551. 509. 39

天気の持続性について(補遺)*

渡 辺 次 雄**

1. まえがき

さきに筆者[1]は天気持続係数 f と天気持続率 F の関係式を与えたが, F を f の陽明的 (explicit) な式として表わすことができなかった. この補遺では天気持続係数をもととして, 天気の確率, 天気持続率, 天気のエントロピーなどを表わす式をみちびくことができたので報告しておきたい.

2. 天気持続係数と天気の確率との関係

今, ある天気系列が雨天と晴天とからなるとし, 雨天の確率を A, 雨天の翌日がまた雨天になる確率を B とするとき,

$$f_1=\frac{B}{A}$$

が雨天の持続係数で, 晴天の確率を C, 晴天の翌日がまた晴天である確率を D とするとき,

$$f_2=\frac{D}{C}$$

を晴天持続係数という. 従って

$$B=Af_1, \quad D=Cf_2 \qquad (1)$$

なる関係がある.

まず, 考える期間の全日数を N とすると, 雨天日数は AN, 晴天日数は CN, 又, 雨天の次が雨天であった回数は $AN\times B=ABN$, 晴天の次が晴天であった回数は $CN\times D=CDN$ などであるから, 第1表がえられる.

第1表 天気継続生起のもようを示す

		後		
		○	●	計
前	●	$A(1-B)N$	ABN	AN
	○	CDN	$C(1-D)N$	CN
	計	CN	AN	N

従って,

$$A(1-B)N+CDN=CN, \qquad (2)$$

$$ABN+C(1-D)N=AN, \qquad (3)$$

$$A(1-B)N=C(1-D)N. \qquad (4)$$

確率の性質から

$$A+C=1 \qquad (5)$$

なる関係がある. ところが (4) を使うと (2) と (3) が同値であることが証明でき, また, 明らかに (2) と (4) は同値であるから, 結局, 独立な関係式は (2) と (5) である.

さて, (1), (2), (5) から B, C, D を消去して

$$(f_1-f_2)A^2-2(1-f_2)A+(1-f_2)=0 \qquad (6)$$

が得られる. まず $f_1=f_2\neq1$ のときは (6) から

$$A=\frac{1}{2},$$

従って

$$C=\frac{1}{2}$$

が得られる. また, $f_1=f_2=1$ のときは, 原式から $A=C=\frac{1}{2}$ であるから, 結局 $f_1=f_2$ のときには一般に $A=C=\frac{1}{2}$ であることがわかる.

次に, $f_1\neq f_2$ のときには, (6) より

$$F(A)=A^2-2aA+a=0 \qquad (6')$$

をうる. ここに,

$$a=\frac{1-f_2}{f_1-f_2}.$$

A が実数であることから

$$(6')\ の判別式=4a(a-1)=\frac{4(f_1-1)(f_2-1)}{(f_1-f_2)^2}\geqq0,$$

$$\therefore\ f_1,\ f_2>1 \quad あるいは \quad f_1,\ f_2<1 \qquad (7)$$

f_1, f_2 の一方が1のときには, 判別式=0, 従って他も1となり, これはすでに吟味してあるから, 上の (7) 式には等号をつけてない.

次に $a<0$, 従って $1<f_2<f_1$ あるいは $f_1<f_2<1$ のときには (6′) の一根は負, 他根は正, そして,

$$F(1)=1-2a+a=1-a>0,$$

$$F(0)=a<0$$

であるから, 正根が0と1の間にあることがわかる. これが A の値である.

故に,

* T. Watanabe: On the Persistence of Weather (Addendum).

** 気象庁研修所

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1-f_2}{f_1-f_2}+\frac{\sqrt{(f_1-1)(f_2-1)}}{|f_1-f_2|}, \\ &\text{従って,} \\ C &= \frac{1-f_1}{f_2-f_1}-\frac{\sqrt{(f_1-1)(1f_2-1)}}{|f_1-f_2|}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

次に，$a>1$，従って $1<f_1<f_2$ あるいは $f_2<f_1<1$ のときには（6′）の二根は正で，

$$F(1)=1-2a+a=1-a<0$$

であるから，一根は0と1の間，他根は1より大である．よって小根が A の値を与え，

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1-f_2}{f_1-f_2}-\frac{\sqrt{(f_1-1)(f_2-1)}}{|f_1-f_2|}, \\ C &= \frac{1-f_1}{f_2-f_1}+\frac{\sqrt{(f_1-1)(f_2-1)}}{|f_1-f_2|}. \end{aligned}\right\} \quad (8')$$

