

第2図 絶対渦度

# 数値予報の基礎 (I)

岸 保 勘 三 郎  
真 鍋 淑 郎

## まえがき

去年の12月号本誌上で一般的な数値予報の動きについての解説がなされたので、本文では少しばかり数値予報の基礎になっている考えをのべてみたい。数値予報の概念は一般にわかりにくいといわれているけれども、数値予報が気象学の近代化をすすめる一つの武器である以上これらのことを少しでも多くの人々の討論の場に提出してみたい。そして数値予報のすすめ方について何らかの助言をえたいものである。

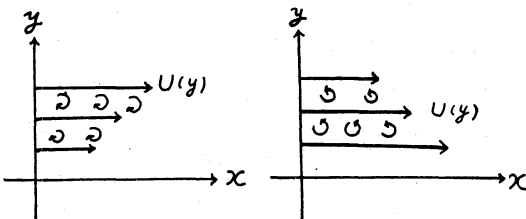
## § 1. 渦度 (vorticity) の保存

数値予報の歴史は新しいために、その前進の歩みをもてググザクの道を歩んだ点もあるけれども、一貫して流れている考えは渦度が保存するということである。

天気図上の気圧配置は時間と共に刻々変化するけれども、いつも変わらずに流れているものは渦度である。渦度というのは普通  $\zeta$  なる記号でかかれ、二次元的に考えれば

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

となる。ここで  $x, y$  軸は東向き及び北向にとった座標軸で、 $u, v$  は東向き及び北向きの風である。もっとわかりよい渦度の具体例として、第1図のような  $x$  軸に一樣な流れ  $u$  がある場合を考えてみよう。  $y$  方向に風速差があるので  $\zeta = -\partial u / \partial y$  なる渦度があることになる。図の (a) 例では  $\partial u / \partial y > 0$  なので負の渦度が存在している。図の (b) 例は  $\partial u / \partial y < 0$  なので正の渦度があるわ



第1図 (a) 正の渦度 (b) 負の渦度

けである。地球の廻転がなければ、このような渦度が時間に関して保存するわけであるが、我々の取扱う大気の問題では必ず地球の廻転を考慮しなければならない。第2図でかいてあるように、地球は極のまわりを  $\omega$  なる角速度で廻転しているので、緯度  $\phi$  の所では  $\omega \sin \phi$  の角速度で廻転していることになる。したがってこれを渦度

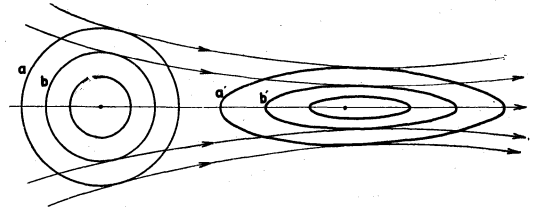
に直した  $f = 2\omega \sin \phi$  をコリオリのパラメーターといい、地球の廻転に対して相対的な渦度  $\zeta$  に地球の廻転からくる渦度  $f$  を加えて、絶対渦度とよんでいる。すなわち

$$\eta = f + \zeta = f + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

の形になる。この  $\eta$  が時間に関して保存するわけである。このことを数式を用いた表現に直せば

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$$

ということになる。  $d/dt$  は実質的变化を示すもので、  $\partial/\partial t$  は局所的变化を示すものである。このことをもっとわかりよくかけば第3図のようになる。今ある時刻に  $\eta$

