

コリオリ力の「ユリイカ」

吉崎 正憲*

1. はじめに

コリオリ力とは、動く物体の回転系で現れる見かけの力のことであり、1835年に初めてこれを導出したフランスの科学者 Coriolis にちなんでつけられた。その力は、風に比例して北（南）半球では風に対して右（左）側に働く。通常の風の強さを 10 ms^{-1} とすると、その力は小さくて、中緯度帯では 1000 km 以上の空間スケールで半日以上の時間スケールをもつ大気の運動に表れる。したがって、コリオリ力が重要になるのは総観スケール以上の現象であり、その典型的なものとして、台風や総観規模の高・低気圧などがある。北半球に発生する台風が反時計回りに渦を巻くのは、コリオリ力の作用である。

コリオリ力は、気象学では重要な概念として基礎的な知識として教えられる。「気象のABC」でも、廣田 (2011)、木村 (2012a, b) により様々な角度から巧みな解説がなされている。しかし、初学者にとってやはりコリオリ力とは掴みどころのない何となくもやもや感のある概念であると思われる。その理由として、一つにコリオリ力は時間的にも空間的にも人間大の大きさでないことがある。つまり、コリオリ力を通常体感するのがむずかしい。二つに、運動に直交する方向に働く「見かけの力」を直感的に理解するのがむずかしいこともある。

古代ギリシャのアルキメデスは浮力の原理を入浴中に理解して、「分かったぞ（ユリイカ）」と叫んで浴場を裸で飛び出したという。同じようなことがコリオリ

力の概念の理解についても体験できればと思う。本稿では、初学者を対象に、慣性系、回転系、剛体回転を展望してから、コリオリ力の定性的な見方と、「気象のABC」では許容すれすれの式を使って定量的な導出を試みる。本稿は、いわばコリオリ力の理解に向けたさまざまなアプローチ集である。そのうちの一つでも理解できれば、廣田 (2011)、木村 (2012a, b) の解説を含めて他のアプローチも分かるはずである。本稿を読んで、読者がコリオリ力に関して「ユリイカ」と叫ぶことを期待したい。

2. 回転系における静止状態—剛体回転

本稿では、コンパクトディスク (CD) のような円盤の中心軸の周りを一定の割合で回転するものを考える。回転する速度を角速度 (Ω) と呼ぶ。円盤は北半球を想定して反時計回りとして、第1図は回転する様子を上から見たものである。この中の運動を記述するのに二つのやり方がある。一つは、円盤から遠く離れたところから、例えば宇宙から、記述するやり方である。これを慣性系と呼ぶ。もう一つは、回転する円盤に乗って運動を記述するやり方である。これを回転系と呼ぶ。

ここでは、剛体回転の説明をする。一人の観測者 A は回転軸上（すなわち円盤の中心）に、もう一人の観測者 B は回転軸から距離 r 離れて、時間 t_1 (第1図 a) でも時間 t_2 (第1図 b) でも時間に関らずお互い向かいあっているとす。その場合二人は回転系では静止している。ところが、この状態を慣性系から見ると、A も B も第1図 c のように同じように自転している。こうした関係を剛体回転という。回転系における B の位置を原点 (0, 0) とすると、y 軸は常に回転軸の方向を向き、x 軸はそれに直交する向き

* Masanori YOSHIZAKI, 海洋研究開発機構 地球環境変動領域 熱帯気候変動研究領域。

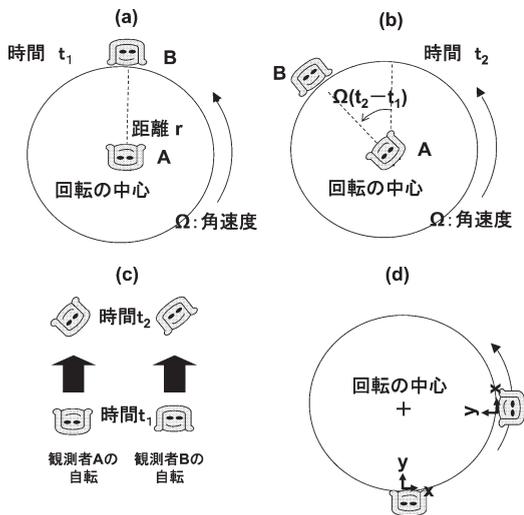
myoshiza@jamstec.go.jp

© 2013 日本気象学会

になる (第1図 d).

