

輻射線図

澤田 龍吉

1. はしがき

英語では Atmospheric Radiation Chart または Radiation-Flux Diagram などという。ミュッゲ R. Mügge とメラー F. Möller (1932 年) による研究に端を発し、(1)メラーの考案によるもの、(2)エルサツサー W.M. Elsasser の考案によるもの (3)ロビンソン G.D. Robinson の考案によるもの (通称キュー線図 Kew chart)、(4)山本義一の考案によるものなどがある。輻射の問題といえば大気上層 100 km 辺以上の酸素原子・分子などによる紫外線の吸収や、地上 10 数 km から 60~70 km 辺のオゾンによる紫外線の吸収なども重要な対称であるが、現在、輻射線図と呼ぶものは大気の下層、主として対流圏内で問題となる水蒸気と炭酸ガス、および地表面や雲などに行われる輻射の放出、吸収を扱うものに限定されている。(この空域では紫外線の吸収は殆んど問題にはならず、主として赤外線が主役を演ずる。)しかし、これこそ天気図解析や下層大気の大循環に極めて密接な関係にある対照であり、気団の変質、フロントリシスや理論における非断熱的变化などに重要な資料を提供するはずのものと思われる。

筆者はこの方面の専門家ではないが、主としてエルサツサーの方法に従って線図構成の概要を解説することとした。輻射に関する議論には何よりも先づキルヒホッフの法則をはじめ、プランク、ベア、ステファンの法則などを理解する必要があるが、ここではそれらを前提として出発する。内容の性質上かなり数式が多くなるのを避けられなかつた点を予め断つておく。

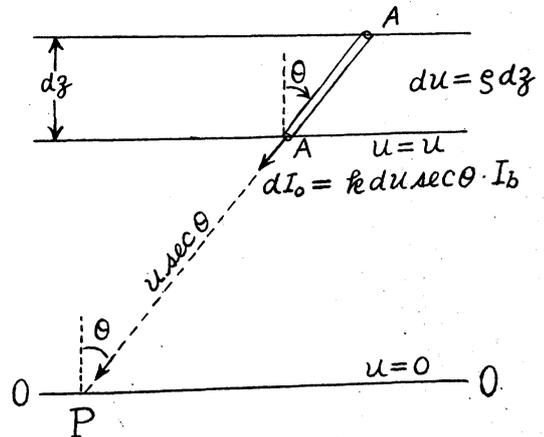
2. 基礎になる数式の導き方

第1図で厚さ dz の薄い水平な気層を考える。この薄い気層が放射する輻射エネルギーのうち、どれだけが任意の水平面 00 に到達するであろうか? これが出発点である。

先づ水蒸気の密度を ρ とし、水蒸気量を表わす新しい変数 u を次の微分式で定義し導入する。

$$du = \rho dz \quad (1)$$

従つて幾何学的な高さ z の代りに水蒸気量 u を座標として使うことになる。そこで再び第1図に戻り水平面 00 を新しい座標で $u=0$ 、薄い気層の高さを $u=u$ とする。鉛直方向と角 θ をなす単位断面の筒 AA を考えよう。この筒の中の水蒸気量は $du \cdot \sec \theta$ で与えられる。若し輻射線が上方からこの筒の中に入り矢の方向に



第 1 図

筒から抜けたとすると、この輻射は水蒸気量 $du \cdot \sec \theta$ に比例して弱まる。すなわち水蒸気がそれだけ吸収してしまうからである。その比例常数 (k とす) を吸収係数と呼び、 $k du \cdot \sec \theta$ をこの筒の吸収能という、これらはいづれも波長によつて値を変化する。この水蒸気の筒が矢の方向に放射する輻射を考え、そのうち、先づある一つの波長だけに着目することにしよう。キルヒホッフの法則によると、この筒が矢の方向に出す輻射量 dI_0 とこの筒の吸収能 $k du \cdot \sec \theta$ の比は筒が黒体であつた場合の輻射量 I_b に等しいことになる。従つて

$$dI_0 = (k du \sec \theta) \cdot I_b \quad (2)$$

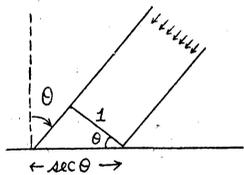
この輻射量 dI_0 が矢の方向に進行すると、水平面 00 上の一点 P に到達するまでの間に、その間にある水蒸気量 ($u \sec \theta$) のために吸収される。輻射の吸収に関する法則によれば、その減少は指數的で、 P 点に到達する輻射量 dI は次のようになる。

$$dI = dI_0 \cdot e^{-ku \sec \theta} = (k du \cdot \sec \theta) I_b e^{-ku \sec \theta} \quad (3)$$