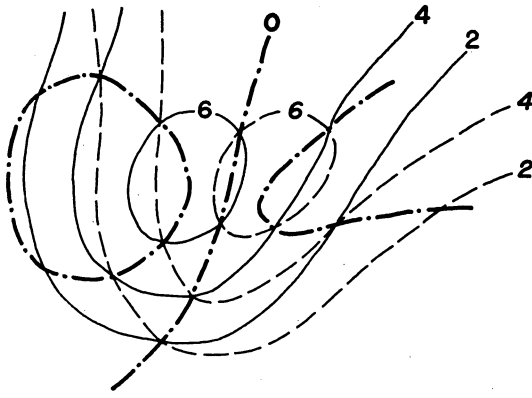


第3図 等渦度線の変化

の分布が  $a, b$  のような閉じた曲線で表わされている時、この渦度  $\eta$  が時間と共に場の風  $(u, v)$  で流されることを考えてみる。渦度は時間と共に  $a', b'$  のような形に変形していくわけであるが、その際に渦度の値例えば  $a$  の等値線の値が  $4 \times 10^{-4} (\text{sec}^{-1})$ ,  $b$  の等値線の値が  $6 \times 10^{-4}$  であれば、  $a', b'$  の値も依然として夫々  $4 \times 10^{-4}$ ,  $6 \times 10^{-4}$  の値を保っていることである。この例で閉じた等渦度線のかこむ面積は変形後も同じであることを特に注意しておきたい。これは天気運動を二次元の水平運動として考えるからであり、三次元的に考えれば等渦度線が垂直方向にのびちちみを行うので、二次元的には等渦度線のかこむ面積が変化する。

ところで第3図の例は等渦度線の変形を模型的に示したもので、実降の大気では色々な複雑な形で等渦度線の変形が行われている。数値予報ではあらゆる場所での風  $(u, v)$  をなるべく正確に計算し、その風の場で渦度を流して等渦度線の変形をできるだけわしく追跡してい

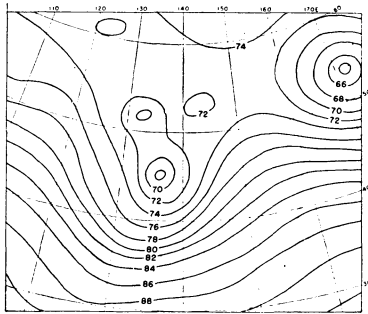
\* 以下絶対渦度のことを渦度の言葉で代用することにする。コリオリのパラメーター  $f$  が場所に対して近似的に一定だと考えれば、  $\eta$  の変化は単に渦度の変化となる。



第4図 温度の時間的変化の求め方

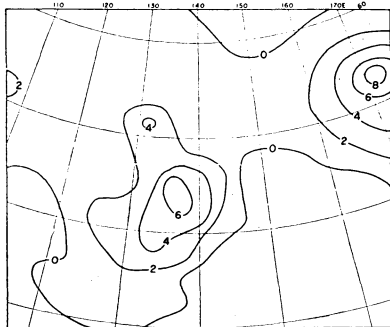
——  $\xi_{t=t}$   
 - - -  $\xi_{t=t+\Delta t}$   
 ····  $\Delta\xi$

る。数値予報の技術として要請される第2の点は、このようにしてできる新しい温度の分布と、もともとある温度の分布の差をつくることである。これはある1点の温度の時間的変化  $\partial\xi/\partial t$  を求めることである。このためには  $t=t$  の  $\xi_{t=t}$  と  $t=t+\Delta t$  に他の場所から流されてきた新しい温度  $\xi_{t=t+\Delta t}$  との差を求めればよい。ある場所での  $\partial\xi/\partial t$  を求めることは次節でのべるように、その場所での気圧変化または等圧面高度変化を求める準備段階となっている。

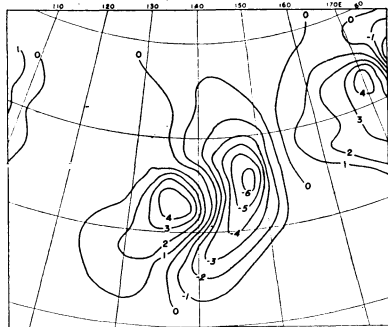


第5図 昭和29年5月9日00時  
 500mbのzの分布  
 (単位 100 feet)

そこで温度の時間的変化  $\partial\xi/\partial t$  を図式的に示せば第4図のようになる。始めに温度の分布 ( $\xi_{t=t}$ ) を図の実線で示されたものとし、それがあつた時刻後に図の点



第6図(a) 第5図のzに対する温度分布



第6図(b) 温度の時間的変化の分布 (Δt=12時間)

線のような分布 ( $\xi_{t=t+\Delta t}$ ) になったと考えてみる.\* そすると時間の経過と共に図の鎖線のような温度の変化が行われたことになる。即ち図の鎖線は

$$\Delta\xi = \xi_{t+\Delta t} - \xi_{t=t} = \left( \frac{\partial\xi}{\partial t} \right) \Delta t$$

