気象のABC
―No. 9

オイラーの円板

木 村 龍 治

1．はじめに

「オイラーの円板（Euler's disk）」とは玩具の商品名で，表面に模様が描かれた直径 8 cm，厚さ 1 cm ほどの金属製の円板である．円板を床に立て，左手の指で中心を通る鉛直軸の上部を押さえ，右手の指で円板の縁をはじいて，コマのように回転させる．しばらく，軸を垂直にして回転しているが，回転が遅くなると，円板は傾いて，1点のみ，床に接触しながら，かなり長時間，振動する．円板の動きを示す動画は，インターネットのサイト（http://images.iop.org/objects/phw/news/4/4/12/news-04-04-12.gif）で，見ることができる．また，この現象の力学的な解析は McDonald and McDonald（2000）に示されている．

同じような現象は，コインまたはリングでも観察できる．例えば，100円玉を垂直に支え，縁を指ではじいて回転させる．しばらくの間，100円玉は軸を垂直にしてコマのように回転しているが，回転が遅くなると，床と1点で接触しながら，接触点が回転するのである．その結果，コインは振動しているように見える．100円玉の場合は，2，3秒で止まってしまうが，オイラーの円板は，1分間以上，振動を続け，しかも，接触点の回転速度が次第に速くなって，突然，静止する．円板の大きさ，重さ，エッジの形状などが，実にうまくできているように思える．

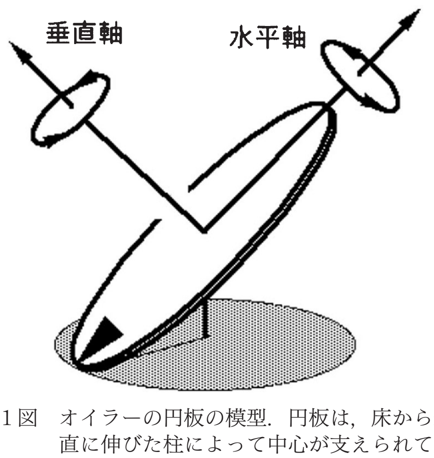
2．斜めに支えられた円板の運動

オイラーの円板は，円板を斜めの形状に保ちながら，コマのように回転しているように見えるが，実は，ほとんど回転していない．回転しているのは，接触点だけで，円板の面の角度が変化しているだけなのである．それを理想化した模型が第1図である．

円板は，中心を柱で支えられており，水平軸の周りに回転させることによって，斜めの姿勢を保ったまま回転する．ここで，図に示すように，水平軸まわりの回転と，垂直軸まわりの回転を区別して考える．出発点では，円板には，水平軸まわりの角運動量のみが与えられた．それでは，斜めに回転しているとき，円板は，垂直軸のまわりに回転しているのであろうか．

ここで，問題になるのは，円板と床の接触点の条件である．3つの場合が想定できる．1）床と円板の間には，全く摩擦がない，2）円板は完全に転がる．すなわち，接触面における円板の速度はゼロである．3）三角印の先端が床に接着している．

3）の条件の場合は，オイラーの円板の運動とは異

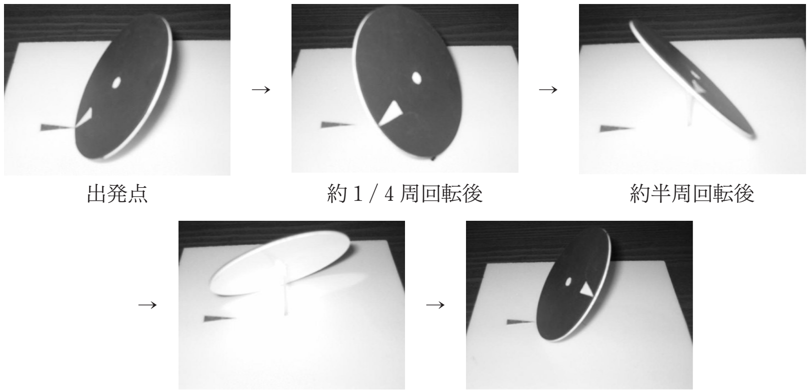


第1図　オイラーの円板の模型．円板は，床から垂直に伸びた柱によって中心が支えられている（実際の玩具には，柱はない）．水平軸の周りに回転させることによって，円板は斜めの姿勢を保って回転する．

* Ryuji KIMURA，放送大学.

