1957年3月 天 氣 Vol. 4. No. 3.

551.509.3

予報方程式小論

栗 原 宜 夫*

大気の運動を調べたり予測したりするのに，どの程度の規模のものを対象にしているのか，その運動がどういう性格を持っていてその変動は主として予報方程式のどの項に支配されているのか等は，常に忘れてはならない。殊に，地衡風近似の適用限度，非地衡風の導入については慎重な考察が必要である。こうした動きにつれて，最近，予報方程式，釣合方程式についての研究が行われ，いろいろ議論が行われている。もちろん，未解決の多くの問題があるが，それを承知の上で，この一文が討論のたねとなることを願って，予報方程式と釣合方程式に関する簡単な紹介をここに企てた。

なお，方程式の各項の大きさの吟味などは十分なされていないから，**ここに載せた式を直ちに用いることは危険である。**

1. 予報方程式

x, y, p 座標系における東西成分および南北成分の運動方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\omega\frac{\partial u}{\partial p}=-\frac{\partial \phi}{\partial x}+fv \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\omega\frac{\partial v}{\partial p}=-\frac{\partial \phi}{\partial y}-fu \quad (1.2)$$

である．ϕ は等圧面のジェオポテンシャル，f はコリオリ・パラメーターである，また粘性の項は省略してある．

さて，一般に等圧面上の風 (u, v) は流れの函数 ψ と速度ポテンシャル χ を用いて，次のように表すことができる．

$$u=-\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \chi}{\partial x} \quad (1.3)$$

$$v=\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \chi}{\partial y} \quad (1.4)$$

この ψ と χ を用いて，渦度と発散を計算すると

$$\text{渦度；}\zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=\nabla^2\psi \quad (1.5)$$

$$\text{発散；}D=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}=\nabla^2\chi \quad (1.6)$$

となる．ただし $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ である．ψ と χ の場が渦度と発散の場にそれぞれ対応しているわけで，(1.3), (1.4) 式の第一項は非発散の風の場を，また第二項は非回転の風の場をあらわしている．次に，垂直速度 ω であるが，これは p 座標系における連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial p}=0 \quad (1.7)$$

を用いて χ と関係ずけられる．すなわち

$$\nabla^2\chi=-\frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (1.8)$$

で，$p=0$ で $\omega=0$ とおくと

$$\omega=-\int_0^p \nabla^2\chi\, dp \quad (1.9)$$

このようにして u, v, ω は ψ と χ で表せたから，(1.3), (1.4), (1.9) を (1.1), (1.2) に代入すると，従属変数として ψ, χ, ϕ を含む方程式となる．そして時間微分としては $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ と $\frac{\partial \chi}{\partial t}$ が含まれているから，2つの式に適当な演算を行って，$\frac{\partial \psi}{\partial t}$ と $\frac{\partial \chi}{\partial t}$ を分離してみよう．その結果は次の2つの式となる．

$$\nabla^2\frac{\partial \psi}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\Big[(\nabla^2\psi+f)\Big(\frac{\partial \chi}{\partial x}-\frac{\partial \psi}{\partial y}\Big)-\Big(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\partial p}+\frac{\partial^2 \chi}{\partial y\partial p}\Big)\int_0^p \nabla^2\chi dp\Big]-\frac{\partial}{\partial y}\Big[(\nabla^2\psi+f)\Big(\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \chi}{\partial y}\Big)-\Big(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y\partial p}-\frac{\partial^2 \chi}{\partial x\partial p}\Big)\int_0^p \nabla^2\chi dp\Big] \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\frac{\partial \chi}{\partial t}=&-\frac{\partial}{\partial x}\Big[\nabla^2\chi\Big(\frac{\partial \chi}{\partial x}-\frac{\partial \psi}{\partial y}\Big)+\Big(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y\partial p}-\frac{\partial^2 \chi}{\partial x\partial p}\Big)\int_0^p \nabla^2\chi dp\Big]-\frac{\partial}{\partial y}\Big[\nabla^2\chi\Big(\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \chi}{\partial y}\Big)-\Big(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\partial p}+\frac{\partial^2 \chi}{\partial y\partial p}\Big)\int_0^p \nabla^2\chi dp\Big]\\&-2J\Big(\frac{\partial \psi}{\partial y}-\frac{\partial \chi}{\partial x},\ \frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \chi}{\partial y}\Big)+f\nabla^2\psi+\beta\Big(\frac{\partial \psi}{\partial y}-\frac{\partial \chi}{\partial x}\Big)-\nabla^2\phi\end{aligned} \quad (1.11)$$

非常に厄介な式のようであるが，V (u, v を成分とする等圧面上の風）と等圧面上の2次元演算子 $\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ で見なれた形にすると，

* 気象庁統計課

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-\boldsymbol{V}\cdot\nabla(f+\zeta)-\omega\frac{\partial\zeta}{\partial p}+\left(\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)-(f+\zeta)div\boldsymbol{V} \qquad (1.10')$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(div\boldsymbol{V})=-\nabla\left\{(div\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{V}+\omega\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial p}\right\}+\zeta f+2J(u,v)-u\beta-\nabla^2\phi \qquad (1.11')$$

となる．すなわち渦度方程式と発散方程式にほかならない．(1.10)，(1.11) の右辺はψやχやϕが高次まで微分可能であればψやχやϕの値の分布だけから求められるものであるから，それぞれ．$F_1(\psi,\chi)$, $F_2(\psi,\chi,\phi)$ と書くことにする．

