

台風 の 運 動 論

正 野 重 方*

1. 緒 言

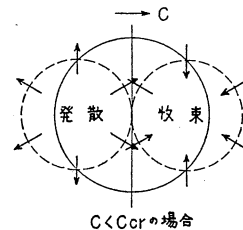
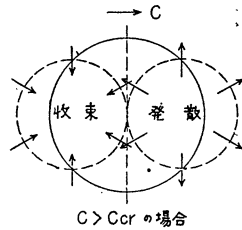
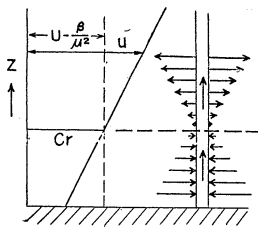
台風の運動論は近年理論的にいちじるしく発達して来たが、佐々木、都田両氏により渦度方程式を用いて台風の進路の数値予報が始められて以来一層進歩して電子計算機による進路予報なども気象研究所の増田、伊藤両氏により非常に成功しつつある。

しかし現在までの所ではいわゆるバロトロピックモデルの範囲に止まっているようである。近い将来にはバロクリニックモデルによる予報も始められるであろう。しかしそれは別としても理論的にこの問題を考えて置くことも意味があろう。また1944年ビヤークネス・ホルンボーが低気圧論を発表したが、その最後に渦の運動を論じている。その論文は多くの示唆を含んでいるが、現在では一般的には余り引用されないようである。恐らくその方法が量的取扱いに不便であるのも一つの原因のように思われる。ここでは渦度方程式によって、同理論を解釈してみた。

2. 円形擾乱に伴う発散

P 座標系における渦度方程式は

$$\zeta_t + u\zeta_x + v\zeta_y + \beta v + \eta Q = 0 \dots\dots\dots (1)$$



である。ただし渦度の鉛直輸送は省略してある、 ζ, η, Q はそれぞれ相対渦度、絶対渦度、水平発散である。

今、流線函数として、一様流に円形擾乱が重なったものを考える。すなわち

$$\psi = -Uy + Vx + A \int_0^{\mu \sqrt{(x-C_x t)^2 + (y-C_y t)^2}}; A > 0 \quad (2)$$

と仮定する。ただし U, V, A, μ はそれぞれ常数とする。(2)を(1)に代入すると、

$$-\mu^2 A \left\{ (U-C_x) \frac{\partial J_0}{\partial x} + (V-C_y) \frac{\partial J_0}{\partial y} \right\} + \beta V + \beta A \frac{\partial J_0}{\partial x} = -\eta Q \dots\dots\dots (3)$$

βV は小さいので省略する。上式を書き直すと、

$$-\mu^3 A \left\{ (U-C_x - \frac{\beta}{\mu^2}) \cos \theta + (V-C_y) \sin \theta \right\} J_1 = -\eta Q \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{ただし } \tan \theta = \frac{y-C_y t}{x-C_x t}.$$

今 ηQ を

$$\eta Q = (P_1 \cos \theta + P_2 \sin \theta) J_1 \dots\dots\dots (5)$$

と置くと、

$$\mu^3 A (U-C_x - \frac{\beta}{\mu^2}) = -P_1 \dots\dots\dots (6)$$

$$\mu^3 A (V-C_y) = -P_2 \dots\dots\dots (7)$$

したがって

$$C_x \cong U - \frac{\beta}{\mu^2} \text{ に従って } P_1 \cong 0 \dots\dots\dots (8)$$

$$C_y \cong V \text{ に従って } P_2 \cong 0 \dots\dots\dots (9)$$

これらの式は次のように解釈できる。臨界の場合 (等

号が成立つ場合) には発散、収束はない。速度が臨界速度 $C_{cr} = U - \frac{\beta}{\mu^2}$ より大きい場合には前半に発散、後半に収束を伴う。あるいは逆に前半に発散があり後半に収束があるときには、臨界速度より大きい。以上の逆も成立する。 C_x, C_y が与えられるか、 Q が与えられるかは他の方程式 (断熱式、連続の方程式等) からきめられるもので、渦度方程式のみからはきまらない。渦度方程式からは何れか一方を与えて一方がきまるということ以上は言えない。

* 東京大学

3. ビヤークネス・ホルンボアの理論との比較

ビヤークネス・ホルンボアは

$$v-v'-2C \cong 4\omega a \sigma_p^2 \cos \bar{\varphi} \begin{matrix} \text{西側発散} & \text{東側収束} \\ \text{無発散} & \\ \text{西側収束} & \text{東側発散} \end{matrix}$$

