

## 積雲対流に関する理論的研究\*

浅井 富雄\*\*

## 1. はしがき

近年における気象力学の大きな進歩は、大気運動に含まれる諸々のスケールの運動を分離し、その各々の物理的性質を把握したことにあるといわれている。ところで大気は常に一つのまとまった系として運動しており、異なるスケールの運動がしばしば相互に不可分のものとなる。気象学の進歩の促進に大いに貢献したスケールの概念は他方異質のスケールの運動の間の相互作用という厄介な問題を提起している。

異なるスケールの運動の間の相互作用については各分野で既にかなり論じられている。例えば平均帯状流と高低気圧波動との相互作用の研究がその一つで、相互のエネルギー変換をはじめその機構については理論的にも解析的にも内容が豊富になっている。しかしこれら両者はともに準静力学的、準地衡風の平衡で特徴づけられるという点でスケールは異なっても異質というにはあまりにも類似性がありすぎる。事実今日の数値予報や大循環の数値実験等では、これらは全く一視同仁に扱われている。その点積雲対流と大規模運動は真にスケールの異なる異質の運動の相互作用というにふさわしい新しい問題である。

熱対流はいうまでもなく静力学的に不安定な場においてその不安定を解消すべく発現する運動である。大気中ではその際しばしば水蒸気が凝結して潜熱を放出するため通常自由大気中に見出される条件付不安定な成層のもとでも対流が起る。いずれにしても不安定な気層のもつ位置エネルギーを運動エネルギーに変え、その際熱の上方向への輸送が伴われる。ここでは鉛直運動が目立ち、こ

の対流過程の時間スケールは大雑把にいつて10分のオーダー、空間スケールも1km前後のオーダーのものである。一方高低気圧系等のいわゆる大規模擾乱は水平方向に温度傾度のある場のもつ位置エネルギーによつて養われ、運動は準水平でそれによつて熱の水平輸送がおこなわれる。この過程の時間スケールは1日のオーダーであり、空間スケールは1000kmのオーダーである。両者の性質にはかくも大きな差異があり、一体どのようにして両者は結びつくのであろうか。

## 2. 大規模運動と積雲対流

大気の大規模な運動を記述するのに積雲対流等の小規模な現象の影響を微細な観測網や計算のための格子網を用いないで如何にして導入するかということは極めて現実的なそして実用上不可欠といってよい問題である。小規模な現象の集団の平均値、統計的性質を大規模な場——小規模な現象にとっては平均場、一般場——の量で表現しようという試みは古くは気体運動論から乱流論等々にその例を見出すことができる。この意味では上記問題は決して質的に新しい型の問題ではない。しかし一方この問題特有のむづかしさを含んでいることも確かである。例えば、(1)積雲対流を分子等の運動のようにランダムとは考え難い。(2)大規模運動と積雲対流群とは相互に敏感に応答し、従つて平均量と変動量との非線型相互作用が不可避免的に重要になりそうである。等が考えられる。

大気の大規模な運動を記述するのに通常次の方程式が用いられる。

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{A} \bar{V}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{A} \bar{W}) - S_m = S_e - (\nabla \cdot \bar{A}' \bar{V}') + \frac{\partial}{\partial z} \bar{A}' \bar{W}' \quad (2.1)$$

\* Theoretical Study of Cumulus Convection  
(昭和43年度日本気象学会賞受賞記念講演)

\*\* T. Asai, 京都大学理学部  
——1968年6月8日受理——

ここで

$$A = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{V} \\ \rho \theta \\ \rho q \\ \rho \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 2\Omega \times \rho \mathbf{V} - \nabla P + \rho \mathbf{F} \\ \frac{\theta}{C_p T} \rho Q \\ \rho M \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = \frac{1}{\Delta t \Delta x \Delta y} \iiint A dx dy dt, A' = A - \bar{A} \quad (2.2)$$