大気の運動を調べるのに，運動方程式そのものを使わないで渦度方程式と発散方程式を用いるのは，(1.1) や (1.2) では右辺がほとんど釣り合っていてu, vの時間変化を求めることは困難であるが，(1.10) ではϕを含む項がなくなっているし，項の大きさを比較してみるとψの時間変化が容易に求められるからである．その上，これから述べていくように発散方程式をうまく利用すると，不要な運動を取り除いたり予報がしやすくなったりする．

三つの変数，ψ, χ, ϕのうちψとχの時間変化は(1.10) と (1.11) で求められるが，ϕの時間変化は熱力学第一法則

$$\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial\phi}{\partial t}=-\boldsymbol{V}\cdot\nabla\frac{\partial\phi}{\partial p}-\sigma\omega-\frac{R}{pC_p}\frac{dq}{dt} \qquad (1.12)$$

から求められる．ここに，$\sigma=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial p^2}+\dfrac{1}{\kappa p}$,　$\kappa=\dfrac{C_p}{C_v}$,

Rは気体常数，qは単位質量の空気の受けとる熱量である．

(1.12) は，(1.10) や (1.11) と同じような表現をすれば

$$\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial\phi}{\partial t}=F_3(\psi,\chi,\phi)-\frac{R}{pC_p}\frac{dq}{dt} \qquad (1.12)$$

となる．

これで，ψ, χ, ϕの予報に用いる式が出揃った．すなわち，次の3つである．

$$\boxed{\begin{aligned}&\nabla^2\frac{\partial\psi}{\partial t}=F_1(\psi,\chi) && (1.10)\\ &\nabla^2\frac{\partial\chi}{\partial t}=F_2(\psi,\chi,\phi) && (1.11)\\ &\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial\phi}{\partial t}=F_3(\psi,\chi,\phi)-\frac{R}{C_pp}\frac{dq}{dt} && (1.12)\end{aligned}}$$

第三番目の式には$\dfrac{dq}{dt}$がある．これをx, y, p, tの函数として与えることができれば，ψ, χ, ϕの初期値から上の三つの式の右辺を求めることができ，微小時間づつ先の状態を求めていく marching process によって予報が行なえる．ただし，大規模な大気の運動に関係のないと考えられる小擾乱をどのようにして除くか，またどの程度除くべきかは今後に残る問題である．

2 予報方程式をそのまま用いるやり方

前節で導いたψ, χ, ϕに関する予報式をまともに用いて予報することを主に演算操作の面から考えよう．

(a) $\dfrac{dq}{dt}=0$ の場合

この時は，予報式は次の3つ——(1.10)，(1.11)，(1.12′)——である．

$$\boxed{\begin{aligned}&\nabla^2\frac{\partial\psi}{dt}=F_1(\psi,\chi) && (2.1)\\ &\nabla^2\frac{\partial\chi}{\partial t}=F_2(\psi,\chi,\phi) && (2.2)\\ &\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial\phi}{\partial t}=F_3(\psi,\chi,\phi) && (2.3)\end{aligned}}$$

ところが，観測から直ちに分る量は等圧面のジェオポテンシャルϕと，その変化傾向$\dfrac{\partial\phi}{\partial t}$（本当は$\dfrac{\Delta\phi}{\Delta t}$と書くべきで，十分の検討を要するのであるが）である．したがって，$\phi, \dfrac{\partial\phi}{\partial t}$から$\psi$と$\chi$を出すことを工夫する．$\psi, \chi, \phi$の初期値が分ればその難易は別としても，marching process でこれらの予報が出来るわけである．

ϕからχを近似的に求めるには，(2.1)，(2.3) と準地衡風近似$\psi\approx\dfrac{\phi}{f}$を用いる．すなわち$\psi\approx\dfrac{\phi}{f}$を(2.1)，(2.3) に代入し，

$$\nabla^2\frac{\partial\phi}{\partial t}=F_1'(\phi,\chi) \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial\phi}{\partial t}=F_3'(\phi,\chi) \qquad (2.5)$$

の2つの式から$\dfrac{\partial\phi}{\partial t}$を消去して

$$\frac{\partial}{\partial p}F_1'(\phi,\chi)-\nabla^2F_3'(\phi,\chi)=0 \qquad (2.6)$$

を得る．ϕに観測値を入れて，これを適当な境界条件で解くとχが求められる．(2.6) 式は

$$f^2\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2}+\nabla^2(\sigma\omega)=f\frac{\partial}{\partial p}(\boldsymbol{V}\cdot\nabla f+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\zeta)-\nabla^2\left(\boldsymbol{V}\cdot\nabla\frac{\partial\phi}{\partial p}\right) \qquad (2.7)$$

なるω-方程式にほかならない．

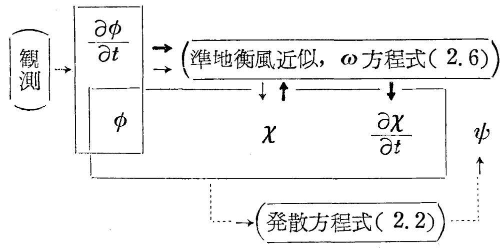
また，(2.6) 式に$\dfrac{\partial}{\partial t}$を施して，$\phi, \dfrac{\partial\phi}{\partial t}\left(\approx\dfrac{\Delta\phi}{\Delta t}\right)$, χを用いて$\dfrac{\partial\chi}{\partial t}$を求めることが出来る．

以上で，$\phi, \chi, \dfrac{\partial\chi}{\partial t}$が分ったからこれを (2.2) 式に代入して$\psi$が得られる．

