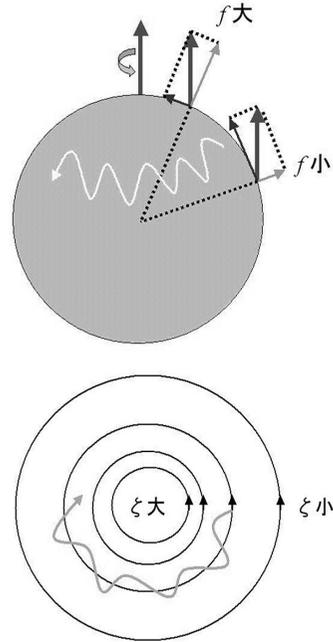


渦ロスビー波

1. 概略

回転する球面が持つ渦度（惑星渦度）の鉛直成分は、極において最大であり、そこより緯度が下がるにつれ単調減少し、赤道ではゼロとなる。このような回転球面上で（ポテンシャル）渦度を保存する流体が南北に変位すると、惑星渦度が増減した分を補償すべく流体内部に相対渦度が誘起され、結果として西側へ伝播する波動が生じる（第1図上）。これがロスビー波によって発見されたロスビー波である。しかし、実際にロスビー波という言葉は、このような惑星渦度の南北勾配（ベータ効果）に起因する波動だけではなく、もう少し広い意味で使われている。例えば、よく知られているように、自由表面を持つ一層の流体（浅水系）においては、水深の変化が数学的にベータ効果と同じ役割を持っており、等深線に沿って伝播する波動を生じる。この現象は“地形性ロスビー波”と呼ばれ、ロスビー波の一種とされる。同様に、渦のような中心部に渦度の集中した領域が存在する流れの場合、半径方向に渦度の勾配が生じ、これが同じくベータ効果となって渦度の高い部分を見守る方向へ伝播する波動を発生させる（第1図下）。この現象が今回採り上げる“渦ロスビー波 (vortex Rossby wave)”である。渦ロスビー波もやはりロスビー波の一種であるが、地形性ロスビー波やロスビーの発見した惑星ロスビー波のベータ効果が水深の変化や惑星渦度の勾配のような周囲の環境によって生じているのに対し、渦ロスビー波のベータ効果は渦それ自身の流れで形成されている点が特徴的である。

渦ロスビー波に関連した初期の研究は、MichalkeとTimmeによる理想化された渦に関する理論的研究 (Michalke and Timme 1967) や、藤田哲也博士によって発見された竜巻の複合渦構造、すなわち親渦の中に複数個の子渦を伴う構造を説明するための研究 (Snow 1978) など、渦流の順圧不安定を扱った研究に見ることができる。但し、この時点では渦ロスビー



第1図 惑星ロスビー波（上）と渦ロスビー波（下）の模式図。

波、あるいは、ロスビー波という概念がクローズアップされることはなかった。しかし、1990年代後半以降、熱帯低気圧のスパイラルバンドや多角形の眼を対象とした一連の研究がコロラド州立大学のSchubertやMontgomeryらのグループによって開始されると、これらの現象をロスビー波の力学で説明する試みが多数なされるようになり、渦ロスビー波という言葉も一般的に使用されるようになった (Montgomery and Kallenbach 1997; Schubert *et al.* 1999など)。次章では、ランキン渦上の渦ロスビー波を例として、この波の性質を紹介する。

2. ランキン渦上の渦ロスビー波

ランキン渦とは、渦度 $[=dV/dr + V/r]$ が一定値 $[=Z]$ の剛体回転部と、渦度がゼロであるポテン

シャル渦が最大風速半径で結合した形態の渦のことである。これを接線流速 V で表現すると

$$V = \begin{cases} \frac{Z}{2}r & = V_{\max}\left(\frac{r}{R_{\max}}\right) \quad (r < R_{\max}) \\ \frac{Z}{2}\frac{R_{\max}^2}{r} & = V_{\max}\left(\frac{R_{\max}}{r}\right) \quad (r > R_{\max}) \end{cases} \quad (1)$$

となる。すなわち、ランキン渦の接線流速は、最大風速半径 R_{\max} より内側では半径 r に比例、外側では反比例することがわかる。但し、最大風速を V_{\max} とすると $Z = 2V_{\max}/R_{\max}$ となることに注意されたい。このような理想的な渦に限定すれば、渦ロスビー波を線形論の範囲で解析的に示すことが可能である。以下、このランキン渦を基本場とする線形解析をおこなう。