$\mathbf{V}$ ,  $W$  はそれぞれ速度の水平成分, 鉛直成分である。 $\theta$  は温位,  $q$  は比湿,  $\rho$  は空気密度,  $P$  は気圧,  $\Omega$  は地球自転の角速度,  $\mathbf{F}$  は摩擦力,  $C_p$  は空気の定圧比熱,  $Q$  は非断熱加熱率,  $M$  は水蒸気生成率である。 $A'$  は  $A$  の或る空間, 時間平均値  $\bar{A}$  (通常 100km, 1時間オーダーでの平均) からの偏差,  $S_m$  は  $S$  の  $\bar{A}$ ,  $\bar{\mathbf{V}}$ ,  $\bar{W}$  等平均量のみ関数部分で, 残りを  $S_e$  で表わす。(2.1) 右辺は平均操作によってマスクされた小規模な擾乱に起因する項である。例えば今  $A$  として  $\rho \theta$  をとれば (2.1) は熱力学方程式で右辺は見掛け上の熱源となる。そこで我々はこの偏差量に起因する項を記述する法則を知らねば上記運動を完全に理解することはできない。

ここではこの乱渦の構成要素の一つとして積雲対流を考える。積雲対流という物理的には同じ性質をもつても空間, 時間的大きさはかなり異なり得るし又或る時刻についてみればその発達段階の異なるものが共存し得る。そこでさらに問題を単純化して単一モードの対流セルで或る領域, 或る時間内の対流を代表させることにする。これは結局単一成分の擾乱のみを考えることであって, 乱流論でいう closure assumption の一つとも, あるいは基本場と単一波長の擾乱との相互作用を考えることとも見なされる。かくして問題は平均場とそれに重畳された単一モード (通常の擾乱であれば波長であるが, 積雲対流では上昇流と下降流のスケールが異なるので波長というよりはスケールと, もう一つそれらの面積比というパラメータが必要になる) の擾乱との相互作用という形式的には比較的簡単な型の問題となる。このような考え方にもとづいて考案された積雲対流モデルを次節以下で述べる。

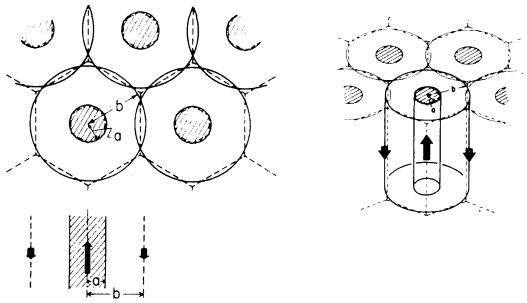
ところで積雲対流群のなす効果を平均場即ち大規模運動を記述する変量で表現しようとする試みは既に若干なされつつある。Manabe, Smagorinsky, 等 (1965) の大気大循環モデルにおいては, 積雲対流の効果を次のように導入している。すなわち, 空気が水蒸気で飽和し, 気温減率が湿潤断熱減率より大きい時, 積雲対流が起り, その不安定層で相当温位を一様にし相対湿度を 100% とする。その間全エネルギー ( $\phi + C_p T + Lq$ ) は保存され

る。という条件で気温, 水蒸気の鉛直分布を調節する。大規模運動と対流との時間スケールの大きな違いを逆に利用したわけである。ここで調節を導入する臨界値として 100% の相対湿度を用いることや相当温位一定に調節する点に問題があるように思う。熱帯性低気圧にとって積雲対流は不可欠な構成要素であつて, 積雲対流群との相互作用こそ台風論の主題である。台風の発生, 発達に関する理論やまた数値実験で台風を再現しようという試みで様々の迂余曲折を経た後, 台風と積雲対流群との相互作用を次のようにして考える方向に進んでいる。すなわち Ooyama (1963) は過去の失敗に照らして直接個々の対流の上昇流に伴う凝結を考えず, 台風域内で解放される潜熱は主に摩擦層で収束した水蒸気量に由来するものと考え, 台風スケールの運動にもとづく摩擦層での水平収束量, 従つてその上面での上昇速度に潜熱の解放量を比例させた。以後幾人かの人々による研究はあるが基本的な考え方は同じである。Charney と Eliassen (1964) は摩擦層における収束量という制約をはずし, Kuo (1965) はパラメータとして不確定な比例係数の物理的内容に多少立ち入った議論を進めた。Syono と Yamasaki (1966) は凝結により解放される潜熱の鉛直分配率が台風の発達に大きな影響をもつとして工夫をこらしている。一方短期予報に用いられている数値予報モデルでも, 上昇域での静力学的安定度を調節することによつて潜熱放出の効果をとり入れようとしている。

以上それぞれの対象に応じて, 直接積雲対流現象をとり扱うことなく, 対流のもつ本質的な役割だけを抽出した巧妙な手法が考案された。しかしながらそこには常に不確定なパラメータや仮定が混在している。その不明確なものの物理的内容を一つずつ明らかにしていくにはやはり積雲対流やその集団と大規模運動の相互作用のメカニズムに立ち入った研究も同時に進められねばならない。

