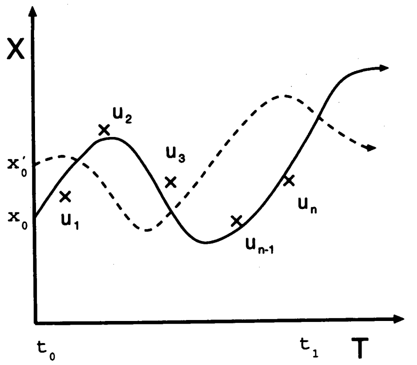
アジョイント法

数値予報の歴史がはじまって約半世紀，その間の予報モデルの進歩には目をみはるものがある．しかし，その初期値を与えるべき観測の方に目を転じれば，衛星等のリモートセンシング技術の発達により多種多様なデータが入手可能になっているものの，総合的にみた場合のデータ分布は，予報モデルの空間分解能に比してまだまだ疎らである．数値予報モデルの精度の向上に伴い，両者のアンバランスは次第に無視できなくなってきている。それゆえ，近年では，観測データの解析にモデルの力学あるいは自然法則を反映させた，より整合性の高い解析場を得ることが重要であると考えられるようになってきた．現在，世界の数値予報センターでは，過去の予報場に観測値を織り込みながら予報と解析を交互に繰り返す，予報解析サイクルと呼ばれるシステムを運用している．これは，モデルのつくり出す場と観測データを同化させる試みのひとつであり，一種の間欠的な4次元同化法とみることもできる．これに対し，4次元時空間に分布する観測データをもっと直接に取扱ってデータ同化を行なう，連続的4次元同化手法の研究も進められている．そうした手法の一つとして最近注目を集めているものに，予報方程式の随伴方程式（adjoint equation）を利用した同化法（いわゆるアジョイント法）がある．これは，4次元変分法によるデータ同化を，予報方程式という拘束条件の下で考えることにより自然に導かれる手法であるが，大気の運動にかかわる諸法則をそのままの形で解析の過程に取り込めるという点で，既存の解析手法にはない可能性を持つと期待されている．

考えている系（例えば大気）の状態をxで表し，その時間発展の法則（支配方程式）を

$$\frac{dx}{dt}=f(x) \tag{1}$$

とする．また期間$[t_0, t_1]$に得られた観測$u(t)$と状態の時間発展$x(t)$との差異を評価関数



第1図　アジョイント法による4次元同化の概念図．初期値x_0を変えながら観測$u_1, u_2, \ldots, u_n$に最もフィットする解$x(t)$を捜す．

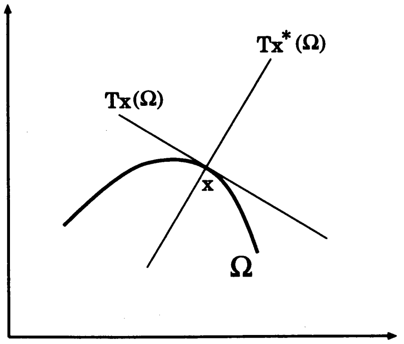
$$I[x]=\int_{t_0}^{t_1} g(x(t),u(t))\,dt \tag{2}$$

により測ることにする．

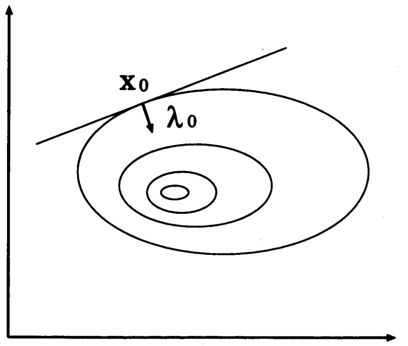
このとき，方程式(1)に従う時間発展$x(t)$のなかで，$I[x]$を最少にするものを捜すという問題を考えてみよう．これは条件付き変分問題の一種であるが，Lagrangeの未定乗数法によれば次の汎関数

$$J[\lambda,x]=I[x]+\int_{t_0}^{t_1}\langle\lambda,\frac{dx}{dt}-f(x)\rangle\,dt \tag{3}$$