支配方程式は渦度の保存式であり、これを極座標 (r, θ) で記述したものが次の(2)式である：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = 0 \quad (2)$$

ここで、 u 、 v はそれぞれ r 、 θ 方向の流速を表わす。更に、流線関数 ϕ で記した摂動を

$$u = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad v = V + \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (3)$$

のようにランキン渦に重ね、摂動が基本場と較べて十分に小さいという仮定の下で線形化をおこなうと、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{V}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\phi - \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\frac{d}{dr}\left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r}\right) = 0 \quad (4)$$

が得られる。この(4)式に支配される摂動 ϕ が、今取り上げる渦ロスビー波である。この渦ロスビー波の形を求めるため、半径方向に定在的な構造 $\Phi(r)$ を持ち、接線方向に波数 m 、角振動数 ω で振動するような解：

$$\phi = \Phi(r)e^{i(m\theta - \omega t)} \quad (5)$$

を仮定する。(5)式を(4)式に代入すると $\Phi(r)$ の支配方程式として、

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr} - \frac{m^2}{r^2}\Phi - \frac{m}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r}\right)\Phi = 0 \quad (6)$$

が得られる。ここで、 $dV/dr + V/r$ が基本場の渦度であることに着目すると、ランキン渦の渦度は区分的に一定であるので、その微分はゼロとなる。従って、(6)式の左辺第4項はゼロとなる。すると、この式は簡単に解くことができ、1次独立な2つの解として r^m と r^{-m} が得られる。これより中心と無限遠で摂動が収束するという境界条件と、半径方向の流速が渦度の不連続のある最大風速半径においても連続するという接続条件を考慮すると、

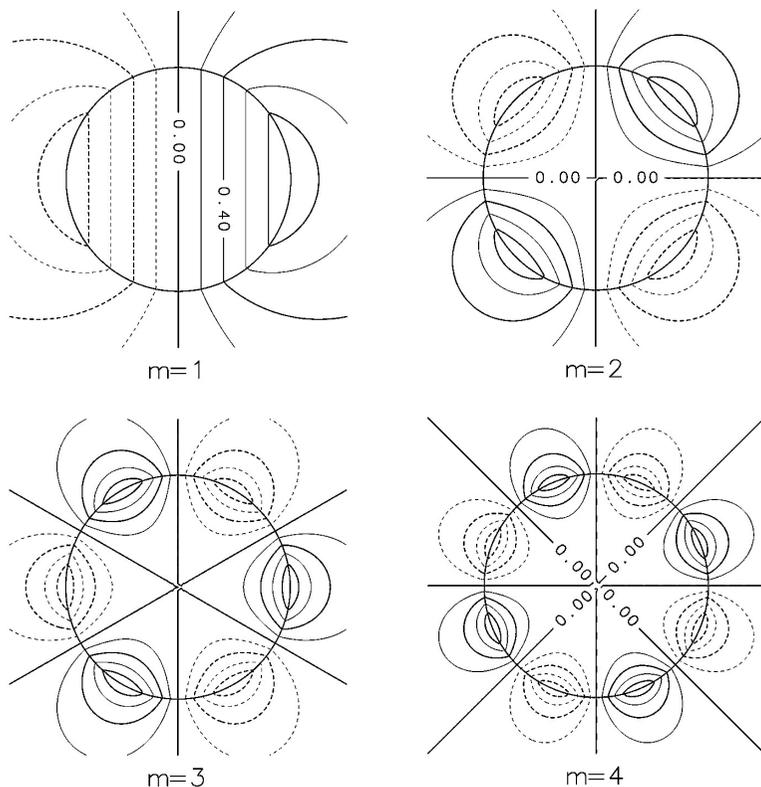
$$\Phi(r) = \begin{cases} \left(\frac{r}{R_{\max}}\right)^m & (r < R_{\max}) \\ \left(\frac{R_{\max}}{r}\right)^m & (r > R_{\max}) \end{cases} \quad (7)$$

となる。これがランキン渦上に現れる渦ロスビー波の半径方向の構造である。 $m = 1$ の場合には、ランキン渦と同じく $r < R_{\max}$ で半径に比例、 $r > R_{\max}$ で反比例する分布となっているが、 $m \geq 2$ の場合には、振幅がより最大風速半径に集中した構造をとる。第2図にその平面分布を示す。