### 3. 積雲対流モデル

多数の対流雲の分布しているある領域を上昇運動域と下降流域からなる円柱状の多数のセルで満たされているとしてモデル化したのが第 1 図である。上昇気柱 (雲域) の半径を  $a$  とし, それらは  $2b$  の間隔で分布しその間は下降流域 (無雲域) である。Bjerknes (1938) が最初に指摘したように, 条件付不安定な成層中で湿潤断熱上昇気塊を囲むまわりの補償的下降流の乾燥断熱運動による加熱作用は上昇気流域の拡大を抑制しようとする。



第1図 積雲対流群のモデル

従って上昇流域は或る値以上には拡がり得ないことになる。一方、エントレインメントや渦混合によって雲の側壁を通して運動量、顕熱、潜熱等の交換が雲内外の間でおこなわれる。この種の効果については bubble, plume, jet, 等形はそれぞれ異なるが多くの人々によって研究された(例えば, Scorer and Ludlam, 1953; Levine, 1959; Mason and Emig, 1961; Priestley and Ball, 1955; Morton, Taylor and Turner, 1956; Squires and Turner, 1962; Haltiner, 1959; Asai, 1960 等)。いずれにしても側壁を通しての混合の効果は飽和湿潤気塊のもつ浮力を減じ従って上昇運動の発達を抑制することにある。そのため上昇気塊の水平規模の小さいものは背の高い積雲には発達し得ない。従ってこの水平混合モデルは積雲の水平規模の下限を与え得るが上限については何も言及し得ない。

水平混合の他に上昇気流に伴うまわりの補償的下降気流を考慮に入れたモデルが著者等(1967)によって考案された。ここでそのモデルの物理的性質を見やすくするため次のような単純化をおこなう。或る高度で、上昇気柱とまわりの下降域のそれぞれの平均の鉛直速度を  $W_a$ ,  $W_b$  温位を  $\theta_a$ ,  $\theta_b$  とすると、

$$\frac{\partial W_a}{\partial t} = \frac{g}{\Theta}(\theta_a - \theta) - \frac{2\nu}{a^2}(W_a - W_b) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \theta_a}{\partial t} = S_a W_a - \frac{2\nu}{a^2}(\theta_a - \theta_b) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \theta_b}{\partial t} = -S_b W_b - \frac{2\nu\sigma^2}{a^2(1-\sigma^2)}(\theta_b - \theta_a) \quad (3.3)$$

$$\sigma^2 W_a + (1-\sigma^2)W_b = 0 \quad (3.4)$$

$$\sigma^2 \theta_a + (1-\sigma^2)\theta_b = \theta \quad (3.5)$$

(3.1) は上昇気柱内の鉛直運動に関する運動方程式で浮力と摩擦力とによって支配され、まわりの下降域の鉛直速度は連続の式から得られる。 $\sigma \equiv a/b$ , 従って  $\sigma^2$  は上昇域の全域に対して占める面積比である。気圧は常に

静力学的平衡にあるとする通常の積雲モデルで用いられる仮定を使い、非線型項は無視した。 $\Theta$  はある標準の温位(一定),  $g$  は重力の加速度である。(3.2), (3.3) は熱力学の式で、今上昇気柱は湿潤で水蒸気の凝結はそこでのみおこるとすると  $S_a$ ,  $S_b$  はそれぞれ次式で表わせる。

$$S_a = -\frac{\partial \theta_e}{\partial z} = \frac{\theta}{T}(\Gamma - \Gamma_s)$$

$$S_b = \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\theta}{T}(\Gamma_a - \Gamma)$$

$T$ ,  $\theta$ ,  $\theta_e$  は水平平均の気温, 温位, 相当温位であり,  $\Gamma$ ,  $\Gamma_a$ ,  $\Gamma_s$  は気温減率, 乾燥断熱減率, 湿潤断熱減率である。(3.1)~(3.3) の右辺第2項はそれぞれ雲内外の水平混合の効果を示し,  $\nu$  は渦交換係数である。

(3.4) と (3.5) を用いると, (3.1)~(3.3) は次のようにまとめられる。

$$\frac{\partial W_a}{\partial t} = \frac{g}{\Theta}(1-\sigma^2)(\theta_a - \theta_b) - \frac{2\nu}{a^2(1-\sigma^2)}W_a \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta_a - \theta_b) = S_b\left(\delta - \frac{\sigma^2}{1-\sigma^2}\right)W_a - \frac{2\nu}{a^2(1-\sigma^2)}(\theta_a - \theta_b) \quad (3.7)$$