初期値ϕ, χ, ψが分ればその変化傾向は予報方程式から出せる．ただし第一回目の計算では，$\dfrac{\partial\chi}{\partial t}$はいま準地衡風近似から計算した値と一致する．これを図的に表すと

次のようになる．

I　観測値から初期値を求めること



II　予　報

$\boxed{\psi,\quad \chi,\quad \phi}$

予報方程式(2.1), (2.2), (2.3)

↓

$\boxed{\frac{\partial\psi}{\partial t},\ \frac{\partial\chi}{\partial t},\ \frac{\partial\phi}{\partial t}}$

外　挿

↓

$\boxed{\psi,\quad \chi,\quad \phi}$

ところで，今迄に行ったのは単なる演算であって，これで本当に予報が出来るかどうか分らない．不要な波は入っていないだろうか．外部重力波を消すには，発散 D を垂直方向に積分平均した値が零になるという関係が使われる．

$$\frac{1}{p_0}\int_0^{p_0} D(x,y,p,t)dp=0 \qquad (2.8)$$

これは $\omega(p_0)=0$ とおけば満されるのであって ω—方程式を解くときに考慮すればよい．しかし，慣性波とか内部重力波は除かれていない．したがって，計算する時の時間間隔は相当短くしなければならない．Hollmann は次のようにして内部重力波を消そうとした．

(d)　$\frac{dq}{dt}\neq 0$ とおく

Hollmann は予報方程式を修正して内部重力波を除こうとした．そして，運動方程式，すなわち渦度方程式と発散方程式はそのままにして，熱力学第一法則を示す式に，綜観的に見てあまり影響が大きくないと思われる見掛け上の熱量を入れた．果して，これで内部重力波が阻止されるかどうか，はっきり分らないが，一応彼の与えた式を用いてみる．

$$\frac{dq}{dt}=\frac{pC_p}{R}\frac{\sigma}{f^2}\frac{D^2\omega}{Dt^2},\quad \frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla \qquad (2.9)$$

これを，予報方程式 (2.3) に代入すると

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial p}+\boldsymbol{V}.\nabla\frac{\partial\phi}{\partial p}+\sigma\left(1+\frac{1}{f^2}\frac{D^2}{Dt^2}\right)\omega=0 \qquad (2.10)$$

となる．$\frac{1}{f^2}\frac{D^2}{Dt^2}=0$ であれば断熱 $\frac{dq}{dt}$ の場合と全く同じで，$\frac{1}{f^2}\frac{D^2}{Dt^2}\ll 1$ なら断熱の仮定からのはずれはそう大きくないことになる．(その為には Δt を或る程度大きくしなければならない．この点は誠に都合が悪い．)

(2.10) 式の $\frac{D}{Dt}$ を (2.9) によって展開し，予報に適した形にすると

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial\phi}{\partial t}+F_4\left(\psi,\chi,\phi,\frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)+\frac{\sigma}{f^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}=0\\ &\omega=-\int_0^p\nabla^2\chi dp\end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

となる．

われわれは，ここで $\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}$ 云い変えると $\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}$ を知らなければならない．すなわち，ψ,χ,ϕ の変化傾向の他に $\frac{\partial\chi}{\partial t}$ の変化傾向も知らなければならず，予報方程式をもう一つ増さねばならない．その為には，χ の変化傾向を求める式 (2.2) をもう一度時間で微分したものを使えばよい．式 (2.2) は，もう少し丁寧に書くと

$$\nabla^2\frac{\partial\chi}{\partial t}+F_5(\psi,\chi)+\nabla^2\phi=0 \qquad (2.12)$$

で，これを t で微分すると，$\nabla^2\chi=-\frac{\partial\omega}{\partial p}$ であるから，

$$\nabla^2\frac{\partial\phi}{\partial t}+F_6\left(\psi,\chi,\frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}\right)=0 \qquad (2.13)$$

$$F_6\left(\psi,\chi,\frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial\chi}{\partial \chi}\right)=\frac{\partial}{\partial t}F_5(\psi,\chi)$$

となる．結局 (2.1) ，(2.12) ，(2.11) ，(2.13) が予報方程式系を形作るわけであるが，式を整理する意味で，(2.11) 式の代りに，(2.11) と (2.12) から $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ を消去したものを用いる．

$\nabla^2\times$ (2.11) $-\frac{\partial^2}{\partial p\partial t}$ (2.12) の演算をすると，$\nabla^2\chi=-\frac{\partial\omega}{\partial p}$ ゆえ，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2}+\nabla^2\frac{\sigma}{f^2}\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}+F_7\left(\psi,\chi,\phi,\frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)=0$$

$$F_7\left(\psi,\chi,\phi,\frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)=\nabla^2F_4-\frac{\partial^2}{\partial t\partial p}F_5 \qquad (2.14)$$

ここで出揃った予報方程式をまとめると

$$\boxed{\begin{aligned}&\nabla^2\frac{\partial\psi}{\partial t}=F_1(\psi,\chi) && (2.1)\\ &\nabla^2\frac{\partial\chi}{\partial t}=-F_5(\psi,\chi)-\nabla^2\phi && (2.12)\\ &\nabla^2\frac{\partial\phi}{\partial t}=-F_6\left(\psi,\chi,\frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}\right) && (2.13)\\ &\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2}+\nabla^2\frac{\sigma}{f^2}\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}=-F_7\left(\psi,\chi,\phi,\frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial\chi}{\partial t}\right) && (2.14)\\ &\nabla^2\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=-\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} && (2.15)\end{aligned}}$$