地球は1日1回の割合で自転していて、角速度は $2\pi/1日 \approx 7.27 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$ である。この角速度では、回転軸から約6500 km 離れた赤道付近では約 460ms^{-1} で回ることになる。宇宙からこの様子を見ると、そこでは音速より速いスピードで回っている。ところが、そのことに地球上に住む人は誰も気にしない。それは、地球上ではすべてが剛体回転しているために自分が動いていることに気づかないからである。

大気中に吹く風は、回転系の静止状態からのずれに



第1図 一定の角速度 Ω で回転する円盤に乗った二人の観測者(A, B)を慣性系から見た様子(「図説—地球環境」編集委員会 2013)。(a) 時間 t_1 、(b) 時間 t_2 における A と B の位置。回転系では二人は向かい合って静止している。(c) 慣性系から見た A と B が自転する様子。(d) 慣性系から見た B の座標系 (x, y) の変化。

あたり、慣性系では剛体回転からのずれにあたる。そうしたずれの大きさは通常剛体回転に比べて非常に小さい。大気力学はそのずれを扱う学問といえる。

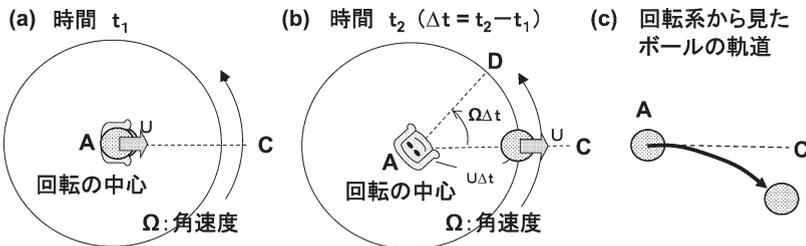
3. 運動の記述に関する4つの見方

本稿では、最低限、以下の三つの概念の理解を必要とする。一つは、“ニュートンの第1法則”である。それは「物体は、力の作用を受けない限り、静止、あるいは一直線上の一様な運動をそのまま続ける」というもので、慣性の法則といわれる。二つは、“ニュートンの第2法則”である。それは「物体に働いている力はその物体の質量と運動の加速度 (a) の積に等しい」というものである。三つは、“微分”である。それは、連続な関数 $g(x)$ を考え、 $g(x) - g(a)$ を $x - a$ で割り、その関係を保ちながら x を a に限りなく近づける操作である。つまり、微分は $g(x)$ の $x = a$ における傾きを表すことになる。

ここでは、コリオリ力の導出に関して、まず定性的な見方を紹介して、次に式を用いて、微分的な見方、差分的な見方、物理的な見方を述べる。

3.1 定性的な見方

慣性系でボールが一定の速度 (U) で動く場合を考える。等速運動であるので加速度は0である。この時ボールは回転軸の中心を通り C 方向に動くとして、この動きを回転軸上の観測者 A が観測する。ボールが回転軸を通過する時間を t_1 とする (第2図 a) と、時間 t_2 ($\Delta t = t_2 - t_1$) ではボールは中心から C の方向に $U\Delta t$ だけずれる (第2図 b)。ところが、回転系の A は2節で述べたように自転しているので、時間 t_2 では A の向きは C の方向ではなく D の方向になる。そうすると、A からはボールは右にずれたように見える。結局回転系におけるボールの動きは第2図 c のように動くことになり、これがコリオリ力の効果になる。



第2図 慣性系では一定の速度 (U) で動くボール (円形のドット域) と一定の角速度 Ω の回転軸上の A の動き。(a) 時間 t_1 でボールは回転軸 A を通り C の方向に向かい、(b) 時間 t_2 ($\Delta t = t_2 - t_1$) で半径 $U\Delta t$ にボールがある。(c) 回転系の A から見たボールの軌道。

これは直感的にコリオリ力を理解するのに役に立つ。しかし、この方法ではコリオリ力の定量的な大きさを知ることはむずかしい。定量的な議論のためには、式を使う必要がある。定性的な見方による説明は、上野・山口 (2012) に見る事ができる。

3.2 微分的な見方

小倉 (1978) にしたがって、空間に固定した直交直線座標系 (X, Y) と、それに相対的に角速度 Ω で回転する座標系 (x, y) を考える (第3図)。慣性系では、加速度 (α_x, α_y) が働くとする、ニュートンの第2法則から

$$\ddot{X} = \alpha_x, \quad \ddot{Y} = \alpha_y \tag{1}$$

である。ここで変数の上の点は時間微分を表し、例えば、 $\dot{X} = \frac{d^2 X}{dt^2}$ である。ある時刻 t において X と x 、 Y と y の間の角度は Ωt である。