を表わしていることになる。図からわかるように始めの温度の分布 ( $\xi_{t=t}$ ) とある時刻後の温度の分布 ( $\xi_{t=t+\Delta t}$ ) の中間に  $\Delta\xi = 0$  即ち温度の変化しない部分があり、その部分より前面では温度の増大 ( $\Delta\xi > 0$ ) があり、後面では温度の減少 ( $\Delta\xi < 0$ ) がある.\*\*

このような実例として俗に“May Storm”といわれている上層低気圧の場合をあげてみよう。第5図にみられる日本海上の500mb上の小さな低気圧があり、これが12時間後には第8図のように発達する場合である。第5図の天気図に相当する温度分布は第6図(a)のようになっている。そして12時間の間の温度の変化は第6図(b)のようになっている。前に図式的に示した例のように上層低気圧の前面で強い正の温度の変化があり、後面で負の温度変化がおこっている。そこで次の問題はこのような温度変化を実際の気圧 p または等圧面高度 z の変化に直すことである。

§ 2. 温度と気圧

前節では温度の時間的変化のことをのべたけれども、我々が実際の天気図でみるのは温度ではなくて気圧のパターンである。気圧から温度へ、温度から気圧への翻訳がすぐできないために温度の概念が我々にとって親しみにくいものになっている。もし将来温度の天気図ができ、それに対して我々の視覚が順応してきたら、こんなことはなくなるであろう。余談はさておき、ここでは温度と気圧の関係をのべてみよう。よく知られているように、我々は風と気圧との関係をつけるものとして地衡風を用いている。即ち

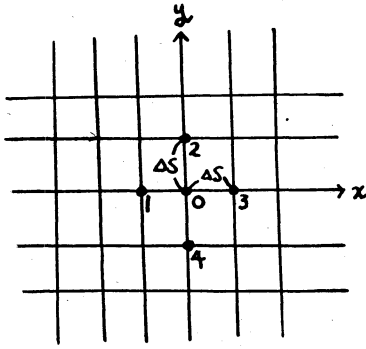
$$u = -\frac{1}{f} \cdot \frac{\partial p}{\rho \partial y} \quad v = \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial p}{\rho \partial x} \quad (f = 2\omega \sin \varphi)$$

ここで f はコリオリのパラメーター、ρ は密度、p は気圧である。今密度を一定と考えれば、この u, v を温度の式に代入することにより、

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \times \nabla^2 p \end{aligned}$$

となる。ただし  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 。即ち温度は気圧のラプラスアン ( $\nabla^2$ ) に比例するこ

\* この実例では正の温度分布の場合を考えている。  
 \*\* 初期の温度分布が負の場合を考えると、これらの関係は逆になる。

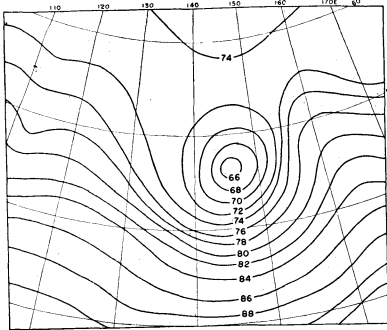


第7図 格子点

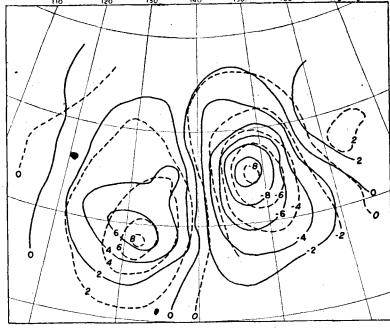
図のように  $\Delta x = \Delta y = \Delta s$  の格子点で  $x, y$  面を分断し、図のように交点を夫々 0, 1, 2, 3, 4 としておく。そうすれば 0 点における微分は近似的に次のようにおける。

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_0 = \frac{p_3 - p_1}{2\Delta S}, \quad \left(\frac{dp}{dy}\right)_0 = \frac{p_2 - p_4}{2\Delta S}$$

ここで  $p_1, p_2, p_3, p_4$  は点 1, 2, 3, 4 における  $p$  の値であり、微分のカッコの添字は点 0 に関する量を示すものである。同様にして



第8図 昭和29年5月9日12時 500 mb の  $z$  の分布 (単位 100 feet).



