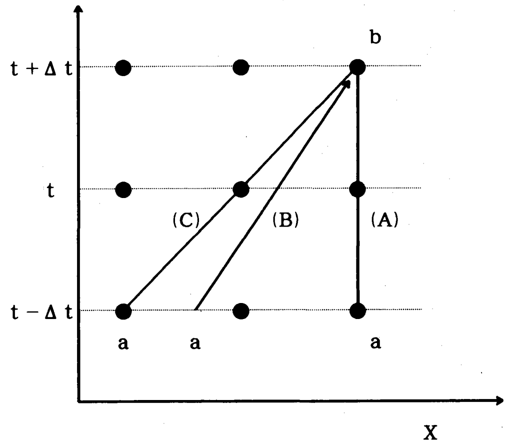
新用語解説(41)

セミラグランジュ法

セミラグランジュ法は，流体の運動方程式を数値的に解くためのオイラー法とラグランジュ法の折衷法である．

数値予報の現業では，予報モデルの精度と同様に計算速度も必要である．オイラー法による場合，安定に時間積分を行なうためには領域の最大風速が大きいほど積分の時間間隔を狭くとる必要があって，その為例えば1日の予報が終るまでのステップ数が増え，時間がかかることになる．また，分解能を高くするために，予報モデルの格子間隔を狭くすると，それに比例して時間積分の間隔を狭くする必要があって，計算時間が増える．しかし，セミラグランジュ法によれば，時間積分の間隔をオイラー法の数倍に伸ばしても計算の安定性が失われず，しかも計算精度がほとんど変わらないことが示されている．大気のように移流が卓越している場合に適した計算方法である．



第1図　(A)は，オイラー法の積分路，(B)はセミラグランジュ法)，(C)もセミラグランジュ法だが，内挿が不要．

方法

セミラグランジュ法では，追跡する流体素片を時間積分のステップごとに取り替えて行く．ラグランジュ法のように，時間積分中同じ素片を追いかけて行くことはしないで，新しい時刻 $t+\Delta t$ に格子点に到達する流体素片の，時刻 $t-\Delta t$ からの軌跡を計算する(Δt は時間積分の間隔)．つまりこの $2\Delta t$ の間だけラグランジュ法をとる．次の時間積分でまた同じことを繰り返すが，偶然でないかぎり，“格子点に達する素片”は前回のものとは別（集合として）になる．セミラグランジュ法は，追跡する素片が一定していないラグランジュ法である．

時間間隔 Δt が大きくなっても安定に積分できること

ラグランジュ法によれば時間間隔 Δt が大きくなっても安定であって，それで計算時間が短くできる．ただし，大気の場合これには但し書きがあって，『セミインプリシット法と併用すれば』，である．数値予報に用いられる予報方程式系では，エクスプリシット法の安定な時間積分の間隔は，重力波のために大変短いものになる．しかし，セミインプリシット法を用いるとエクスプリシット法の場合の数倍の時間間隔で積分ができる．そのとき上限を決めるのは重力波ではなく，領域の最大風速つまり移流の速さである．そこで更にラグランジュ法をあわせて使うとき，この移流の速さはもはや安定積分の上限を決めるものではなくなるというのである．

それでは無制限に Δt を大きくできるかというと，もちろんそうではない．流体素片の軌跡を求める計算スキームにも限界があり，また安定性だけで議論できる訳ではなく時間差分誤差との兼ね合いもある．

スキームの説明

Smolarkiewicz と Pudykiewicz［2］に従うと，オイラー法，セミラグランジュ法，その他のスキームの関係が大変明瞭になる．予報方程式を，$\partial\Psi/\partial t=-\boldsymbol{v}\nabla\Psi+R$ と書いて，ストークスの定理 $\Psi(b)-\Psi(a)=\int_C dt\,(\partial\Psi/\partial t)+dx\nabla\Psi$ に代入すると，

$$\Psi(b)=\Psi(a)+\int_{c}(dx-vdt)\nabla\Psi+\int_{c}dtR$$

となる．第1図の横軸は空間座標，縦軸は時間座標である．線積分の経路の取り方によっていろいろなスキームが出来る．図の（A）のように，t軸に平行にとると上式第2項は移流項でこれはオイラー法である．(B)のように，素片のトラジェクトリに沿ってとると，上の式の第2項がなくなる．その代償として，$\Psi(a)$ が格子点から外れるので，内挿計算が必要になる．これがセミラグランジュ法である（C）は，内挿の必要のないセミラグランジュ法で，その代わり移流項がある．

セミラグランジュ法を実行するには，各格子点（図のb点）を終点とするトラジェクトリの出発点aの座標を求めて，その点での予報変数の値を内挿によって求めることと，トラジェクトリに沿って，Rを積分することを実行すればよい．出発点を求めるには，トラジェクトリが直線（大円）であるとし，その上を素片が等速で移流すると見なす．その風速は，直線(大円)の中点での時刻tの値を用いる．

時刻に関して3点（$t+\Delta t,\ t,\ t-\Delta t$）を用いるスキームのほか，より効率の良い，真中の時刻を省略する 2-time-level scheme も提案されている．セミラグランジュ法のレビューは，参考文献［1］にあるので参照されたい．

参考文献

〔1〕A. Staniforth and J. Côté, 1991：Mon. Wea. Rev., **119**, 2206-2223.
〔2〕P. K. Smolarkiewicz and J. A. Pudykiewicz, 1992：J. Atmos. Sci., **49**, 2082-2096.

（気象庁数値予報課　田宮久一郎）