一方、渦ロスビー波の分散関係については、(6)式を最大風速半径前後の微小区間にわたり積分することで得られ、これより分散関係として

$$\frac{\omega}{m} = \frac{V_{\max}}{R_{\max}} - \frac{V_{\max}}{R_{\max}}\frac{1}{m} \quad (8)$$

が求まる。ここで右辺第1項はランキン渦の渦核部 ($r < R_{\max}$) における角速度であり、第2項が純粋な渦ロスビー波の角速度を表わす。第1項と第2項の符号が逆であるため、ランキン渦の回転方向によらず、純粋な渦ロスビー波は必ず基本場の流れに逆らって伝播することが明らかである。このように基本場の流れと渦ロスビー波の回転は相殺し合うため、見かけ上は基本場の旋回角速度より遅い角速度で、基本場と同じ方向に回転することとなる。また、純粋な渦ロスビー波の角速度は波数 m に反比例するため、 m が大きくなるにつれ、見かけ上の角速度 ($= \omega/m$) がランキ



第2図 ランキン渦上の渦ロスビー波の水平分布. 波数 $m = 1$ (左上), 2 (右上), 3 (左下) および 4 (右下). コンターは流線関数を示し, 実線が正, 点線が負の値を表す (コンター間隔=0.2). また, 図中の円は最大風速半径を示す.

ン渦の角速度に近づく様子がみられる.

3. おわりに

Syono (1951) によると, ランキン渦は運動エネルギーが無敵大になるので, 現実に存在することはない. 渦が現存するためには, 少なくともランキン渦のような無敵遠ではなく, 有限の半径で流速が収束する必要がある. このことを念頭に, 渦の外縁を流速がゼロとなる円周 c で定義し, その内側にあたる渦の領域を S , 渦度を ξ , また, 位置ベクトルおよび流速ベクトルをそれぞれ X , U とし, ストークスの定理を適用してみる. すると, $U=0$ である c に沿った線積分はゼロなので,

$$\iint_S \xi dS = \oint_c U \cdot dX = 0 \tag{9}$$

が得られ, 渦度の面積分がゼロとなることがわかる. 従って, 渦の中心部に正の渦度があると, その周りには必ず負の渦度域が存在することになる (Syono *et al.* 1951; 笠原・増田 1956). ここで注意すべきことは, 半径方向の渦度の勾配が1つの渦内で符号を変えている点である. この状態は, Rayleigh の条件として知られる順圧不安定の条件を満足している. このような場合には, 少なくとも時計回りと反時計回りに旋回する2つの渦ロスビー波が存在し, これらの旋回する角速度が一致した場合には不安定が発生する. これが渦ロスビー波を用いた順圧不安定の解釈である. このように有限の半径で収束する軸対称渦は必然的に順圧不安定の条件を満足するため, これが実際の台風やハリケーンにみられる非対称性の原因となっている可能

性が考えられる (Itano and Ishikawa 2002). この他にも渦ロスビー波の概念を用いた熱帯低気圧等の研究は多数なされており, 今後の進展が期待される.

参考文献

Itano, T. and H. Ishikawa, 2002: Effect of negative vorticity on the formation of multiple structure of natural vortices. *J. Atmos. Sci.*, **59**, 3254-3262.
 笠原 彰, 増田善信, 1956: 台風論. 地人書館, 138pp.
 Michalke, A. and A. Timme, 1967: On the inviscid instability of certain two-dimensional vortex-type flows. *J. Fluid Mech.*, **29**, 647-666.
 Montgomery, M. T. and R. J. Kallenbach, 1997: A theory for vortex Rossby-waves and its application to spiral bands and intensity changes in hurricanes. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **123**, 435-465.
 Schubert, W. H., M. T. Montgomery, R. K. Taft, T. A.

- Guinn, S. R. Fulton, J. P. Kossin and J. P. Edwards, 1999 : Polygonal eyewalls, asymmetric eye contraction, and potential vorticity mixing in hurricanes. *J. Atmos. Sci.*, **56**, 1197-1223.
- Snow, J. T., 1978 : On inertial instability as related to the multiple-vortex phenomenon. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1660-1677.
- Syono, S., 1951 : On the structure of atmospheric vortices. *J. Meteor.*, **8**, 103-110.
- Syono, S., Y. Ogura, K. Gambo and A. Kasahara, 1951 : On the negative vorticity in a typhoon. *J. Meteor. Soc. Japan*, **29**, 397-415.

(防衛大学校地球海洋学科 板野稔久)
