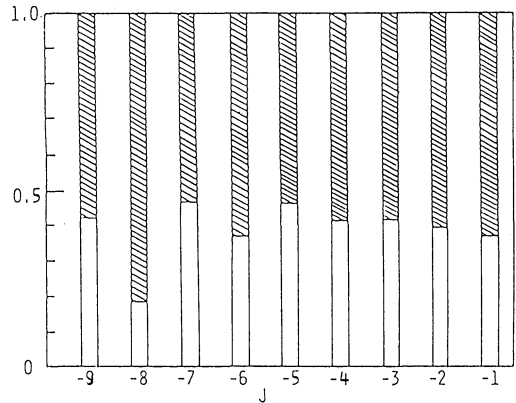
ここで定義した平均ウェーブレットスペクトルは、ウェーブレット解析らしい量といえると思います。いまグループAに注目したとすると、このグループのウェーブレット係数が代表している時系列の部分は、周波数 (j) の部分に限ってみても、ズタズタに切られた断片から成っています。いいかえれば、2つのグループへの分離の仕方は、概念的にこそ第5図のようなものですが、実際はもっと激しくズタズタに切り分けているのです。このような断片に切り分ける作業、さらにそれらから対応するスペクトルを作るという作業は、通常のフーリエ解析では困難なデータ操作ですが、ウェーブレット解析にとってはたいへん相性の良い作業なのです。

さて、このようにして得られた平均スペクトルの例を第6図に示します。 E_A^j と E_B^j の高周波数域でそれぞれ-1乗スペクトルと-5/3乗スペクトルが現れていることが分かります。先の作業仮設が支持されたわけです。

このようにして、一見不可解な時系列が実は2種類の「純粋な」現象の「混合」となっていることが分かりました。そこでこの「混合」におけるそれぞれの時間比を各周波数毎に調べたものが第7図です。どの周波数 j をとってみても、-1乗の時間と-5/3乗の時間の比はおおよそ 1:4です。つまり、全体の約2割の時間、



第7図 A (-1乗則) と B (-5/3乗則) が占める時間の割合を各 j 毎に示した。斜線部分がAの占める割合、白ヌキの部分がBの占める割合を示す。概ねAは1割から2割の時間を占めている。



第8図 A (-1乗則) と B (-5/3乗則) が占めるエネルギーの割合を各 j 毎に示した。斜線部分がAの占める割合、白ヌキの部分がBの占める割合を示す。概ねAは5割から6割のエネルギーを占めている。

-1乗スペクトルをもつ境界層乱流が現れていることとなります。それではエネルギー比ではどうでしょうか。第8図から、全体の半分以上のエネルギーが-1乗スペクトルの境界層乱流によってもたらされていることが分かります。つまり、時間的には約2割程度の現象がエネルギー的には半分以上の寄与をなしている、というようなことがウェーブレット解析を通じて明らかになるわけです。

6. おわりに

ここでお話した例はウェーブレット解析を風速の時系列に適用したものです。このような解析は、原理的にはあらゆる時系列に適用できますが、風速の場合、時系列に相似的構造が内在している、という利点があったことに注意しておく必要があると思います。この話のはじめの方で言いましたように、ウェーブレット解析は局所相似性の解析に向けた道具です。言い換えれば、スペクトルにべき則が見えるときにうまく機能する道具です。この点からすれば、大気乱流では、風速だけでなく、運動量フラックス、顕熱や潜熱のフラックス、またその他のフラックスなどは主要な応用の対象です。また、このような大気境界層に限らず、海洋や成層圏に見られるべき則現象などにも応用の範囲があると思われます。

今回、このようなウェーブレット解析の応用を気象学会に認知していただいたことは、私にとって大変うれしくまた勇気づけられることで感謝の念にたえません。私自身、これを機会にさらに新しいデータの解析も試みてみようと思っています。もしこのようなデータ解析に興味をお持ちの方がおられれば是非ご議論・ご教示いただきますようお願いいたします。御静聴ありがとうございました。

参 考 文 献

ウェーブレット関連の文献はここ数年爆発的に増加しており、重要なものだけを抜き出しても大きな文献表が必要になります。ここでは直接関係のあるものと主要な教科書だけに限りました。なお日本語による解説は、山口他(1990)、佐藤(1991)、などのほか雑誌の特集号(「数理科学」、1992年12月、サイエンス社)などがあります。

Chui C. K., 1992 : An introduction to wavelets, Academic Press.

Combes, J. M., A. Grossmann and Ph. Tchamitchian, 1989 : Wavelets, Springer.

Daubechies, I., 1988 : Orthonormal bases of compact-

ly supported wavelets, Comm. Pure Appl. Math., 41, 909-996.

Daubechies, I., 1992 : Ten lectures on wavelets, SIAM CBMS-61.

Grossmann, A., J. Morlet and T. Paul, 1985 : Transforms associated to square integrable group representations, I. General results, J. Math. Phys. 27, 2473-2479.

Grossmann, A. and J. Morlet, 1985 : Decomposition of functions into Wavelets of Constant Shape, and related transforms, in Mathematics+Physics (L. Streit ed.) vol. 1, World Scientific, 135-165.

樋口宗彦・山田道夫・光田寧, 1991 : 余部峡谷における局地的強風の性状について, 京都大学防災研究所年報, 34B-1, 13-18.

Meyer, Y., 1989 : Orthonormal wavelets, in *Wavelets* (J. M. Combes *et al.* eds.), Springer, 21-37.

Meyer, Y., 1990 : Ondelettes et Operateur, I : Ondelettes, Hermann, Paris.

Meyer, Y., 1991 : *Wavelets and Applications*, Masson-Springer.

佐藤雅昭, 1991 : ウェーブレット理論の数学的基礎, 第1部および第2部, 日本音響学会誌, 47-6, 405-415及び416-423.

Yamada, M. and Ohkitani, K., 1990 : Orthonormal wavelet expansion and its application to turbulence. Prog. Theor. Phys., 83, 819-823.

Yamada, M. and Ohkitani, K., 1991 : Orthonormal wavelet analysis of turbulence, Fluid Dyn. Res., 8, 101-115.

Yamada, M. and Ohkitani, K., 1991 : An identification of energy cascade in turbulence by orthonormal wavelet analysis, Prog. Theor. Phys., 86, 799-815.

山田道夫・樋口宗彦・林泰一・光田寧, 1990 : 強風のウェーブレット解析, 京都大学防災研究所年報, 33B-1, 285-295.

山口昌哉・山田道夫, 1990 : ウェーブレット解析, 科学, 60, 398-405.