（8），（8′）をまとめて，$f_1 \neq f_2$ のときには

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{f_1\sim f_2}\left[(f_2\sim 1)\sim\sqrt{(f_1-1)(f_2-1)}\right], \\ C &= \frac{1}{f_1\sim f_2}\left[(f_1\sim 1)\sim\sqrt{(f_1-1)(f_2-1)}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

従って，また，

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{f_1}{f_1\sim f_2}\left[(f_2\sim 1)\sim\sqrt{(f_1-1)(f_2-1)}\right], \\ D &= \frac{f_2}{f_1\sim f_2}\left[(f_1\sim 1)\sim\sqrt{(f_1\sim 1)(f_2-1)}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

3. 天気持続率と天気持続係数との関係

前節の結果を使うと，天気持続率は容易に天気持続係数で表わすことができる．すなわち，晴天の実際の平均持続日数 a は第1表より

$$a=\frac{CN}{C(1-D)N}=\frac{1}{1-D}$$

で与えられ，また晴天の確率が C であることから予期される平均持続日数 b は

$$b=\frac{1}{1-C}$$

であるから，天気持続率の定義から

$$F=\frac{a}{b}=\frac{1-C}{1-D}. \quad (11)$$

また（4）式から $1-D=\dfrac{A(1-B)}{C}$ であるから，これを上式に代入して，

$$F=\frac{C(1-C)}{A(1-B)},$$

さらに $A=1-C$ であることから，

$$F=\frac{A(1-A)}{A(1-B)}=\frac{1-A}{1-B}. \quad (12)$$

(11)，(12) より晴天の持続率も，雨天の持続率もひとしいことがわかる．

さて，(11) 式に（9），(10) を代入し，$f_1 \neq f_2$ を考慮すると，

$$F=\frac{1-\dfrac{1}{f_1\sim f_2}\left[(f_1\sim 1)\sim\sqrt{(f_1-1)(f_2-1)}\right]}{1-\dfrac{f_2}{f_1\sim f_2}\left[(f_1\sim 1)\sim\sqrt{(f_1-1)(f_2-1)}\right]}$$

$$=\frac{(f_1\sim f_2)-\left[(f_1\sim 1)\sim\sqrt{(f_1-1)(f_2-1)}\right]}{(f_1\sim f_2)-f_2\left[(f_1\sim 1)\sim\sqrt{(f_1-1)(f_2-1)}\right]}. \quad (13)$$

しかし，これは f_1，f_2 に関して対称式ではない．そこで (12) 式に（9），(10) を代入して，同様に計算し，

$$F=\frac{(f_1\sim f_2)-\left[(f_2\sim 1)\sim\sqrt{(f_1-1)(f_2-1)}\right]}{(f_1\sim f_2)-f_1\left[(f_2\sim 1)\sim\sqrt{(f_1-1)(f_2-1)}\right]} \quad (14)$$

をつくり，(13)，(14) 式の右辺が等しいことから，比例の定理により

$$F=\frac{(f_1\sim f_2)\left[f_1\sqrt{f_2\sim 1}-f_2\sqrt{f_1\sim 1}\right]}{(f_1\sim f_2)\left[f_1\sqrt{f_2\sim 1}-f_2\sqrt{f_1\sim 1}\right]-\left[\sqrt{f_1\sim 1}\sim\sqrt{f_2\sim 1}\right]\sqrt{f_1\sim 1}\ \sqrt{f_2\sim 1}(f_1-f_2)}$$

$$=1-\frac{\left[\sqrt{f_1\sim 1}\sim\sqrt{f_2\sim 1}\right]\sqrt{f_1\sim 1}\sqrt{f_2\sim 1}}{f_1\sim f_2}\times$$

$$\times\frac{f_1-f_2}{f_1\sqrt{f_2\sim 1}-f_2\sqrt{f_1\sim 1}}.$$

ところが，f_1，$f_2>1$ のとき $F>1$ であるから，このとき

$$F=1+\frac{\left[\sqrt{f_1\sim 1}\sim\sqrt{f_2\sim 1}\right]\sqrt{f_1\sim 1}\sqrt{f_2\sim 1}}{f_1\sqrt{f_2\sim 1}\sim f_2\sqrt{f_1\sim 1}}. \quad (15)$$

また f_1，$f_2<1$ のとき $F<1$ であるから，このとき

$$E=1-\frac{\left[\sqrt{f_1\sim 1}\sim\sqrt{f_2\sim 1}\right]\sqrt{f_1\sim 1}\sqrt{f_2\sim 1}}{f_1\sqrt{f_2\sim 1}\sim f_2\sqrt{f_1\sim 1}}. \quad (15')$$