という規準を出した。v, v' は円形渦の南端及び北端での切線風速度、C はここでの C_x に相当する。a は地球の半径、σ_p は円形渦の角半径、φ̄ は中心の緯度である。これを書直すと、v=U+v_θ, v'=-U+v_θ, σ_pa=r, $\frac{2\omega \cos \bar{\varphi}}{a} = \beta$ であるから、

$$U-C \cong \beta r^2 \dots \dots \dots (10)$$

あるいは

$$C \cong U - \beta r^2 \begin{matrix} \text{西側収束} & \text{東側発散} \\ \text{無発散} & \dots \dots \dots (11) \\ \text{西側発散} & \text{東側収束} \end{matrix}$$

(11) は (8) の示すものと全く一致する。しかし臨界速度の形式が一致しない。この意味を考えよう。臨界速度のみを問題にしているので、Q=0 と仮定する。

任意の円形渦を考える。すなわち

$$\psi = \psi(r) \quad \zeta = \zeta(r) \quad r = \sqrt{(x-Ct)^2 + y^2} \dots (12)$$

と置くと、

$$(U-C) \zeta_r \cos \theta + \beta \psi_r \cos \theta = 0 \dots \dots \dots (13)$$

になる。したがって一般的速度分布を持つ渦の速度公式は

$$C = U - \frac{\beta \psi_r}{\zeta_r} \dots \dots \dots (14)$$

である。今半径 r, r+dr の円環を考える。なお ζ = $\frac{1}{r} (r\psi_r)$ r である。

今 ψ_r=v_θ=B と置くと、ζ_r= $-\frac{B}{r^2}$ であるので、

$$(14) \text{ は } C = U - \beta r^2 \dots \dots \dots (15)$$

であり、ビヤークネス・ホルンボアの公式であり、これは一つの円環内で速度が一定であるような場合である。

次に ψ = AJ₀, ζ = -μ²AJ₀ = -μ²ψ と置くと、

$$C = U - \frac{\beta}{\mu^2} \dots \dots \dots (16)$$

になり、(8) になる。このようなモデルの相違によって臨界速度の差が出たのである。ビヤークネス等のモデルでは円環毎に臨界速度が異なるので形は維持されない。

ビヤークネス・ホルンボアの理論の一つの結論として臨界状態においては波自身も停止するということが述べられている。しかしこの結論は間違っているようであ

る。臨界状態では谷（正弦波の場合であるが円形渦についても同じことが成立つ）の前面にも後面にも質量発散も収束もないので、地上での気圧変化が起らないから、波も停止するというのが、その所論である。この誤りの原因は次のようなことである。すなわち計算した発散分布は動いている波に相対的な分布である。すなわち z-座標系で、傾向方程式の被積分関数を書くと、

$$\begin{aligned} (\text{div}(\rho \mathbf{V}))_m &= \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right)_m \\ &= \left(\frac{\partial(u+C_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right)_f \\ &= \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right)_f \\ &\quad + C_x \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_f = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right)_f = -C_x \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_f \neq 0$$

速度発散では動いていても動いていなくても同じであるが、質量発散では違うのであって、動く気圧系に相対的な質量発散がなくても、地上では気圧変化が起り得る。

p 座標系では速度発散自身についても同じことがいえる。すなわち Q = -ω_p (連続の方程式) を積分すると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{dp}{dt} \right)_{0m} &= \omega_{0m} = \int_{p_0}^D Q_m dp = g\rho_0 \left\{ \frac{\partial z}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{V} \cdot \nabla z - w \right\}_{0m} = 0 \end{aligned}$$

とする。

$$\begin{aligned} \omega_{0m} &= g\rho \left(\frac{dz}{dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla z \right) = g\rho_0 \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{V} + \mathbf{C}) \cdot \nabla z \right)_f = \omega_{0f} + g\rho_0 \mathbf{C} \cdot \nabla z_0 = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \omega_{0f} = -g\rho_0 \mathbf{C} \cdot \nabla z_0 \neq 0$$

4. 発 達

(2) において、A, μ に時間の函数の場合には (3) の代りに

$$\begin{aligned} &-\mu^2 \frac{\partial A}{\partial t} J_0 - \mu^2 A \frac{\partial J_0}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} \\ &\quad - \mu^2 A \left\{ (U-C_x) \frac{\partial J_0}{\partial x} + (V-C_y) \frac{\partial J_0}{\partial y} \right\} \\ &\quad + \beta A \frac{\partial J_0}{\partial x} = -\eta Q \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