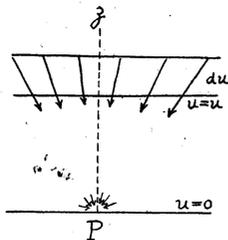
単位断面を持つこの輻射線は鉛直線と角 θ をなして P 点に到達するから (第2図) このうち水平面 00 上の単位面積に到達する輻射量はこれを $\sec \theta$ で割つたものになる。すなわち

$$k du \cdot I_b e^{-ku \sec \theta} \quad (4)$$

これが P 点における単位面積が受ける輻射量である。考えている薄い気層から P 点にやつて来る輻射は、なにも今考えたような特定の方向の一つの筒からばかりでなく、例えば第3図に示したように気層のあらゆる部

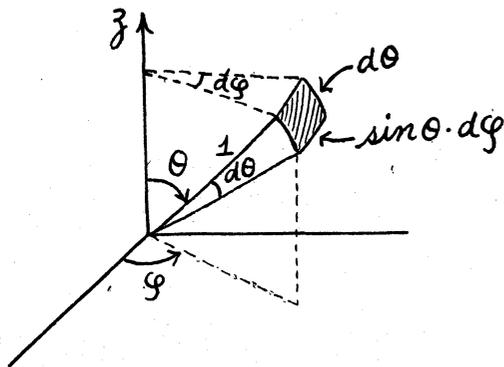


第 2 図



第 3 図

分からあらゆる角度 θ で P 点に到達するはずである。加うるにこれは立体的なもので、第 3 図を鉛直軸 Pz の周りに任意の角度だけ廻転して見た位置についても全く同じ状況である。点 P を原点とする単位半径の球面を考え、 θ のほかに方位角 φ を入れ、積分に当つて考えた球面上の面積要素が第 4 図のように $\sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$ で与えられることに注意して、 θ については P 点の眞上 ($\theta=0$) から水平方向 $\frac{\pi}{2}$ まで積分し、 φ については 0 から 360 度 ($=2\pi$) まで積分すればそれが P 点に到達する一定波長の輻射の総量 df となる。



第 4 図

$$df = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} k du \cdot I_0 e^{-ku} \sec \theta \sin \theta \cdot d\theta$$

$$= 2\pi I_0 k du \int_0^{\pi/2} e^{-ku} \sec \theta \sin \theta \cdot d\theta$$

$$= -2 f_b du \frac{d}{du} \int_0^{\pi/2} e^{-ku} \sec \theta \frac{\sin \theta}{\sec \theta} d\theta$$

$$= -2 f_b du \frac{d}{du} Ei_3(ku) \quad (5)$$

但し $f_b = \pi I_0$ (6)

$$Ei_3(ku) \equiv \int_0^{\pi/2} e^{-ku} \sec \theta \frac{\sin \theta}{\sin \theta} d\theta \quad (7)$$

$Ei_3(ku)$ はエルサツサーが導入した記号である。上の答は考えている薄い気層全体が P 点における単位面積上に送りこむ輻射のうち特定の波長のものの量を与えるものであるから、この気層が P 点に向つて放出する全輻

射量は上式の値を更らに波長、またはそれと表裏一体の振動数 ν のあらゆる値 (0 から ∞ まで) について加え (すなわち積分す) れば得られる。

所で実際には、このような特定の気層が送り込む輻射量だけでなく、 P 点の眞上にある全気層が P 点に送り込む全輻射量 F が問題となる。これを得るためには、 00 面に接する気層 ($u=0$) から大気の上限 ($u=u_\infty$) までの間の気層を細かく分けて、それぞれについて上式の値を計算して加え (すなわち積分す) れば良い。従つて

$$F = - \int_0^\infty d\nu \int_0^{u_\infty} f_b \frac{d}{du} \left[2 Ei_3(ku) \right] du \quad (8)$$