任意の点 P の座標をこの二つの座標系であらわすと、

$$\begin{aligned} X &= x \cos \Omega t - y \sin \Omega t \\ Y &= x \sin \Omega t + y \cos \Omega t \end{aligned} \tag{2}$$

である。同様に、加速度も

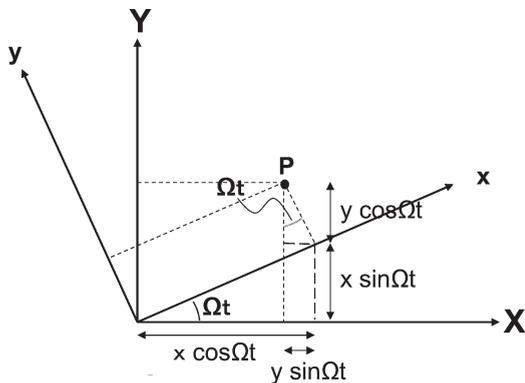
$$\begin{aligned} \alpha_x &= \alpha_x \cos \Omega t - \alpha_y \sin \Omega t \\ \alpha_y &= \alpha_x \sin \Omega t + \alpha_y \cos \Omega t \end{aligned} \tag{3}$$

となる。ここで、(2) を時間について2回微分して整理すると、

$$(\ddot{x} - 2\dot{y}\Omega - x\Omega^2) \cos \Omega t - (\ddot{y} + 2\dot{x}\Omega - y\Omega^2) \sin \Omega t = \alpha_x \cos \Omega t - \alpha_y \sin \Omega t \tag{4}$$

$$(\ddot{x} - 2\dot{y}\Omega - x\Omega^2) \sin \Omega t + (\ddot{y} + 2\dot{x}\Omega - y\Omega^2) \cos \Omega t = \alpha_x \sin \Omega t + \alpha_y \cos \Omega t \tag{5}$$

が得られる。(4) と (5) からそれぞれ $\cos \Omega t$ と $\sin \Omega t$



第3図 二つの座標系 (x, y) と (X, Y) の関係 (小倉 1978)。細い破線は式 (2) の理解のための補助線である。

を消去すると

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \alpha_x &= 2\dot{y}\Omega + x\Omega^2 \\ \ddot{y} - \alpha_y &= -2\dot{x}\Omega + y\Omega^2 \end{aligned} \tag{6}$$

が得られる。(6) は回転系におけるニュートンの第2法則に当たる。慣性系では (6) の右辺は0であるので、回転系における右辺の項は見かけの力にあたる。右辺第1項はコリオリ力、右辺第2項は遠心力と呼ぶ。遠心力は回転軸から物体までの距離に比例し、その働く方向は回転軸からその物体を結ぶ直線上で外向きとなる。

小倉 (1978) は上記のアプローチを示した後に、直交回転系でのベクトル変換を使って、球座標系を含む回転系の運動方程式を得ている。同様のアプローチは木村 (1983) にも見ることができる。

3.3 差分的な見方

慣性系 (X, Y) において、時間 t にボールが回転軸を通り X 方向に一定の速度 (U) で動く場合を考える (第4図；基本的に3.1と同じ)。A は回転軸上にあり B は A から r 離れているとする。 Δt を短い時間として、時間 t (ボールの位置は A) とその前の時間 $t - \Delta t$ (ボールの位置は C) とその後の時間 $t + \Delta t$ (ボールの位置は D) におけるボールの位置を B から観測することにする。AC および AD の距離は $U\Delta t$ である。第1図 d のように回転系の原点を観測者 B の位置とすると、回転系の y 軸は常に A を向く。 $t - \Delta t$ において y 軸にボールの位置 C から直交する補助線を引いて交わる点を点 G とすると、第4図 a の $\angle ACG$ は角度 $\Omega\Delta t$ に等しいのが分かる。同様に、 $t + \Delta t$ において y 軸にボールの位置 D から直交する補助線を引いて交わる点を点 H とすると、第4図 b の $\angle ADH$ は角度 $\Omega\Delta t$ に等しい。