但し  $\delta \equiv S_a/S_b$  である。渦交換係数  $\nu$  は上昇気柱の側壁でその内外の上昇, 下降気流の速度差に比例するととして (Kuo, 1962),

$$\nu = l^2 \left| \frac{\partial W}{\partial r} \right| = \frac{l^2}{a} |W_a - W_b| = \frac{l^2}{a(1-\sigma^2)} |W_a| \quad (3.8)$$

$l$  は一種の混合距離に対応するものと考え

$$l = \alpha a \quad (3.9)$$

で表わし,  $\alpha$  は後で述べる比例常数である。(3.8) と (3.9) を用いると (3.6) と (3.7) はそれぞれ次のように表わされる。

$$\frac{\partial W_a}{\partial t} = k_1(\theta_a - \theta_b) - k_2 W_a^2 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta_a - \theta_b) = k_3 W_a - k_2 W_a(\theta_a - \theta_b) \quad (3.11)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{g}{\Theta}(1-\sigma^2) > 0 \\ k_2 &= \frac{2\alpha^2}{a(1-\sigma^2)^2} > 0 \\ k_3 &= S_b \left( \delta - \frac{\sigma^2}{1-\sigma^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

水平混合のない場合、即ち  $k_2=0$  のとき、運動が発達するためには  $k_3$  が正でなければならない。従って絶対不安定の場合には無条件に発達するが、条件付不安定の場合には

$$\delta > \frac{\sigma^2}{1-\sigma^2} \geq 0 \tag{3.13}$$

でなければならない。従って

$$\sigma^2 < \frac{\Gamma - \Gamma_s}{\Gamma_a - \Gamma_s} \tag{3.14}$$

すなわち積雲上昇気流域の占める面積の割合は或る値以下でなければ積雲対流の発達し得ないことを示し、Bjerknes の指摘した周知の条件を表わしている。さて(3.10)、(3.11)式に戻つて、 $k_3$  も正ならばこの方程式系は次の定常解をもつことがわかる。

$$\left. \begin{aligned} W_a &= (k_1 k_3)^{1/2} k_2^{-1} \\ \theta_a - \theta_b &= k_3 k_2^{-1} \end{aligned} \right\} \tag{3.15}$$

(他の一組の解  $W_a=0$ ,  $\theta_a - \theta_b=0$  は考へない。) 今単位時間に単位水平面を通して上向きに輸送される熱量を  $H$  とすると

$$\begin{aligned} H &= C_p \rho_0 \overline{W\theta} \\ &= C_p \rho_0 [\rho^2 W_a \theta_a + (1-\sigma^2) W_b \theta_b] \\ &= C_p \rho_0 \sigma^2 W_a (\theta_a - \theta_b) \end{aligned}$$

であるから

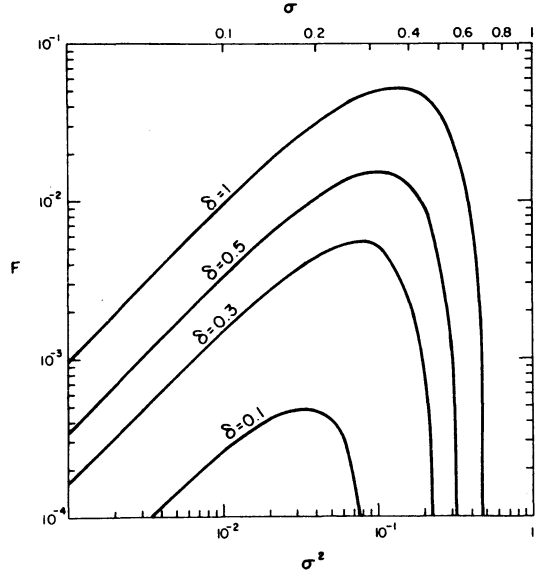
$$\begin{aligned} H &= C_p \rho_0 \sigma^2 k_1^{1/2} k_2^{-2} k_3^{3/2} \\ &= CF(\sigma, \delta) \end{aligned}$$