なる．三角印は，常に下をむいているから，円板を垂直軸の上から観察すれば，円板は回転していない．

2）の条件の場合は，簡単に実験できる．実際に，模型を作って，1周させてみた．その結果が第2図である．円板が反時計まわりに回転すると，三角の印は，垂直軸のまわりに，時計回りに回転する．そして，1回転後には，元の位置に戻らない．三角印が元の位置にもどるためには，円板の縁は，円板の円周の長さだけ回転することが必要である．ところが，斜めに支えられているために，円板の縁が1周する長さは，円板の円周の長さよりも短い．だから，円板が1周しても，三角印は元にもどらないのである．



出発点 → 約1/4周回転後 → 約半周回転後 → 約3/4周回転後 → 1回転後

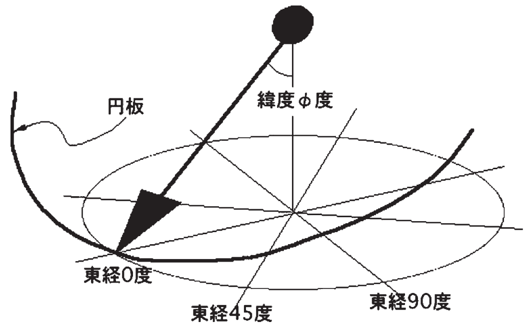
第2図　オイラーの円板の模型が，反時計まわりに回転する様子．円板につけた三角の印は，時計まわりに回転する．1回転後に，元の位置に戻らない点に注意．

それでは，1）の条件の場合はどうか．円板と床の間に全く摩擦がない（すなわち，円板は自由にすべることができる）ような床の上で，円板を回転させてみるのである．この条件は実現するのがむずかしいが，結果は予想できる．2）の条件下と全く同じ結果なのである．1）の条件下では，円板を垂直軸に回転させる作用がどこにもないので，円板は，垂直軸のまわりに回転するはずがない．それにもかかわらず，第2図の実験と同様に，円板は，時計まわりに回転する．一見，矛盾しているように見える現象は，どのように説明されるのであろうか．

3．回転する座標系

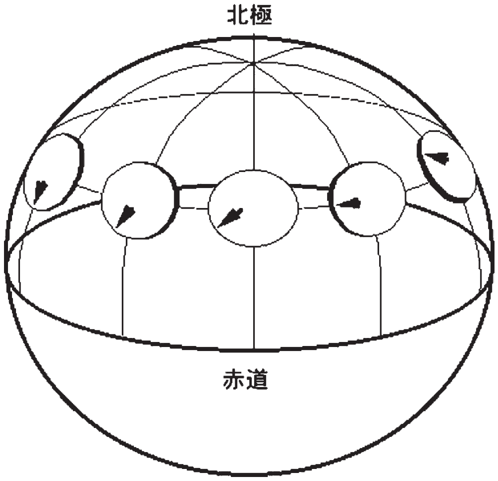
オイラーの円板が反時計まわりに1周すると考える．出発点の方向を東経0度に対応させよう（第3図）．また，円板の面が垂直軸となす角度を緯度に対応させよう（図では，緯度 ϕ とした）．そこから，反時計まわりに1周したときの三角印の位置を緯度・経度に対応させて示すことができる．その結果が，第4図である．

球面上に，円板の位置を表示する利点は，円板を見る座標系が可視化されることである．すなわち，円板を正面に見ると，どの時刻でも，北が上，東が右になるように，オイラーの円板を観察していることが分かる．