これを用いて予報するには，先の(a)の場合と同様，観測値から初期値χ, $\frac{\partial\chi}{\partial t}$, ψを求め（この時に，ω-方程式（2.6）と発散方程式（2.12）を用いる），しかる後，（2.1），（2.13），（2.14），（2.15）を逐次用いて予報を進める．なお，初期値を求める時に解くω-方程式（2.7）は，$\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2}+\nabla^2\frac{\sigma}{f^2}\right)$を演算子とする3次元微分方程式であり，発散方程式（2.12）は$\frac{\partial\chi}{\partial t}$, χ, ϕを与えてψを求めるのに使うのであって，ψに関するモンジューアンペール型の3次元微分方程式である．

さて，予報の手順は，

1 （2.1）の右辺にψ, χを代入して$\frac{\partial\psi}{\partial t}$を求める．これはポアッソン型微分方程式を解くことに他ならない．

2 ψ, χ, ϕ, $\frac{\partial\psi}{\partial t}$, $\frac{\partial\chi}{\partial t}$を(2.14)の右辺に入れて$\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}$を出す．解くのは，$\omega$方程式と同様の3次元微分方程式である．

3 この$\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}$から（2.15）によって$\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}$を出す．解くのはポアッソン型微分方程式である．

4 ここまでで分ったψ, χ, $\frac{\partial\psi}{\partial t}$, $\frac{\partial\chi}{\partial t}$, $\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}$を(2.13)の右辺に代入して，ポアッソン型微分方程式を解くと$\frac{\partial\phi}{\partial t}$が得られる．

5 以上の過程で得られた$\frac{\partial\psi}{\partial t}$, $\frac{\partial\chi}{\partial t}$, $\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}$および初期値としてわかっている$\frac{\partial\chi}{\partial t}$から，外挿法によって新しい$\psi, \phi$, $\frac{\partial\chi}{\partial t}, \chi$ が求められる．以後はこの操作をくり返す．結局，発散方程式（2.12）はψの初期値を出すのに用いるだけで，それ以後は使用しない．

以上を先の場合同様，模図的に表すと，

I 観測値から初期値を求めること

(a) と同じ．

II 予 報

初期値 $\boxed{\phi \quad \chi \quad \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad \psi}$

(2.1)式

変化傾向 $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ $\frac{\partial\chi}{\partial t}$ $\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}$ $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ $\xrightarrow{(2,14)}$ $\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}$

(2.13) (2.15)

外挿 ↓ ↓ ↓ ↓

新しい分布 $\boxed{\phi \quad \chi \quad \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad \psi}$

以上で分るように，新しいϕ, χ, ψの場はそれぞれ独立に得られる．$\frac{\partial\chi}{\partial t}$や$\chi$の外挿が許されるものかどうか，大きな問題点であるが，ϕ, ψ, χをそれぞれ独立に外挿する方法は，これから述べる方法と大きく異る点である．

3 予報方程式の一部を診断方程式に改める

前節に説明したϕ, ψ, χの場をそれぞれ独立に予報していくやり方に代って，その一部の場を予報し，残りの場は予報された場から何等かの手段で探っていくことを考える．

これは，例えば変動したχの分布をその変化傾向から計算しないで，外挿されたϕ, ψの分布と何等かの関係で結びつけようとするものである．すなわちχをϕやψの函数とすることである．すでに前節でもω-方程式（2.6）を利用してϕからχを求めたが，これは準地衡風近似というϕとψの間のある関係をなかだちにしてϕとχを結びつけたのであって，このようにして出したχは，もちろん近似的なものではあるが，大規模なϕの分布に対応したχの分布を与えるとみなしてよかろう．

ところで，ϕやψやχの場の関係を示す式として考えられるのは，予報方程式の一部をこのような関係式に改めることである．発散方程式は，その各項の大きさを検討した時，このような目的に一番適している．すなわち$\frac{dD}{dt}$あるいは二，三の項を附加したものをその大きさを考慮した上で無視することによって，発散方程式はその予報的性格を失って，いわゆる診断的な性格を帯びてくる．いま，こうしてϕ, ψ, χの間の関係式が得られたとすると，この関係式をたよりにして，外見的所見ϕ, ψからχの様子を診断出来るわけである．ϕとχが分っている場合にはψが診断出来る．こういう意味で，発散方程式の一部を省略した釣合方程式（Balance equation）は診断方程式の一種である．よく使われる地衡風関係式も，荒っぽいがあまり誤診もない医者の用いる診断式であると考えてよかろう．

発散方程式から$\frac{dD}{dt}$を省略することは，線型化した流体運動方程式を用いて調べてみると，気象的に意味のある波を分離してとり出すことになることはThompsonが示しているが，非線型の場合については更に予報方程式全体を加工しなければならないとも考えられる．とにかく，発散方程式を釣合方程式に改めることは，単なる項の省略丈でなくこのような大切な意味を持っていることも忘れてはならない．以下に説明するThompsonの予報方法では重力波，慣性波が濾化されているそうである．

Thompson の方法で使われるのは，一部の項を省略した渦度方程式

$$\nabla^2\frac{\partial\psi}{\partial t}=G_1(\psi, \chi) \qquad (3.1)$$

発散方程式から$\frac{\partial D}{\partial t}+\nabla\cdot\left(DV+\omega\frac{\partial V}{\partial p}\right)$を省略した釣合方程式〔(1.11) 参照〕，

$$2J(u,v)+u\frac{df}{dy}-f\nabla^2\psi+\nabla^2\phi$$
$$=G_2(\psi,\chi,\phi)=0 \qquad (3.2)$$