ここで

$$C = C_p \rho_0 \left( \frac{g}{\theta} \right)^{1/2} S_b^{3/2} \left( \frac{a}{2\alpha^2} \right)^2$$

$$F(\sigma, \delta) = \sigma^2 (1-\sigma^2)^3 [(1-\sigma^2)\delta - \sigma^2]^{3/2}$$

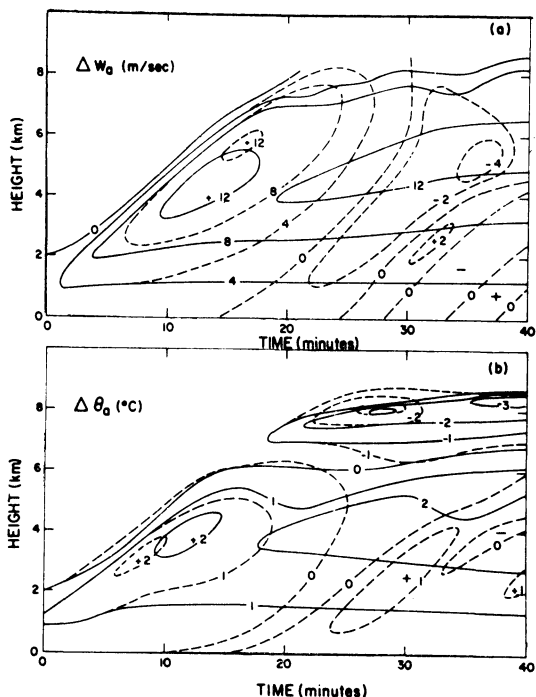
$\delta$  が 0.1, 0.3, 0.5, 1.0 のときそれぞれ  $\sigma^2$  に伴う  $F$  の変化を第2図に示してある。 $\delta$  のこれらの値は中、低緯度帯の平均大気の下層の大部分の状態をカバーしている。図からわかるように  $\sigma^2$  の大きいところ、小さいところで共に  $F$  は減じ、 $F$  を最大にする  $\sigma^2$  の値が存在する。 $\sigma^2$  の大きいところでの cut-off は上昇気流のまわりの下降流の抑制効果を示し、一方  $\sigma^2$  の減少それ自体のためとまわりとの混合によつて  $\sigma^2$  の減少に伴つて  $F$  は減ずる。 $\delta$  が 0.1~1.0 の範囲では  $\sigma^2=0.05 \sim 0.15$  のとき  $F$  は最大になる。対流の機能は成層の不安定を解消することでありそれは上方へ熱を輸送することによって達成される。最も効率よく不安定を解消するもの従つて又最も効率よく上向きに熱を輸送するモードの対流が卓越するという撰択律を採用することによって積雲上昇気流域の面積比を決定することができる。



第2図 異なる静力学的安定度( $\delta=0.1, 0.3, 0.5, 1.0$ ) に対して上向き熱輸送量 ( $F$ ) と上昇気流域の占める面積比 ( $\sigma^2$ ) との関係。

上記はモデルのもつ物理像の基本的性質を描くために単純化して論じたが、もう少し一般的に取り扱うこともでき、それに基づく数値実験がなされた。熱帯地方の平均状態について得られた結果の一例を次に示す。この場合系外からのエネルギー補給はないから定常状態は維持できず、数10分で対流はその生涯を終える。その間における円柱中心部の鉛直速度と平均場からの過剰温位の高度分布のタイムセクションを第3図に示してある。破線がこれに対応するもので鉛直速度や過剰温位は時間と共に増大しその高さも約20分後には 8km 近くに達するが、やがて下降流に転じて安定振動に移る。この期間に生成された運動エネルギーの最大量とそれに寄与する全上向き熱輸送量の  $\sigma^2$  に伴う変化を第4図に示す。実線は  $\alpha^2=0.1$ 、破線は  $\alpha^2=1.0$  の場合である。それぞれのピークは  $\sigma^2=0.04 \sim 0.09$  の間に見出される。以上の結果から最も効率よく熱を上へ運ぶ活発な積雲対流系ではその上昇流の占める面積は数%からせいぜい10%のものという結論が得られる。これに関連する観測や解析結果はすでに若干得られているが今後大いに検討されるべき問題であろう。