を最小にする$x(t)$と$\lambda(t)$を捜すという変分問題と同等である．この右辺第二項は拘束条件を取り込むための項で，$\lambda(t)$はLagrangeの未定乗数に相当する関数，$\langle,\rangle$は状態全体がつくる空間Xにおける内積である．これは見かけ上変分問題の形をしているが，実際には拘束条件である支配方程式が系の時間発展の仕方を決めてしまうため，$x(t)$を捜す自由度としては結局のところ初期値x_0の選び方しか残らない．つまりこの問題は最適解を与えるための初期値を捜す問題となる（第1図）．このことは次の考察によっても確認できる．



第２図　支配方程式の解空間Ωと（同次）随伴方程式の解空間 $T^*_x(\Omega)$ の関係．ただし $T_x(\Omega)$ は接線形方程式の解空間．ここでは一点xにより区間［t_0, t_1］上の関数 $x(t)$ を表していることに注意．



第３図　支配方程式の解空間Ω上で（局所的に）みた $I[x]$ の等値線．随伴方程式の解の $t=t_0$ での値 λ_0 が$-\nabla x_0 I$ を与える．

この変分問題に対応する Euler-Lagrange の方程式を考える．簡単な計算により，それは支配方程式自身（すなわち(1)式）と，随伴方程式[*1]

$$\frac{d\lambda}{dt}=-(df_x)^*\lambda+\nabla_x g \tag{4}$$

および，境界条件

$$\lambda(t_0)=\lambda(t_1)=0 \tag{5}$$

からなることがわかる．ただし，$\nabla_x g$ は関数 $g(x)=g(x,u)$ の勾配であり，df_x は時間発展の道筋 $x(t)$ 上の各点 x において f を線形化（微分）したもの，$(df_x)^*$ はその随伴作用素（adjoint operator）である[*2]．ここで，λ に関する条件が区間［t_0,t_1］の両端で与えられていることは一見奇妙に思えるが，次のように考えれば納得できる．支配方程式の一般解は初期値を未定パラメータとして含むから，それを代入することにより確定する随伴方程式の一般解には二つの未定パラメータが含まれる．したがって，それらのパラメータを境界条件(5)により決めると考えるのである．結局のところそれは，最初に選ぶ支配方程式の初期値 x_0 の決め方をどうするかという問題に他ならない．ただし問題がこのように閉じた形で解けるのは，各方程式の一般解が解析的に求められる等の特別な場合だけであって，一般には逐次近似等の反復的方法を用いる必要がある．具体的には，初期値 x_0 を適当に仮定したうえで支配方程式を数値積分し，その解を用いて随伴方程式を積分する．その際，λの終端での境界値を $\lambda(t_1)=0$ としたうえで，$t=t_0$ に向かって逆に積分してやる．これは，そのような条件下で得られた $\lambda(t_0)$ が丁度評価関数 I の初期値 x_0 に関する勾配$-\nabla x_0 I$ を与えるからである（第３図）．したがってこのときもし，$\lambda(t_0)=0$ になったならそれが求めるべき解である．そうでなければ，（$\nabla x_0 I$ の値を用いて）初期値 x_0 を適宜修整したのち同様のことを繰り返し，これを $\lambda(t_0)=0$ になるまで続ける．

以上の説明からもわかるように，こうして得られた最適解は（原理的に）支配方程式を厳密に満たしている．したがって，それを与える初期値 x_0 には，t_0 以降に行なわれた観測からの情報が，力学的に整合する形で取り込まれていると考えてよい．更に，手法上の特徴として，(1)拘束条件の取り込みにより４次元変分法の問題が３次元変分法の問題に退化する，(2)３次元変分問題としての評価関数の勾配が随伴方程式の積分から得られる，等をあげることができる．これらの特徴は，システムの実現という面において重要である．例えば，米国気象局（NMC）では既に３次元変分法による解析システムが現業的に運用されているが，その