それに，熱力学第一法則で断熱$\left(\frac{dq}{dt}=0\right)$の仮定をしてこれと渦度方程式を連立させて求まる式

$$f^2\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2}+\nabla^2(\sigma\omega)=f\frac{\partial}{\partial p}(V.\nabla f+\nabla.\zeta V)$$
$$-\nabla^2\left(V.\nabla\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)-\frac{\partial^2}{\partial p\partial t}\left(\nabla^2\phi-f\nabla^2\psi\right) \qquad (3.3)$$

である．（3.3）は先に（2.4）式と（2.5）式から（2.6）式を求めた時と全く同じやり方で得られ，ω-方程式の親類である．（3.3）で$\chi=0, \phi=f\psi$とするとω-方程式（2.6）そのものになる．さて，（3.3）における最後の項$\frac{\partial^2}{\partial p\partial t}(\nabla^2\phi-f\nabla^2\psi)$は，これが地衡風渦度の補正項の微分に過ぎないことと，これを省略することから生ずるωの誤差は予報にあまり大きな影響がないということを仮定して省略する．すると（3.3）は

$$f^2\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2}+\nabla^2(\sigma\omega)=G_3(\psi,\chi,\phi) \qquad (3.4)$$

となる．この他に連続方程式$-\nabla^2\chi=\frac{\partial\omega}{\partial p}$が必要で，結局用いる式は，

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\nabla^2\frac{\partial\psi}{\partial t}=G_1(\psi,\chi) & (3.1)\\
G_2(\psi,\chi,\phi)=0 & (3.2)\\
f^2\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2}+\nabla^2(\sigma\omega)=G_3(\psi,\chi,\phi) & (3.4)\\
\nabla^2\chi=-\frac{\partial\omega}{\partial p} & (3.5)
\end{array}}$$

である．このモデルでは，変化傾向を計算した後外挿を行って新しい分布を求めるのはψについてのみである．

ここで，（3.1），（3.2），（3.4），（3.5）を用いて予報する手順を説明しよう．先ず，観測値ϕから，ψ及びχ，ωを求めるには（3.2），（3.4），（3.5）が矛盾なく成立するようにψ,χ,ωを解けばよいわけであるが，実際には，逐次近似法を用いてψ,χ,ωを解く．すなわち，ψ,χの第零近似値ψ_0,χ_0と観測値ϕを（3.4）の右辺に入れて，3次元微分方程式を解くとωの第零近似値ω_0が出る．（3.5）右辺にω_0を代入してポアソン型微分方程式を解くとχの第一近似値χ_1が出る．次に（3.2）式にχ_1,ϕを入れてψについて解くとψの第一近似値ψ_1が分る．ψについてはモンジュ・アンペール型微分方程式である．その次には，χ_1とψ_1を今のχ_0,ψ_0の変りに用いるとχ_2及びψ_2を計算することが出来る．これをくり返してχ,ψの近似度を逐次高めていくわけである．一段階の逐次計算において解くのは3次元微分方程式（3.4），ポアッソン型微分方程式（3.5），モンジュ・アンペール型微分方程式（3.2）の3つである．こうしてχ,ψの第n近似値が得られたら，それを（3.1）式右辺に代入してψの変化傾向を求めることが出来る．この際解くのはポアッソン型微分方程式である．

さて，外挿で新しいψの場が得られたら，それに対応したχ，ϕ，ωを（3.2），（3.4），（3.5）から計算する，今回は（3.2）式はϕについて解くのでポアッソン型微分方程式となる．手順は，ψとχの第零近似値χ_0から（3.2）式によってϕ_0を計算し，ϕ_0,ψ,χ_0から（3.4）式でω_0を求め，さらにこのω_0を（3.5）の右辺に代入して近似度の一つ上ったχ_1を出す．次の段階ではψ,χ_1を用いてこの手順をくり返すとχ_2が出る．こうしてχ_nまで出たら，それとψを用いて（3.1）式からψの変化傾向を出す．こうして予報を進めるわけである．前のように模図的に示すと，

I　観測値ϕから逐次近似法によってψ,χを求めること

（観測）

$\downarrow$

$\phi,\chi_0=0,\psi_0=\frac{\phi}{f}$ -(3.4)→ ω_0 -(3.5)→ $\left.\begin{matrix}\chi_1\\ \phi\end{matrix}\right\}$ -(3.2)→ ψ_1
（第零近似）

$\phi,\chi_1,\quad \psi_1$ —(3.4)→ ω_1 -(3.5)→ $\left.\begin{matrix}\chi_2\\ \phi\end{matrix}\right\}$ -(3.3)→ ψ_2
（第一近似）

$\phi,\chi_2,\quad \psi_2$ —(3.4)→ ………………
（第二近似）

…………………………

$\phi,\ \chi_n,\ \psi_n$

II　ψの予報

$\left.\begin{matrix}\chi_n\\ \psi_n\end{matrix}\right\}$ —(3.1)→ $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ —(外挿)→ ψ

III　ψからϕ,χを求めること

$\psi,\chi_0=0$ —(3.2)→ $\left.\begin{matrix}\phi_0\\ \psi\\ \chi_0\end{matrix}\right\}$ —(3.4)→ ω_0 —(3.5)→ χ_1
（第零近似）