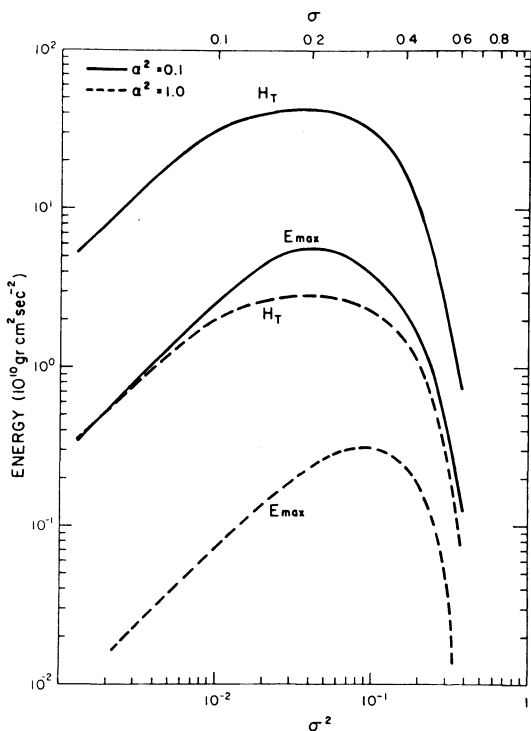
ところで上記結果からもわかるように系外からのエネルギー補給、特に水蒸気の補給がなければ、もともと成層は条件付不安定であるから、第3図に示した如く数10分で対流運動は止む。そこで今平均場に緩慢ながら上昇



第3図 第1図の内側円柱における鉛直速度( $\Delta W_0$ )と水平平均からの温位過剰( $\Delta\theta_a$ )の高度分布のタイムセクション. 破線は平均場の平均鉛直運動がない場合( $\bar{W}=0$ )で, 実線は高度1 kmで $\bar{W}_{max}=10 \text{ cm sec}^{-1}$ の場合(第5図の $C=10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ , 実線の場合).

流( $\bar{W}$ )がある場合, 従って下層における収束によって, 絶えず水蒸気の補給がなされるならば上記数値実験は如何なる結果を示すだろうか (Kasahara and Asai, 1967). 下層の平均水平収束量が  $0, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3} \text{ sec}^{-1}$  の場合の対流運動エネルギーの時間変化を第5図にそれぞれ破線, 点線, 実線, 鎖線で示す. この収束量に対応する平均上昇速度はそれぞれ  $0, 1, 10, 100 \text{ cm sec}^{-1}$  となる. ここでは  $a=1 \text{ km}$ ,  $\sigma^2=0.04$  を採用した. 下層収束のない場合には前述の通り20~30分で対流活動は停止する. 収束があっても  $10^{-5} \text{ sec}^{-1}$  程度のものでは少くとも1時間程度の時間スケールで見ると限り前の結果と殆んど差異はない. 一方収束量が,  $10^{-4} \text{ sec}^{-1}$  以上になると活潑な対流活動の維持されることが示される.  $10^{-4} \text{ sec}^{-1}$  の収束量の場合の  $\Delta W_0$  と  $\Delta\theta_a$  の高度分布のタイムセクションを第3図に比較のため実線で挿入してある.

ここで付言しておきたいことは, 対流活動の維持される場合の上記結果は, 積雲上昇流に伴うまわりの補償的

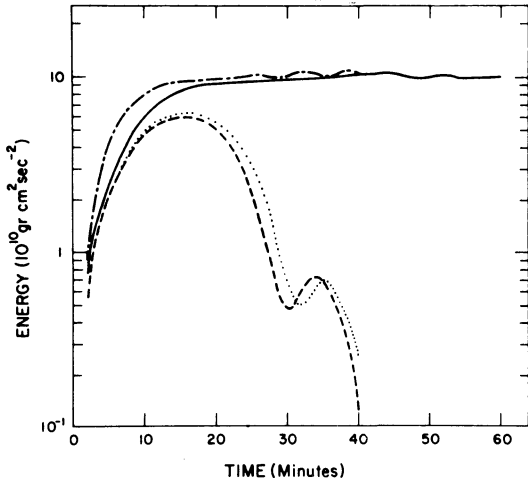


第4図 上向き熱輸送量  $H_T$  と最大運動エネルギー  $E_{max}$  の  $\sigma^2$  に対する依存性. 実線は  $\alpha^2=0.1$ , 破線は  $\alpha^2=1.0$  の場合.

下降流のないいわゆる静止大気中での単一上昇気流モデルに対する結果と見掛け上ほぼ一致するということである. しかもそれは補償的下降流が平均場の平均上昇流によって殆んど打消されるあたりで成立する. これらの問題は積雲対流群の制御がどのような規模の運動によりどのようなかたちでなされるかについての研究の一つの手掛りを与えるであろう.