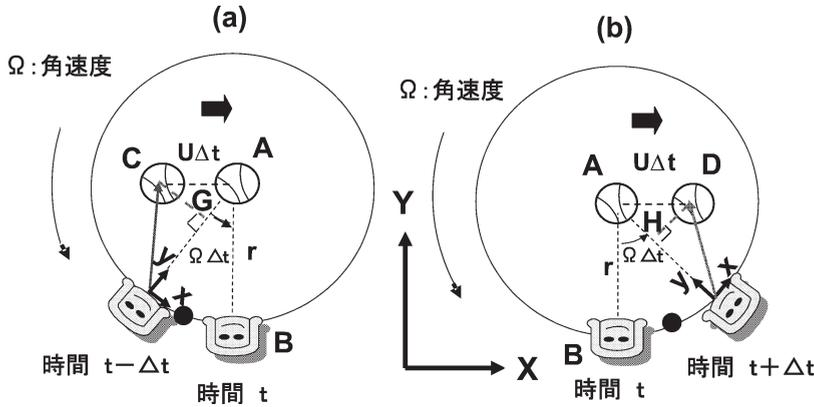
第4図 a から、 $t - \Delta t$ における原点 B から見たボールの位置 (x, y) は

$$\begin{aligned} x_{t-\Delta t} &= -U\Delta t \cos \Omega\Delta t \\ y_{t-\Delta t} &= r - U\Delta t \sin \Omega\Delta t \end{aligned} \tag{7}$$

と書くことができる。ここで、例えば、 $x_{t-\Delta t}$ は時間 $t - \Delta t$ における座標 x を表す。また t における座標は

$$\begin{aligned} x_t &= 0 \\ y_t &= r \end{aligned} \tag{8}$$

である。同様に、第4図 b より、 $t + \Delta t$ における座標は



第4図 慣性系 (X, Y) (太い実線) で X 方向に一定の速度 (U) で運動するボールを, (a) 時間 $t - \Delta t$ と時間 t , (b) 時間 t と時間 $t + \Delta t$ で B から観測した場合の位置 (x, y). ボールは $t - \Delta t$ においては点 C, t においては点 A, $t + \Delta t$ においては点 D にあり, $t - \Delta t$ と $t + \Delta t$ におけるそれぞれの y 軸にボールの位置から垂線を引いた交点を点 G と点 H とする.

$$\begin{aligned} x_{t+\Delta t} &= U\Delta t \cos\Omega\Delta t \\ y_{t+\Delta t} &= r - U\Delta t \sin\Omega\Delta t \end{aligned} \quad (9)$$

と表すことができる.

次に, 異なる時間の座標の差を Δt で割った量を計算する. この量は速度に相当する. 速度が定義される点をそれぞれ $t - \Delta t/2$ と $t + \Delta t/2$ と座標点の中間にすると, 速度の大きさは,

$$\begin{aligned} \dot{x}_{t-\Delta t/2} &\approx \frac{x_t - x_{t-\Delta t}}{\Delta t} = U \cos\Omega\Delta t \\ \dot{y}_{t-\Delta t/2} &\approx \frac{y_t - y_{t-\Delta t}}{\Delta t} = U \sin\Omega\Delta t \\ \dot{x}_{t+\Delta t/2} &\approx \frac{x_{t+\Delta t} - x_t}{\Delta t} = U \cos\Omega\Delta t \\ \dot{y}_{t+\Delta t/2} &\approx \frac{y_{t+\Delta t} - y_t}{\Delta t} = -U \sin\Omega\Delta t \end{aligned} \quad (10)$$

となる. 3.2と同様に, 変数の上の点は時間微分を表す.

さらに, 異なる時間の速度の差を Δt で割った量を計算する. この量は加速度に相当する. これから,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_t &\approx \frac{\dot{x}_{t+\Delta t/2} - \dot{x}_{t-\Delta t/2}}{\Delta t} = 0 \\ \ddot{y}_t &\approx \frac{\dot{y}_{t+\Delta t/2} - \dot{y}_{t-\Delta t/2}}{\Delta t} = -2U \frac{\sin\Omega\Delta t}{\Delta t} \end{aligned} \quad (11)$$

が得られる. ここで Δt を極限まで小さくすると,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin\Omega\Delta t}{\Delta t} \\ = \Omega \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sin\delta}{\delta} = \Omega \end{aligned}$$

となるので, これから, 回転系のボールの x 方向の加速度は 0, y 方向の加速度は $-2U\Omega$ であることが分かる. これが回転系に表れるコリオリ力である.