函数 $Ei_3(ku)$ は (5) 式で定義されたものであるが、その中には水蒸気の吸収係数を含んでいる。ここでは水蒸気の吸収係数について深く語る余裕はない。ただ k が振動数 ν の極めて複雑な、変化の激しい函数で、取り扱いが困難なものであること、従つて $Ei_3(ku)$ の値を振動数のある範囲について平均し、その結果、変化のゆるやかなつたものを τ_T と名づけて代用することにして、いとだけ述べておこう。その結果、(7) 式は

$$F = - \int_0^\infty d\nu \int_0^{u_\infty} f_b \frac{d}{du} \tau_T du \quad (9)$$

3. 図式計算のための書きかえ

(8) 式を部分積分によつて次のようにおく、

$$F = - \left[\int_0^\infty f_b \tau_T d\nu \right]_{u=0}^{u_\infty} + \int_0^\infty du \int_0^\infty \frac{df_b}{du} \tau_T d\nu \quad (10)$$

右辺の第 2 項をさらに次のように書き直す

$$\text{第 2 項} = \int_0^{u_\infty} \int_0^\infty \frac{df_b}{du} \frac{dT}{du} \tau_T d\nu$$

$$= \int_{T_0}^{T_\infty} \int_0^\infty \frac{df_b}{dT} \tau_T d\nu \quad (11)$$

ここに T は絶対温度で示した気温で、 T_0 と T_∞ はそれぞれ $u=0$ (すなわち 水平面 00) と $u=u_\infty$ における気温を表わす。

これでいよいよ図式計算の準備がととのつた。いま新しい函数 $Q(u, T)$ を導入して次のように定義する。

$$Q(u, T) = \int_0^\infty \frac{df_b}{dT} \tau_T d\nu \quad (12)$$

この結果、容易に次の関係式が得られる。

$$\int_0^{T_0} Q(0, T) dT = \left[\int_0^\infty f_b \tau_T d\nu \right]_{T=T_0}^{u=0} = \sigma T_0^4 \quad (13)$$

すなわち、これは $u=0$ (00 水平面) における黒体輻射の全量を与える。 σ はステファンの常数を表わす。

($T=0$ では輻射は零になるから当然 $f_b = I_0 = 0$, およ

び $u=0$ では $\tau_f = E i_3(k_0)$ の平均=1 となることに注意

$$\text{また } \int_0^{T_\infty} Q(u_\infty, T) dT = \left| \int_0^\infty f_0 \tau_f dv \right|_{\substack{T=T_\infty \\ u=u_\infty}} \quad (14)$$

これらを用いれば F は結局次式のように書き表わされる

$$F = \int_0^{T_0} Q(0, T) dT + \int_{T_\infty}^0 Q(u_\infty, T) dT + \int_{T_0}^{T_\infty} Q(u, T) dT \quad (15)$$

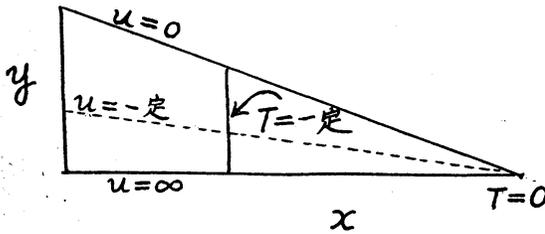
これですでにわかるように F は Q を縦軸, T を横軸に採った図における面積として得られることがわかる。

4. 輻射線図の構成と図式積分の原理

前節の (15) 式によれば, (12) で定義した Q と気温 T を座標にして線図を作ることが出来るが, エルサツサーはこれらの代りに次のように定義される新変数 x, y

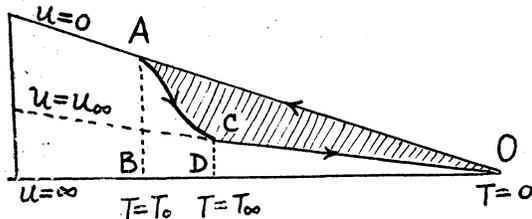
$$\text{を座標とした. } x = aT^2, y = \frac{Q}{2aT} \quad (16)$$

但し a は常数で, この新変数は $ydx = QdT$ の関係を持つている。第5図はその模型である。 $u = \text{const}$ の線



第5図 エルサツサーの輻射線図の構成 (横軸には T , 縦軸には u を目盛る)

はすべて $T=0$ の点から左方に伸びる直線で, $u=0$ から $u=\infty$ までがこの三角の形の中に収まる。($u=\infty$ というのは水蒸気量が無限ということを意味するから輻射は全部吸収され $\tau_f = E i_3(ku)$ の平均=0 となり, 従つて (12) 式より $Q(\infty, T)=0$ となる。すなわち $u=\infty$