(15)，(15′) をまとめて

$$F=1+\frac{\left[\sqrt{f_1\sim 1}\sim\sqrt{f_2\sim 1}\right]\sqrt{f_1-1}\sqrt{f_2-1}}{f_1\sqrt{f_2\sim 1}\sim f_2\sqrt{f_1\sim 1}}. \quad (16)$$

となる．なぜなら，f_1，$f_2>1$ のときには $\sqrt{f_1-1}\sqrt{f_2-1}=\sqrt{f_1\sim 1}\sqrt{f_2\sim 1}$ であるが，f_1，$f_2<1$ のときには $\sqrt{f_1-1}\sqrt{f_2-1}=(i\sqrt{f_1\sim 1})(i\sqrt{f_2\sim 1})=-\sqrt{f_1\sim 1}\times\sqrt{f_2\sim 1}$ となるからである．

4. 天気のエントロピーと天気持続係数の関係

天気のエントロピーを H bits とすると，

$$
\begin{aligned}
-H &= A\log_2 A + B\log_2 B \\
&= \frac{1}{f_1 \sim f_2}\left[(f_2 \sim 1) \sim \sqrt{(f_1-1)(f_2-1)}\right] \\
&\quad \times \log_2 \frac{(f_2 \sim 1) \sim \sqrt{(f_1-1)(f_2-1)}}{f_1 \sim f_2} \\
&\quad + \frac{1}{f_1 \sim f_2}\left[(f_1 \sim 1) \sim \sqrt{(f_1-1)(f_2-1)}\right] \\
&\quad \times \log_2 \frac{(f_1 \sim 1) \sim \sqrt{(f_1-1)(f_2-1)}}{f_1 \sim f_2} \\
&= \frac{\sqrt{f_1 \sim 1} \sim \sqrt{f_2 \sim 1}}{f_1 \sim f_2}\Bigg[\left[\sqrt{f_1 \sim 1} + \sqrt{f_2 \sim 1}\right] \\
&\quad \times \log_2 \frac{\sqrt{f_1 \sim 1} \sim \sqrt{f_2 \sim 1}}{f_1 \sim f_2} + \left[\sqrt{f_1 \sim 1}\log_2 \sqrt{f_1 \sim 1}\right. \\
&\quad \left. + \sqrt{f_2 \sim 1}\log_2 \sqrt{f_2 \sim 1}\right]\Bigg]
\end{aligned}
$$

で与えられる.

5. あとがき

天気の確率 A, C とエントロピー H は $f_1 \sim f_2 = (f_1 \sim 1) \sim (f_2 \sim 1)$ を用いて今少し簡略できるが, B, D および F は f_1, f_2 も単独で入っているから不可能である. ともかく, このようにして, 天気持続係数をもとにして, 他の天気持続性を表わす示標を表現することができ, 相互の量的関係が明瞭にされたわけである.

参考文献

1) 渡辺次雄 (1960): 天気の持続性について, 天気, **7**, 207～211.

故河田好敦君をしのんで

都田菊郎　千秋鋭夫　新田　尚

1960年7月22日夕刻, 信じがたいことですが, 河田君は遂に帰らぬ人になりました. 自宅に近い, 鵠沼海岸の引地川口で突然の心臓の発作が河田君を襲ったのです. 時に28歳――余りに短い生涯でした. 河田君は東大数物系大学院気象学教室の将来を嘱された学生として, 博士コースの最終年を卒えようとしておられました. 家庭には結婚2年余りの最愛の喜久子夫人と誕生後1才の愛嬢敦子さんがあり, よき夫, 子ぼんのうな父親として幸福な生活を送っておられたようです.

河田君は学究的な人でしたが, 趣味もひろく, 中でもダンスは玄人の域に達していました. またベスト・ドレッサーとして, そのスマートさでも他を抜きん出ておりました.

円満な人柄とユーモラスな話しぶりは人を魅了しましたが, その反面で口の悪さは仲々隅におけないものでした.

気象学上一番興味をもった問題は, 山をめぐる気流を気象力学的に究明することでした.

即ち, 徒来は山に気流が衝突したとき, 気柱が縮むという効果は考えられていたのですが, 気流が山の両側に分れて廻って行くことは考慮されていなかったのです. この問題を数学的にキチンと解くことは仲々困難な仕事です. 後で判ったことですが, 彼が亡くなった時より2週間前に, この問題がやっと解けたところだったのです.

彼はこの仕事の他にひそかに “Dead water” の問題を研究していました. つまり, 山の下流に水の淀んだところができますが, それはどんな具合にして生ずるかということです. 口数の少ない彼はこの “Dead water” を誰にも云わず, コツコツとしらべていました.

その彼が, 突然, 湘南の海に消えたのです. 何か妙な気がします. もっとも, こんなことを云えば, 皮肉屋の彼はニヤニヤ笑うことでしょうが.