になる。したがって

$$\begin{aligned} &\mu^2 \frac{\partial A}{\partial t} J_0 - \mu^2 A \cdot r J_1 \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu^2 A \left\{ (U-C_x \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta}{\mu^2}) \cos \theta + (V-C_y) \sin \theta \right\} J_1 \\ &= \eta Q \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

したがって

$$\eta Q = (P_1 \cos \theta + P_2 \sin \theta) J_1 + D_1 J_0 + D_2 J_1 r \dots \dots \dots (19)$$

と置くと,

$$D_1 = \mu^2 \frac{\partial r}{\partial t} \quad D_2 = -\mu^2 A \frac{\partial \mu}{\partial t} \dots \dots \dots (20)$$

になる。D₁ は中心示度の深まり, D₂ は半径の広がりを表わし, いずれも中心に対して対称である。すなわち対称的な発散の分布は発達に寄与し, 非対称的な発散の分布が速度に影響する。β 項の影響が省略できる場合には以上の結果は任意の円形渦に対して成立つことである。

5. パロクリニック大気中の鉛直円形台風の速度

以上は薄い円渦についての結果であるが, 円形柱状の台風の場合について考える。簡単のために台風の軸は鉛直とする。(6) (7) (20) を p₀ から 0 まで p について積分すると,

$$\left. \begin{aligned} \overline{\mu^2 \frac{\partial A}{\partial t}} &= \overline{D_1} & -\overline{\mu^2 A} &= \overline{D_2} \\ \overline{\mu^3 A \overline{U}} - C_x \overline{\mu^3 A} - \beta \left(\frac{A}{\mu^2} \right) &= -\overline{P_1} \\ \overline{\mu^3 A \overline{V}} - C_y \overline{\mu^3 A} &= -\overline{P_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

これより発達および速度が出てくる。ところで $\overline{\eta Q} = -\overline{\eta \omega_p} = -\overline{\eta \omega_0}$ であるから, $\overline{D_1}, \overline{D_2}, \overline{P_1}, \overline{P_2}$ などは p₀ 面における気圧変動を分解したときに現れるものである。すなわち地上気圧変動を

$$\omega_0 = (\omega_{10} \cos \theta + \omega_{20} \sin \theta) J_1 + \omega_{30} J_0 + \omega_{40} J_1 r$$

と置くと,

$$\left. \begin{aligned} C_x &= \frac{\mu^3 A \overline{U}}{\mu^3 A} - \beta \left(\frac{A}{\mu^2} \right) (\mu^3 A \overline{U})^{-1} - \frac{\overline{\eta}}{\mu^3 A \overline{U}} \omega_{10} \\ C_y &= \frac{\mu^3 A \overline{V}}{\mu^3 A} - \frac{\overline{\eta}}{\mu^3 A \overline{V}} \omega_{20} \end{aligned} \right\} (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{\mu^2 \frac{\partial A}{\partial t}} &= \overline{\mu^2}^* \frac{\partial A}{\partial t} = \overline{\eta} \omega_{30} \\ \overline{\mu^2 A \frac{\partial \mu}{\partial t}} &= \overline{\mu^2 A}^* \frac{\partial \mu}{\partial t} = -\overline{\eta} \omega_{40} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

になる。台風の構造がわからない限り荷重函数がきまらないので, 仮りに鉛直方向に一様な台風とすれば,

$$\left. \begin{aligned} C_x &= \overline{U} - \frac{\beta}{\mu^2} - \overline{\eta} \omega_{10} \\ C_y &= \overline{V} - \overline{\eta} \omega_{20} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\overline{\eta}}{\mu^2} \omega_{30} \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} &= -\frac{\overline{\eta}}{A \mu^2} \omega_{40} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25)$$

になる。ω は地上の気圧傾向の分布より求められる。したがって通常予報を行う場合には各層の一般流のベクトル平均を求め, これに等変圧線図より求めた気圧傾向の補正を加えれば, 台風の正しい速度が得られることになる。

数値予報の場合には ω 分布まで計算によって出せるが, 現在普通に行われているように, ω_{p0} = 0 のような仮定をしたのでは良い結果が得られるかどうかは疑問である。

参考文献

Bjerknes, J. and J. Holmboe, 1944: On the Theory of Cyclones. Journ. meteor. 1, 1-22.
 佐々木嘉和, 都田菊郎, 1954: Prediction of Typhoon Tracks on the Basic of Numerical Prediction Method. Proc. UNESCO Symposium on Typhoons, Japanese National Commission for UNESCO, 221-233.