第6図 $T=T_0$ の面が受ける上方からの輻射量 (=面積 OAC)

の線が x 軸に一致する。) この線図上で (15) 式の積分を考えると (第6図参照)

- 第1項は $u=0$ の線に沿つて $T=0$ から $T=T_0$ の点までの積分, すなわち面積 OAB を与える。
- 第3項は A 点からラジオゾンデ観測の結果から

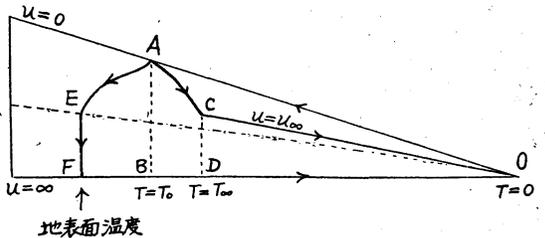
得られる T と u の関係を $T=T_\infty$ まで図に記入して結んだ曲線 AC に沿う積分, すなわち面積 $ABDC$ を与える。これは第1項の積分の方向と逆だから負符号をつける。

c) 第2項は $u=u_\infty$ の直線に沿つて $T=0$ から T_∞ の点 C までの積分, すなわち面積 ODC に負符号をつけたものを与える。

d) 従つて F はこれらの差し引き, すなわち面積 OCA で与えられることになる。

常数 a を適当に選び, 図上の単位面積のエネルギーを決定しておけば, この面積をプラメーターで測定して直ちに $\overline{00}$ 面の受ける上方からの水蒸気の輻射量を計算することが出来る。

これまでは, 問題を簡単にするために, すべて上方からの輻射だけを念頭において話をすすめて来たが, これはそつくりそのまま下方から上向きにやつて来る輻射量の計算にも当てはまる。ただしその場合には, u が下向きに増すことになる。いづれの場合にも考えている面を $u=0$ の面として, それから上方 (または下方) に u が T とともにどのように変化しているかを線図上に表わせば良いのである。例えば自由大気中のある水平面を考



第7図 $T=T_0$ の面が受ける上方からの輻射量 (=面積 OAC) と下方からの輻射量 (=面積 $OAEF$). 差し引き上方へ抜ける輻射量は面積 $OCAEF$.

え, その上方の水蒸気から受ける輻射量は第7図で第6図と同様に面 OCA で与えられるが, その下方から受ける輻射量については次のように考える。その面を $u=0$ とし, それから地表面までの間の気層の T と u との関係が例えば \widehat{AE} のようであつたとする。この場合には気層の含む水蒸気のほかに地表面が出す輻射のエネルギーをも考えなくてはならない。地表面はこの場合, 黒体と考える。黒体はすべての輻射を完全に吸収するから, 実質的には水蒸気を無限に含んでいるもの, すなわち $u=\infty$ と扱つてよい。従つて地表面よりの輻射は第7図で E 点より等温線に沿つて真直ぐに F まで積分したものの, すなわち面積 OEF で表わされる。こうして見ると自由大気中の水平面がその下方にある気層および地表面から受ける輻射量は面積 $OAEF$ で表わされる。従つて上方からの輻射よりも差し引き面積 $OCAEF$ だけ余

計に下方から受ける結果となる。雲がある場合は困難であるが、通常はこれも黒体として扱うから線図上での取り扱いは地表面の場合と全く同じである。

5. 水蒸気量 u の計算

前節では u を単に水蒸気量として扱ったが、水蒸気の吸収係数が気圧によつてかなり変化するために、その影響を補正するために若干異つた意味の u を用いる方が便利となる。

気層内の水蒸気量 u は水蒸気の密度を ρ 、空気密度を ρ_a 、比湿を q 、重力の加速度を g とすれば次式で与えられる。

$$u = \int_{z_1}^{z_2} \rho dz = \int_{z_1}^{z_2} q \rho_a dz = \frac{1}{g} \int_{p_2}^{p_1} q dp \quad (17)$$

但し z_1, z_2 はそれぞれ気層の底面および上面の高さで、それぞれの気圧を p_1, p_2 とする。ここで一面倒なことが起こる。すなわち吸収係数は気圧によつてかな