3.3ではボールが回転軸を通り X 方向に動く特別な場合を考えた. ボールが回転軸から y 方向に距離 R_y だけずれる場合には, 上記と同様のことを繰り返すことにより, y の加速度

成分に $R_y\Omega^2$ が新たに付くのが分かる (省略). この項は遠心力に相当する. また, ボールが回転軸を通り Y 方向に一定の速度 (V) で動く場合も可能である. この場合は, x 方向のコリオリ力は $2V\Omega$ であり, y 方向は 0 となる. また x 方向に R_x だけずれる場合も同様で, x の加速度成分に $R_x\Omega^2$ が付く. こうした導出は, 「図説一地球環境」編集委員会 (2013) の基礎編で見ることができる.

3.4 角運動量保存則などを用いた物理的な見方

これまでデカルト座標系で議論してきたが, ここでは流体中の運動を円筒座標系で記述することから始める. 小倉 (1999) は球座標系における議論を行ったが, ほとんど円筒座標系と変わらない. また木村 (2012b) はカーリングを例にコリオリ力を導出したが, ここでは式を使って記述しようというものである.

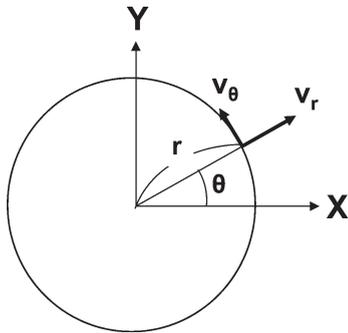
第5図のように, 半径 r と角度 θ を定義してそれぞれの方向の速度成分を v_r と v_θ とすると, 運動方程式は

$$\dot{v}_r - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \quad (12)$$

$$\dot{v}_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{\partial\phi}{r\partial\theta} \quad (13)$$

と書くことができる. ϕ は圧力を密度で割った量であるが, ここでは簡単のために圧力と呼ぶ.

時間項を含まない基本場の量を大文字で ($V_\theta(r)$,



第5図 (r, θ) で記述される円筒座標系.

$\Phi(r)$ と表すと, (12) から,

$$\frac{V_\theta^2}{r} - \frac{d\Phi}{dr} = 0 \tag{14}$$

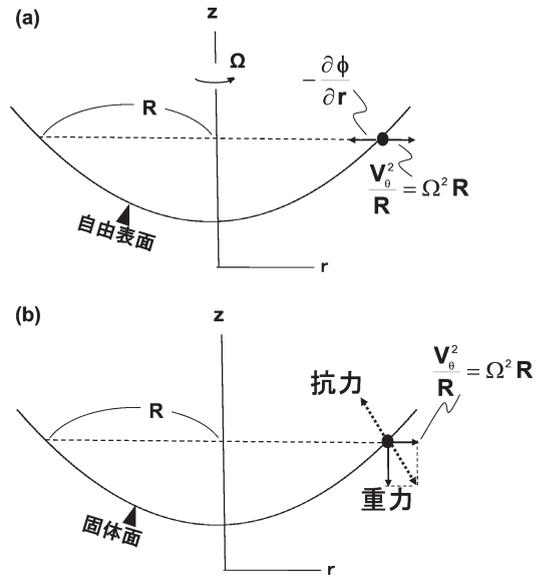
が得られる. 基本場の等圧面は自由表面 (ジオイド面) であり, V_θ の大きさは Φ の r 方向の傾きの大きさに比例して決まる.

Φ が r の二次関数の場合, $V_\theta = \Omega r$ となり, Ω は一定の値となる. ここで Ω は角速度にあたる. 等圧面の自由表面と紙面に直交する方向に運動する流体粒子を第6図 a に示す. 流体粒子には半径 R では圧力傾度力と $V_\theta^2/R = \Omega^2 R$ (=遠心力) が働くが, それらの力は逆向きで同じ大きさなのでトータル 0 である. こうした中では, θ 方向に流体粒子は等速運動を続けることになる.

この状況は, 流体粒子から重力場における質点と見方を変えることができる. 自由表面はそれと同じ形状を持ち円形の固体面, 例えば, 競輪場のバンクと考えると, 流体粒子は回転軸の周りを一定の速度 V_θ で疾走する競輪選手に置き換えることができる (第6図 b). 競輪選手にかかる力は重力と遠心力の合力であるが, この合力は固体面を通して働く抗力によってバランスする. 同じ速度でバンクの上を θ 方向に走っている限り, 競輪選手には力は働かない.