ψ,χ_1 —(3.2)→ $\left.\begin{matrix}\phi_1\\ \psi\\ \chi_1\end{matrix}\right\}$ —(3.4)→ ω_1 —(3.5)→ χ_2

………………

IV　II，IIIのくり返し

本方法ではI，IIIは診断の部分，IIが予報の部分とみなすことが出来る．実さいには，このやり方で用いる逐次近似法が収れんするものかどうかは分らない．また発散方程式から診断方程式（3.2）式を導いた時に行った仮定がどの程度まで妥当なものとみなせるかどうか，検討すべき点は多々あるようである．

4　釣合方程式と地衡風近似

前節で述べたやり方を要約すると，ψ,χ,ϕの3つの場

のうちψの場についてだけ予報を行い，χとϕはその変化の機構は度外視して，診断方程式をみたすようにψ,χ,ϕを相互に強制的に釣り合わせるということになる．その診断方程式は（3.2），（3.4）であった．

本節では，さらに診断方程式を簡単化して，モデルを簡単にする．

(a) 釣合方程式と地衡風近似

発散方程式（1.11′）

$$\frac{\partial D}{\partial t}=-\nabla\cdot\left(D\cdot V+\omega\frac{\partial V}{\partial p}\right)+\zeta f+2J(uv)-u\beta-\nabla^2\phi$$

から，$\frac{\partial D}{\partial t}+\nabla\cdot\left(D\cdot V+\omega\frac{\partial V}{\partial p}\right)$を省くと，診断方程式

$$2J(u,v)+u\frac{df}{dy}-f\nabla^2\psi+\nabla^2\phi=0 \qquad (3.2)$$

が出来る．ここで

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\chi}{\partial x} \qquad (1.3)$$

$$v=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\chi}{\partial y} \qquad (1.4)$$

であるから，（3.2）式は，ψ,χ,ϕの3つの分布の間の釣合を示すとみなすことが出来る，前節では$G_2(\psi,\chi,\phi)=0$としてこれを取り扱った．これを更に簡単にする為に，（3.2）式においてF=0としてみる．その結果は，

$$\nabla^2\phi-f\nabla^2\psi-2\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}=H_2(\psi,\phi)=0 \qquad (4.1)$$

となり，ψとϕの間の釣合関係を示す．狭義には，これを釣合方程式と呼ぶ．

釣合方程式（4.1）は，ψについてモンジュ・アンペール型の微分方程式で，

$$\nabla^2\phi-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}>-\frac{f^2}{2} \qquad (4.2)$$

の時に楕円型となる．不等式（4.2）の左辺第二項を省略すると

$$\frac{\nabla^2\phi}{f}>-\frac{f}{2} \qquad (4.3)$$

となる．条件（4.2）がみたされれば（4.1）はψについて楕円型で，ψの分布が分っている場合，ψの境界値を与えることにより領域内の解ψが求まるわけである．しかし，この際，解ψとしては$\nabla^2\psi$が$-f$より大きいものと小さいもの，言い換えると，絶対渦度が正のものと負のものの2つが存在可能である．北半球では，この中で，絶対渦度が正になるもの（$\nabla^2\psi>-f$）丈が従来取り扱いの対象となっている．条件（4.2）がみたされない時は，（4.1）はψについて双曲型の微分方程式となる．実際の等圧面について（4.2）あるいは（4.3）がみたされるかどうか調べると，この条件が満足されない部分が存在する．そして，そういう所に対しては絶対渦度の値を強制的に零としてしまうことが行われている．これについてはまた後に述べるとして，釣合方程式を一寸別の方から考えてみる．

発散方程式（1.11′）を書き換えると

$$\eta^2=(\zeta+f)^2=2\nabla^2\phi+f^2+(A^2+B^2)+2\frac{\partial D}{\partial t}+2\nabla\cdot\left(D\cdot V+\omega\frac{\partial V}{\partial p}\right)+2u\beta \qquad (4.4)$$

となる．ただし$\beta=\frac{\partial f}{\partial y}$，また$A,B$は

$$A=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (4.5)$$

$$B=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (4.6)$$

で，変形場と称されるものを示している．たとえば，伸縮自在の正方形のゴム板を気圧場上に張りつけておくと，渦や発散がなくてもこの正方形のゴムにはひずみが起り得る．$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=0$ $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}>0$ の場合には渦度も発散もないが，風は相対的に正方形の区域に対し南北から吹き込み東西に吹き出る．この為にそこに置かれた正方形のゴムはひずんで矩形になったり又は菱形になったりする．このような変形を表すのが（4.5），（4.6）で示されるA,Bである．

（4.4）式から，

$$\eta=\zeta+f=\pm\sqrt{I} \qquad (4.7)$$

ただし
$$I=\left\{2\nabla^2\phi+f^2+2\frac{\partial D}{\partial t}+2\nabla\cdot\left(DV+\omega\frac{\partial V}{\partial p}\right)+2u\beta\right\}+(A^2+B^2)=L+(A^2+B^2) \qquad (4.8)$$

$$L=2\nabla^2\phi+f^2+2\frac{\partial D}{\partial t}+2\nabla\cdot\left(DV+\omega\frac{\partial V}{\partial p}\right)+2u\beta$$