#### 4. 対流細胞の卓越モード

前節で示したように積雲の側壁を通しての混合過程と上昇気流に伴うまわりの補償的下降流を導入することによって, 鉛直熱輸送の撰律性にもとづき上昇域と下降域との面積比を決めることができた. そしてこの値は今日得られている観測結果とかなりよい対応を示すように思われる. しかしながら積雲対流の水平スケールは未決定のまま残された. すなわち上昇気流の水平スケールが大きくなると共に上向き熱輸送量が単調に増大し, その点では水平混合のみを考慮に入れたこれまでの多くの積雲モデルと異なる. では一体水平スケールを制御する

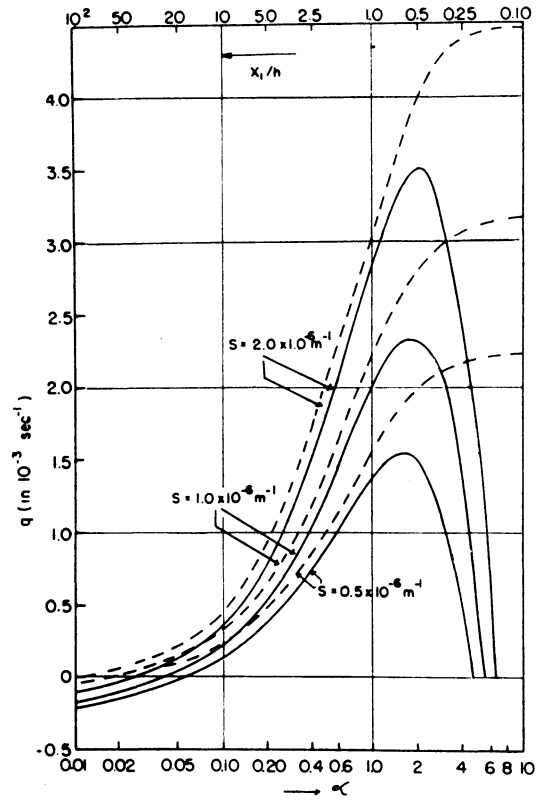


第5図 平均場の下層で水平収束( $C$ )のある場合、対流の運動エネルギーの時間変化。破線は $C=0$ 。点線は $C=10^{-5} \text{ sec}^{-1}$ 。実線は $C=10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ 、鎖線は $C=10^{-3} \text{ sec}^{-1}$ である。

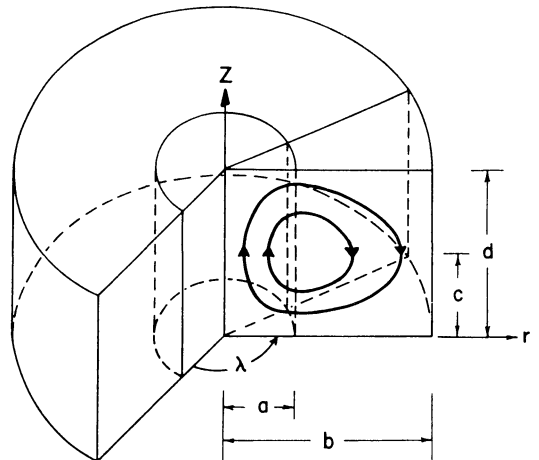
物理的要因は何であろうか。

すでに述べたように熱対流の運動エネルギーは上向き熱輸送により位置エネルギーから転換される。従ってその際鉛直運動は直接このエネルギー変換に寄与するが水平運動はむしろ鉛直運動を通して生成された運動エネルギーのピンはねをする立場にある。このことは鉛直運動の卓越する上下に長いセルの方が水平運動の卓越する水平に扁平なセルより熱の鉛直輸送には効率のよいことを示唆する。不安定成層における摂動論（例えば Lilly, 1960; Kuo, 1961, 1965 b; Asai, 1964 a）から得られた結果が第6図に要約される。横軸に水平方向の波数 $\alpha$ 、或は波長( $4x_1$ )、縦軸に不安定波の成長率 $q$ をとってある。実線は渦交換係数 $\nu=10^3 \text{ m}^2 \text{ sec}^{-1}$ 、破線は $\nu=0$ で、それぞれ三つの異なる値の静学的安定度 $S$ について描かれている。図からわかるように摩擦がなければ水平スケールの小さいもの程成長率が大きくなり上記示唆を裏づけている。従って摩擦の作用によって極めて小さな水平スケールのものはおさえられ或る波長のところで成長率が最大になる。又一方対流セルの鉛直スケールに比し水平のそれが非常に大きくなると上昇気流域への流入流出に伴う水平運動の上下層間のシャーが増大し運動量の鉛直交換を通して摩擦力が大きく効くようになるであろう。