ところが, 競輪選手の速度を V_θ より Δv_θ だけ速くすると, 遠心力がバンクの傾きより大きくなり, 半径 R で円周を回っていた競輪選手は外向きに力を感じて大きな円周をとるようになる. (12) の v_r の時間変化を計算すると

$$\dot{v}_r \approx \frac{2V_\theta \Delta v_\theta}{R} = 2\Omega \Delta v_\theta \tag{15}$$



第6図 (a) 紙面に直交する方向に半径 R では ΩR の速度で運動する流体粒子とそれにバランスする等圧面 (自由表面). (b) (a) の自由表面と同じ形状をもつ固定面 (例, 競輪場のバンク) と紙面に直交する方向に ΩR の速度で運動する質点 (例, 競輪選手). 流体粒子と質点に働く力の内訳も示す.

となる. これは r 方向の運動方程式のコリオリ力に相当する.

θ 方向に力が働かない場合には, (13) の右辺は 0 であり, (13) は $r\dot{v}_\theta + v_r v_\theta = 0$ と表せる. $v_r = \dot{r}$ であることから $d/dt(rv_\theta) = 0$ となり, 半径 R では $M = Rv_\theta$ なる物理量が時間に関して一定である. つまり, M は保存量であり, これは角運動量と呼ばれる. ひもの一端におもりをつけて回す場合, ひもの長さを徐々に短く (長く) すると, おもりの回転は徐々に速く (遅く) なる (小倉 1999). このとき, ひもの長さを変えるのは r 方向であり θ 方向には力は働かないので, 角運動量保存は成り立つ. ここで, M を保存しながら半径 R を ΔR だけ変えてみる. そのとき V_θ も Δv_θ だけ変わるとして 2 次以上の微小量を無視すると, $\Delta v_\theta = -2\Omega \Delta R$ が得られる. これを Δt で割り, Δt を無限小にすると,

$$\frac{\Delta v_\theta}{\Delta t} = -2\Omega \frac{\Delta R}{\Delta t} \Rightarrow \dot{v}_\theta = -2\Omega v_r \tag{16}$$

が得られる. これは θ 方向の運動方程式のコリオリ

力に相当する。(後注)

こうして得られるコリオリ力は、その働く方向は水平速度ベクトルの方向に直角であり、北(南)半球では右(左)の方向に向く。またこれは座標系の変形から生じた見かけの力であるから、運動エネルギーとしては寄与しない。運動した時だけに現れるコリオリ力が直感と異なると思うのは、地球が自転するためにもともと傾いている自由表面を回転がないときの水平面と勘違いしたためである(木村 1979)。

4. まとめ

ここではコリオリ力に関して式を用いた4つの見方を示した。3.1の「定性的な見方」は、コリオリ力を直感的に理解する方法であるが、その力の大きさまでは分からない。3.2の「微分的な見方」は導出としてはもっともスマートであり、球座標系まで直ちに拡張でき体系的な方法である。3.3の「差分的な見方」は泥臭い方法であるが、回転系の座標系がどう変わるかを実感できるメリットがある。3.4の「物理的な見方」では、角運動量保存等を用いて物理的にコリオリ力を理解する方法である。いずれの見方もそれぞれ特長を持っていて、人によって受け入れやすさはさまざまであろう。はたしてどの見方がコリオリ力の理解の「ユリイカ」となるのか、いろいろと初学者に聞いてみたいものである。

謝 辞

藤部文昭「天気」編集委員長には貴重なコメントを頂いた。感謝します。

後注：通常コリオリ力と遠心力とは異なる概念である。ところが、式(15)は遠心力がコリオリ力に化けているように見える。そうなるには、 $V_0 = \Omega r$ と線型化という条件が必要である。式(13)からも、この二つの条件を入れると、式(13)の左辺の二つの項からそれぞれ $\Omega \Delta v_r$ が出てきてトータルで式(16)になる。

参 考 文 献

- 廣田 勇, 2011: 渦のいろいろ. 天気, 58, 999-1003.
 木村龍治, 1979: 流れの科学. 東海大学出版会, 195pp.
 木村龍治, 1983: 地球流体力学入門. 東京堂出版, 247 pp.
 木村龍治, 2012a: オイラーの円板. 天気, 59, 59-61.
 木村龍治, 2012b: 変則カーリング. 天気, 59, 227-229.
 小倉義光, 1978: 気象力学通論. 東京大学出版会, 249 pp.
 小倉義光, 1999: 一般気象学 (第2版). 東京大学出版会, 308pp.
 上野 充, 山口宗彦, 2012: 図解台風の科学. 講談社, 238pp.
 「図説—地球環境」編集委員会, 2013: 図説—地球環境. 朝倉書店 (発刊予定).