となることがわかる．（4.7）式の絶対渦度が実数になるには$I>0$でなければならない．さて，釣合方程式（4.1）がψについて楕円型になるか双曲型になるかは条件（4.2）がみたされるか否かで決った．この条件（4.2）は，釣合方程式を導いた時と全く等しい省略を（4.8）式のLについて行って

$$L\approx 2\nabla^2\phi+2u\beta+f^2$$

とおいた時の，$L\gtrless 0$ の条件と完全に同じである．さて発散方程式（4.4）は，そのままでもψについてモンジュ・アンペール型の微分方程式であって，（4.8）式のLの正負，$L\gtrless 0$が，この微分方程式が楕円型になるか双曲型になるかの基準である．そして，

i) $L>0$ の場合は楕円型で，（4.8）から明らかなように$I>0$となって，（4.7）に示されるようにηとしては，$\eta=+\sqrt{I}>0$と，$\eta=-\sqrt{I}<0$の2つが可能である．われわれが扱って来たのが前者であることはすでに述べた通りである．ϕを与えておいて，ψを境界値問題として解くには色々なやり方が考えられるだろうが，ψとして可能な2つの解のうち絶対渦度ηが正となるものを採ることも既に述べた．これは（4.7）式の根号の前につけられた正の符号を採ることに相当すると考えら

れる.

ii) $0>L>-(A^2+B^2)$ の場合は，(4.4) は双曲型になるが，(4.7) の I は $I>0$ となって渦度が求められる．この場合も $\eta>0, \eta<0$ の2つの解が可能で $\eta>0$ の分を採る．ただし，この場合には，ψ を境界全部で与えると連続な ψ の解を得るには与え過ぎになってしまうことがあるようで，この点をどうするかは今後の問題である.

iii) $-(A^2+B^2)>L$ の時は，(4.7) 式で $I<0$ となる．実際にはこのようになることはまずないとみなして良いのではなかろうか.

結局，上に記したように考えてくると，釣合方程式 (4.1) が，判定条件 (4.2) によって楕円型になる場合は良いとして，判定条件 (4.2) がみたされない——すなわち双曲型——場合の中には，非発散の仮定が許されなくて上述の i) の場合に入るものと，さらに場の変形 (A^2+B^2) が利いて上述の ii)の場合に入るものがあると考えて良かろう．実際の演算で判定条件 (4.2) 又は (4.3) がみたされない時に，強制的に $\eta=0$ と置くのは，そのような時には発散や変形が利いて $I=0$ になると仮定していると解釈してよいだろう.

次に地衡風近似について考えてみよう.

釣合方程式 (4.1) の第一項と第二項だけを採用すると，

$$\nabla^2\phi-f\nabla^2\psi=H_3(\psi,\phi)=0 \tag{4.9}$$

となる．これも一種の釣合方程式で，$\nabla^2\phi/f=\zeta$ という地衡風渦度近似を表している．f の値を一定と仮定すると，(4.9) は

$$\nabla\phi-f\nabla\psi=0 \tag{4.10}$$

となって地衡風近似そのものになる．したがって地衡風近似が許されるかどうかは，(4.1) 式の第三項以下が省略出来るかどうかということと，さらにさかのぼって，(4.1) 式を求めるのに用いた非発散の仮定が差支えないか否かということになる．実際には，省略した各項の大きさを $\nabla^2\phi$ や $f\nabla^2\psi$ の大きさと比べてみればいいのであるが，大体において (4.1) 式の第三項——$2J(u,v)$——は規模の大きい運動を大ざっぱに調べるには省略可能，また発散方程式から釣合方程式を導く際の非発散の仮定も大概の場合（前に記したように釣合方程式が ψ について双曲型になるような場合は別として）は容認出来るとして良いようである．(4.1) 式の第四項——$u\beta$——は大規模な運動や長期予報では無視出来ないかも知れない．しかしながら，規模の小さい現象では u や v の空間微分は無視出来ない．すなわち $J(u,v)$ は省略出来なくて地衡風近似の代りに (4.1) の釣合方程式を用いる必要がある．気圧場の曲率が大きい場合等がこれに該当するわけで，風は地衡風から外れて傾度風に近くなる．実用上は，予報領域のどこかに地衡風では具合の悪い擾乱が存在する場合が少くないので，事情が許せば，釣合方程式 (4.1) を大体において傾度風を与える式とみなして用いるのがよい.

地衡風近似と釣合方程式の違いとして，発散方程式 (1.11) で $\chi=0$ として

$$\frac{\partial D}{\partial t}=f\zeta+2J(u,v)-u\beta-\nabla^2\phi \tag{4.11}$$

とした時に，u,v に釣合方程式 (4.1) から求めたものを用いると $\frac{\partial D}{\partial t}=0$ となるが，地衡風近似 (4.10) による風 u_g, v_g を使うと $\frac{\partial D}{\partial t}=2J(u_g,v_g)-u_g\beta$ となって一般には零とならないことをつけ加えておく．これはエネルギーの問題と関連している.

釣合方程式や地衡風に関する吟味は，正野，岸保，都田，柳井，Bolin, Charney 等によって，発表あるいはその途上にあるので，この辺で止めて，予報に話を戻す.

(b) 釣合方程式を用いた予報

釣合方程式 (4.1) を用いた予報は次のようにすれば出来るであろう．用いる式は

$$\nabla^2\frac{\partial\psi}{\partial t}=H_1(\psi,\chi) \tag{4.12}$$

$$H_2(\psi,\phi)=0 \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=H_3(\phi,\psi,\chi) \tag{4.13}$$

の三つ，すなわち渦度方程式，釣合方程式，温位保存の式である．((4.12) と (4.13) は (1.10) 及び (1.12) から一部の項を省略したものである．) ここに記す予報方式は考えられる一つの方法であって，この外にもやり方があるかもしれない．順を追って記すと，

I 初期値を求めること

観測値 ϕ, $\frac{\partial\phi}{\partial t}\left(\approx\frac{\Delta\phi}{\Delta t}\right)$ から ψ,χ を求めるには第二節，又は第三節でやったようにすれば良い.