[*1] 正確には支配方程式の線形化（接線形方程式）の随伴方程式の符号を反転し，更に非同次項を付け加えたもの．この方程式の同次部分の解空間は支配方程式の解空間の余接空間になっている（第２図参照）．

[*2] df_x と $(df_x)^*$は X の内積を用いて関係式 $\langle df_x(\eta),\xi\rangle=\langle\eta,(df_x)^*(\xi)\rangle$ により結びつけられる．これらは互いに他方の随伴（adjoint）になっている．

ような場合，アジョイント法の導入に際し変分法解析の基本フレームはほとんど変更する必要がない．更に，新規に開発するべき計算の根幹部分が偏微分方程式の数値積分に帰着するため，これまでの技術的蓄積が活かせるという点で好都合である．また，現存の計算機システムに備わっている主記憶量から考えると4次元変分法を直接実行するのは現実的でないが，アジョイント法では3次元変分法に必要な主記憶量の数倍程度で実行できる*3．こうした理由により，アジョイント法は，予報解析サイクルにかわる次世代のデータ同化法として注目を集めるようになり，現在NMCや欧州中期予報センター（ECMWF）で精力的な開発が進められている。ただ実用化に向けては，実際の予報モデルに含まれる物理過程の問題や，計算機資源の問題等，幾つかの困難が存在する．しかし，こうした問題も次第に克服されつつある．

最後に，アジョイント法に関する解説として，日本語で読めるものを幾つかあげておく．より詳細な文献リストはそれらのなかに見出すことができる．

*3 ただし，予報結果の保存のため，相当量の補助記憶容量が必要．

参考文献

蒲地政文，1994：変分法による随伴方程式を用いたデータ同化作用，ながれ，13，440-445.

楠昌司，1990：変分法，気象庁数値予報課報告・別冊，36，109-131.

能勢修一，寺倉清之，松野太郎，佐藤信夫，1994：計算理学の方法，岩波書店．

村上茂教，1994：4次元データ同化問題における変分法，数値予報課テクニカルメモランダム，36.

（気象庁数値予報課　村上茂教）

第8回メソ気象研究会開催のお知らせ

日本気象学会1995年秋季大会の翌日に、恒例の「メソ気象研究会」を下記の要領で開催します。今回は、各種低気圧に伴うメソスケール現象を、メソα～総観場との関連に重点を置いて、理論/モデル/観測/予報のあらゆる角度から議論してみたく考えております。今後の進展を望むため、講演者には世話人と同年配の中堅に加えてさらに若い世代の方々も抜擢し、学会等の短時間の講演では充分に尽くせない研究手法の詳細や、突っ込んだ討論などを期待しております。奮って御参加下さいますよう御案内申し上げます。

記

日時：1995年10月19日（木）（日本気象学会秋季大会終了翌日）　09：00～15：00

場所：大阪管区気象台大会議室

テーマ：「台風及び梅雨季低気圧のメソ構造」

コンビーナー：山中大学（京大・超高層）

プログラム：

1. 山中　大学（京大・超高層）
   趣旨説明並びに台風のMUレーダー観測
2. 赤枝　健治（気象研・台風）
   台風の気象レーダー・衛星観測
3. 那須野智江（東大院・理）
   台風の数値モデル中のメソスケール降水系
4. 清水　収司（北大院・理）
   梅雨季低気圧の気象レーダー観測
5. 柴垣　佳明　（大阪電通大）
   MU・境界層・気象レーダーを用いた梅雨季低気圧の観測
6. （交渉中）
   メソ低気圧のモデルと予報
7. 大西　英記（大阪管区気象台）
   大阪空港付近の豪雨とメソα場との関連（1994年9月6～7日）
8. 加藤　輝之（気象研・予報）
   高分解能数値モデルの計算結果から見た集中豪雨の発生過程とメカニズムについて
9. 総合討論

問合せ先：

〒611　宇治市五ヶ庄京都大学超高層電波研究センター　山中　大学
TEL 0774-32-3111ext.3353; FAX 0774-31-8463
e-mail: yamanaka@kurasc.kyoto-u.ac.jp