第9図  $\Delta t=12$ 時間に対する等圧面高度の時間的变化, 実線は観測値, 点線は計算値, 単位 100 feet.

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{1}{\Delta S} \left[ \left(\frac{p_3 - p_0}{\Delta S}\right) - \left(\frac{p_0 - p_1}{\Delta S}\right) \right] = \frac{1}{\Delta S^2} (p_3 + p_1 - 2p_0)$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{1}{\Delta S^2} (p_2 + p_4 - 2p_0)$$

したがって

$$\begin{aligned} (\nabla^2 p)_0 &= \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)_0 \\ &= \frac{1}{\Delta S^2} (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 4p_0) \\ &= \frac{4}{\Delta S^2} \left[ \frac{1}{4} (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) - p_0 \right] \\ &\equiv \frac{4}{\Delta S^2} (\bar{p} - p) \end{aligned}$$

ここで  $\bar{p} = \frac{1}{4} (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$  であり、 $p$  の周囲の平均値を表わしている。即ち  $\nabla^2 p$  は周囲の  $p$  の平均値から考える点の  $p$  の値を引いたもので近似できるわけである。そこで  $\zeta = \nabla^2 p$  の関係式を用いると

となる。今簡単のため比例常数  $1/f\rho$  を無視して

$$\zeta = \nabla^2 p$$

と考えると話をすすめてみる。上式を近似的にとくために  $\nabla^2 p$  を微差方程式でかいてみる。第7

$$\zeta = \frac{4}{\Delta S^2} (\bar{p} - p)$$

となる。今  $\zeta$  を  $\bar{\zeta}$  の周囲の値 (考える点について) の平均値とすれば、上式の平均値をとることにより

$$\bar{\zeta} = \frac{4}{\Delta S^2} (\bar{\bar{p}} - \bar{p})$$

となる。\* これを上式と加え合わせれば

$$\zeta + \bar{\zeta} = \frac{4}{\Delta S^2} (\bar{\bar{p}} - p)$$

即ち

$$p = -\left(\frac{\Delta S^2}{4}\right) (\zeta + \bar{\zeta}) + \bar{\bar{p}}$$

上式の後項  $\bar{\bar{p}}$  を無視すれば

$$p = -\left(\frac{\Delta S^2}{4}\right) \zeta - \left(\frac{\Delta S^2}{4}\right) \bar{\zeta}$$

と近似的におけることになる。 $\bar{p}$  を考慮すれば近似的に

$$p = -\left(\frac{\Delta S^2}{4}\right) \zeta - 2\left(\frac{\Delta S^2}{4}\right) \bar{\zeta}$$

にかきかえた方が更に近似度がよいとされているが、ここではこの問題にはこれ以上深く立ち入らないことにす

る。大分  $p$  と  $\zeta$  との関係式を求めるのに紙数が費やされたけれども、上の近似式により  $\bar{p}$  が与えられれば、その符号を逆にしたものに、更にまわりの  $\bar{p}$  の平均値の符号をかえたものをつけ加えることによって、近似的にそれに対する  $p$  の値が求まることになる。

第6図の  $\bar{p}$  の分布に対応する等圧面高度  $z$  の変化の分布を上述のような方法で

求めてみると第9図の点線で示されたものになる。第9図の実線で示されたものは12時間の間に実際に観測された等圧面高度  $z$  の変化量を示したものである。第8図は第5図で示された  $z$  の12時間後の (500 mb 面上の)  $z$  の値であるから、第8図の  $z$  から第5図の  $z$  を引けば観測された  $z$  の変化量が求まるわけである。第9図からもわかるように、計算で数値的に求められた  $z$  の時間的変化の値と、観測の値はかなりよく合っている。現象論的にいえば第5図の弱い上層低気圧は第9図の点線で示された  $z$  の変化によって、第8図のような割合に強い上層低気圧になるわけである。その原因をもっとくたいていば力学的原因による渦度分布の再配分によってある程度の強い低気圧ができる。 (未完)

\*  $\bar{\bar{p}}$  は  $\bar{p}$  についての周囲の平均値を示す。