II ψの予報

初期値 ψ,χ —(4,12)→ $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ —(外挿)→ ψ

III ψからϕ,χを求めること

ψ
↓ (4.1)
ϕ
↓ (初期値との差をとって)
$\frac{\partial\phi}{\partial t}$

以上 —(4.13)→ χ

以下はII, IIIのくり返しをすればよい.

予報の際に大気を何層かに分けておけば，n 層モデルとなる．もしも $\chi=0$とすると

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_4(\psi) \qquad (4.14)$$

$$H_4(\psi, \phi) = 0 \qquad (4.1)$$

の釣合方程式を用いたバロトロピック・モデルになる．この場合はϕから（4.1）によってψを求め，(4.14) でψをくり返し予報し，必要な時にψから（4.1）でϕを計算すればよい．

(c) 準地衡風近似による予報

これは，上述の釣合方程式による予報と変らないが，(4.10) の地衡風の関係を直ちに用いて

$$\nabla^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} = H_5(\phi, \chi) \qquad (4.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = H_6(\phi, \chi) \qquad (4.16)$$

と書ける．それぞれ，地衡風渦度方程式，温位保存の式である．ψは地衡風近似から求めたが，なおχを残してあるので，準地衡風近似である．この両式から$\frac{\partial \phi}{\partial t}$を消去したものが$\omega$-方程式で，垂直流を計算するのに使われる．通常，(4.15) 式の右辺には，発散 $\nabla^2\chi$ のみが χ に関係した項として残されていて，渦度の垂直輸送や起き上りの項は省略されている．そして，(4.15, 4.16) の両式からχを消去したものが n 層モデルの予報を行うのに用いられる．

非発散 $\chi=0$ の場合が，一番簡単な，地衡風近似を用いたバロトロピック・モデルで，

$$\nabla^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} = H_7(\phi) \qquad (4.17)$$

が予報式である．ここに $H_7(\phi) = J\left(\frac{1}{f}\nabla^2\phi,\ \phi\right)$で，

(4.17) では専ら等圧面のジェオポテンシャルϕのみが計算の対象となる．

あとがき

運動方程式から出発して，数式上で最も簡単な，地衡風近似を用いたバロトロピック・モデルによる予報式までを順を追って記してみた．（大気の運動自体としては，釣合方程式を用いたバロトロピック・モデルによる運動の方が簡単であると云えそうであるが．）全体として，予報式についての批判吟味や解説が足りないうらみがあるが，まえがきにも記した通り，この一文がその為の研究討論の材料になれば幸である．

降水機巧研究会の報告

総合研究「降水機巧の研究」のメンバーが，最近，札幌に会合して，第2回研究懇を談会を開いたので，その概略を報告する．時は1957年2月16日，場所は北海道大学理学部である．メンバーは，後記の発表題目を見て戴くと判るが，遠路，東京からは磯野謙治（東大）仙台からは，山本義一，三浦晃，大竹武（北大）の方々が参加された．研究会は16日，約4時間半にわたって，発表討論が活溌に行われた．又，そのあとで，最近，ハワイの観測から帰られたばかりの中谷宇吉郎教授が，〝マウナ・ロア(ハワイ)の雪〟と題し幻燈付の特別講演をされた．

研究会の後，17日から19日まで，総計12人のスキー・パーティーを編成して，十勝岳にレクリエーションに出かけた．山麓の白金温泉をベースとして，十勝岳新噴火口，泥流スロープにゆき，絶好の快晴の下に，スキーを楽しんだ．この機会を利用して，大竹氏はクロール検定を行うために，各高度の積雪のサンプルを採取した．又，小林，若浜の両氏は，降雪の観測のために，一行の下山後も白銀荘にのこった．

16日に行われた研究会の発表の題目を紹介しておく．会は，Ice Crystal，Nuclei，一般，の三部に分けて行われた．（題目の提出はなかったが，その内容に適当した題目をつけた）

特別講演

中谷宇吉郎（北大・理）：マウナ・ロア（ハワイ）の雪

Ice Crystal

1）小林禎作（北大・低）：diffusion cloud chamberによる雪の crystal habit の研究

2）中谷宇吉郎（北大・理）：dust free airにおける人工雪の成長について

3）磯野謙治（東大・理）：水飽和以下における氷晶の形成過程について

4）樋口敬二（北大・理）：氷晶にあらわれる結晶面の決定

5）板垣和彦（北大・理）：雪の結晶の外形の観察及び微水滴の実測

6）若浜五郎（旧姓・村井）（北大・低）：降水要素中に含まれる不純物について

Nuclei

1）大竹武（東北大・理）：Sea salt nuclei の高度分布と雪粒中の海塩濃度について

2）黒岩大助（北大・低）：海霧の凝結核と maritime との関係

3）熊井基（北大・理）：雪の結晶の凝結核の研究

一　般

1）三浦晃（東北大・理）：含水量測定装置の製作と過冷却霧粒の捕促率について

2）大喜多敏一（北海大）：雨滴粒径分布の高度による変化の実測と計算

3）織笠桂太郎（北大・理）：空中電位と雲形，降水要素の荷電との関係について

4）孫野長治（北大・理）：霜の荷電と過冷却微水滴の荷電

（文責・樋口敬二）