り変化することである。すなわち気圧が a 倍になると係数は \sqrt{a} 倍になる。この影響は係数を \sqrt{a} 倍にする代りに水蒸気量 (したがつて比湿 q) が \sqrt{a} 倍になると考えても同じであるから (17) 式の代りに

$$u = \frac{1}{g} \int_{p_2}^{p_1} q \sqrt{\frac{p}{p_s}} dp \quad (18)$$

とにおいて u を求めることにする。ここに p_s は標準気圧最近では気圧が a 倍になれば係数も a 倍になると考えられて来たようである。すなわち (18) 式の代りに

$$u = \int_{p_2}^{p_1} q \frac{p}{p_s} dp \quad (19)$$

ゾンデ観測から u を求めるには積分の代りに気層全体を任意の数に分け、それぞれの中の u (水蒸気量そのものではないことに注意。(18), (19) 式を見よ) を求めて加えれば良い。次表はエルサツサーが掲げた例の一部である。これは (18) 式の方式によつてい

気圧 p mb	気温 °C	比湿 q gr/kr	気層の 平均 比湿	Δp	$\sqrt{p/p_s}$	修正した u (気層毎)	u	
							1510 mb 面を $u=0$ とした時	710 mb 面を $u=0$ とした時
1015	10	6.7	6.3	65	0.99	0.41	0	1.36
950	7	5.8	5.5	30	0.97	0.16	0.41	0.95
920	7	5.3	4.6	130	0.93	0.56	0.57	0.79
790	-1	3.9	3.6	52	0.87	0.16	1.13	0.23
740	-4	3.3	2.9	29	0.85	0.07	1.29	0.07
710	-2	2.5					1.36	0

6. 炭酸ガスの扱い

これまででは輻射を吸収する物質として水蒸気だけを考へて来た。事実、最も重大な役割を演ずるのは水蒸気であるが、炭酸ガスも無視することは出来ない。ただ都合なことには炭酸ガスの吸収は極く狭い波長域に限られ、しかもその波長域における吸収係数は非常に大きくその部分の輻射はみんな吸収してしまつても大体良いので、任意の面における輻射を考えるに当つて炭酸ガスによるものはその面近傍における炭酸ガスだけによる (すなわち $u=0$ の所の CO_2 だけ) と考えられるこ、および、その外側では殆んど全く吸収しないという割に簡単なものであるから、エルサツサーは線図上 $u=0$ の線に沿つてあらかじめ炭酸ガスによる輻射量を計算して

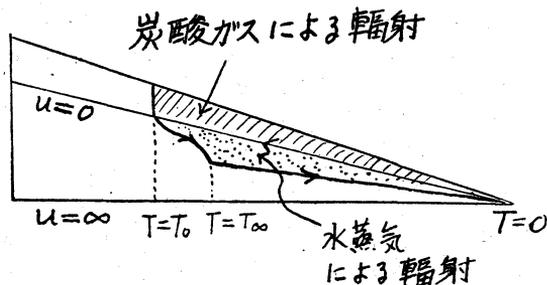
附加した。こうした結果、任意の面が受ける輻射量としては、前々節々に述べたやり方を求めた水蒸気による輻射量のほか、その面の温度を示す等温線を真直ぐ上に延ばし (第8図) て得られる炭酸ガスによるものを加えれば良いことになる。

7. 気層の冷却

射線図は一つの水平面を上方から下向きに到達するエネルギーと、逆にその面に下方から上向きに到達するエネルギーを与える。両者の差はどちらか一方にその面を通して流れるエネルギーの大きさを与える。一つの気層を考え、その底面の上面の各々についてこれら輻射エネルギーの流れを計算しその差をとれば、それはその気層内に流れ込んだ (又は気層から流れ出た) エネルギーを p_1 、与える、空気の比熱を C_p 、気層の底面における気圧を p_1 、上向きと下向きの輻射エネルギーの差を F_1 とし、気層の上面におけるそれらを p_2, F_2 とすれば、その気層内に流れ込んだ (又は流れ出た) 輻射エネルギーによる気層の気温変化 ΔT は

$$\Delta T = \frac{1}{C_p g} \frac{F_1 - F_2}{p_1 - p_2} \quad (20)$$

で与えられる。エルサツサーの輻射線図は輻射エネルギーの到達を cal/3 時間 単位で与えるから上式は気層の冷却 (加熱) を °C/3 時間 単位で与える。(予報課予報官)



第8図 CO_2 の出す輻射量の補正