第3図　オイラーの円板と地球の緯度経度との対応関係

次に，別の実験を行ってみる．第4図の円板は，床をころがる円板の位置を球面上に表示したものであるが，今度は，円板がコマのように，中心軸のまわりを自由に回転できるものとする（すなわち，1）の条件に対応する）．出発点として，東経0度の位置に，三角印を下向きになるようにして，地球儀を反時計まわりに回転させる．そのとき，三角印の位置は，どのように変化するであろうか．結果は，円板が自由に回転できたとしても，三角印の位置は，第4図に示した円板の三角印の位置とまったく同じになる（すなわち，球を90度回転させると，三角印は，東経90度に置かれた円板の三角印と同じ位置に来る）．円板が床に接触していても，いなくても，三角印の位置は同じになる．実は，どちらの場合でも，円板は第1図の垂直軸のまわりに回転していないのである（水平軸のまわりには回転している）．回転しているように見えたのは，



第4図　オイラーの円板の位置を，第3図の対応関係に従って，球面上に表示したもの．中心位置は，緯度 ϕ にある．

座標系が反時計まわりに回転していたからである．北がいつも上向きだから，あたかも，座標系は回転していないように思えたが，それは錯覚に過ぎなかった．考えてみれば，回転と共に，北の方向も変化しているではないか（北向きの方向が変化しないのは，赤道上のみである．赤道上では，三角印は回転しない）．

いつも北を上に見る球面上の座標系は，球が回転すれば，慣性系から見ると，反時計まわりに回転している．そのような座標系から見たために，回転していないオイラーの円板が時計まわりに回転しているように見えたのである．

4．座標系の回転速度

それでは，斜めに支えられた円板面の座標系（北が上，東が右）は，どのような速度で回転しているのであろうか．円板と床の接点が1周する時間は，第4図の球が本当の地球と思えば，24時間である．接点の角速度をΩとしよう．一方，24時間たっても，円板は，まだ，1周しないので，円板の角速度は，Ωよりも小さい．その角速度を ω としよう．円板が1周したときの円周が回転した長さは，接点が1周した長さに等しい．それ故，

$$\omega/\Omega=2\pi R\sin\phi\ （接点が1周する長さ）/\ 2\pi R\ （円板の円周の長さ）$$

の関係が得られる．ここで，R は円板の半径，ϕ は，円板の中心の地球儀上における緯度である．この関係から，座標系の回転は，

$$\omega=\Omega\sin\phi$$

であることが分かる．東京であれば，北緯35度なので，$\sin\phi=0.57$である．東京が乗っている地面は，

$$2\pi/\omega=2\pi/(\Omega\sin\phi)=24時間/\sin 35度=42時間$$

で宇宙空間を反時計まわりに1回転している．

5．惑星渦度

無風状態の空気は，地面に張り付いている．それは，無風の空気が回転していることを示している．空気の回転角速度は，地面の回転角速度に等しい．すなわち，地球上の空気は，$\omega=\Omega\sin\phi$ で剛体回転している．気象の ABC №6（木村 2011）で述べたように，回転する流体の角速度の2倍を渦度（うずど）という．すなわち．地球上の空気は，

$$f=2\Omega\sin\phi$$

の渦度を持っている．この渦度を惑星渦度という（気象の ABC №7（廣田 2011）参照）．全く無風状態の空気がもっている渦度である．赤道上（$\phi=0$度）の空気は渦度をもたない．従って，空気が収束しても渦巻きができない．それに対して，赤道からはずれた場所にある空気は，収束によって渦巻が発生する（気象の ABC №6（木村 2011）参照）．

6．オイラーの円板に学んだこと

1）中緯度の地表面は，地表面に垂直な軸のまわりに $\Omega\sin\phi$ の角速度で回転している．ここで，Ωは，地球の自転角速度，ϕ は緯度である．
2）その上に積もった空気は，無風状態であれば，やはり$\Omega\sin\phi$ の角速度で回転している．
3）無風状態の空気がもっている渦度（$=2\Omega\sin\phi$）を惑星渦度という．

参 考 文 献

廣田　勇，2011: 渦のいろいろ．天気，58，999-1003.
木村龍治，2011: ホッケ柱．天気，58，887-889.
McDonald, A. J. and K. T. McDonald, 2000: The Rolling Motion of a Disk on a Horizonal Plane. http://lanl.arxiv.org/abs/physics/0008227v3 に論文の pdf がある．