以上の考察が前記積雲対流モデルに水平運動を導入さ



第6図 静学的に不安定な成層において擾乱の発達率( $q$ )とその波数( $\alpha$ )、或は波長( $4x_1$ )との関係を種々の静学的安定度( $S$ )について示す。実線は渦交換係数 $\nu=10^3 \text{ m}^2 \text{ sec}^{-1}$ の場合、破線は $\nu=0$ の場合(Kuo, 1961より)。



第7図 細胞状積雲対流モデルの単位細胞。

せる動機となった。しかしながら同時にモデルの簡潔さ  
はできる限り保持して物理的性質をうまく再現したい。  
このような経緯で考案されたのが次に述べるモデルであ  
る (Asai, 1967)。

第7図は厚さ  $d$  の軸対称な対流の単位セルを示す。  
半径  $a$  の内側円柱は上気流域、半径  $a$ ,  $b$  それぞれの  
同心円柱間の環状部は下降流域である。一方その円柱の  
下層は中心軸に向う流入、上層で外側に向う流出があ  
る。さて切線方向 ( $\lambda$ ) に沿って平均された子午面 ( $r$ ,  
 $z$ ) 内の運動を考えよう。子午面に垂直な成分の渦度方  
程式と連続の式はそれぞれ次のように表わされる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\eta u) + \frac{\partial}{\partial z}(\eta w) = \frac{g}{\Theta} \frac{\partial \theta^*}{\partial r} + \frac{\partial F_w}{\partial r} - \frac{\partial F_u}{\partial z} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{r \partial r}(ru) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.2)$$

$u$ ,  $w$  はそれぞれ速度の  $r$  (外向きに正),  $z$  (上向きに  
正) 成分で、すべて切線方向に沿う平均値である。

$\eta \equiv \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z}$  は渦度の子午面に垂直な成分、 $\theta^*$  は温  
度の水平平均値からの偏差である。 $F_u$ ,  $F_w$  はレイノル  
ズストレスによる摩擦項の  $r$ ,  $z$  成分でそれぞれ

$$F_u = -\frac{\partial}{r \partial r}(ru'u') - \frac{\partial}{\partial z}(u'w') \quad (4.3)$$

$$F_w = -\frac{\partial}{r \partial r}(rw'u') - \frac{\partial}{\partial z}(w'w') \quad (4.4)$$

ここで、 $u'$ ,  $w'$  はそれぞれ  $u$ ,  $w$  からの偏差で  
—の記号は切線方向に沿う平均を表わす。さて対流セ  
ルの子午面について (4.1) を面積分すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_l v_l dl = \frac{g}{\Theta} \int_0^d \left[ \theta^* \right]_{r=0}^{r=b} dz + \int_{r=0}^{r=b} \left[ F_w \right]_{z=0}^{z=d} dz - \int_0^b \left[ F_u \right]_{z=0}^{z=d} dr \quad (4.5)$$

$v_l$  はセルの境界  $l$  に沿う速度成分である。ここでセ  
ルの外側境界面に垂直な速度成分 (但し切線平均値) は  
ないとする境界条件

$$\left. \begin{aligned} z=0 \text{ と } d \text{ で } w=0 \\ r=0 \text{ と } b \text{ で } u=0 \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

を用いた。今半径  $a$  の内側上昇気柱の平均鉛直速度を  
 $\langle w_a \rangle$ , 外側下降域のそれを  $\langle w_b \rangle$ , 下層の平均動径  
速度を  $\bar{u}_c$ , 上層のそれを  $\bar{u}_d$  とすれば、質量保存則(4.  
2) に境界条件 (4.6) を用いて、 $\langle w_b \rangle$ ,  $\bar{u}_c$ ,  $\bar{u}_d$  を

$\langle w_a \rangle$  と  $\sigma = a/b$ ,  $\mu = c/d$  の幾何学的パラメーターによ  
って表現することができる。又セルの外側境界面を通し  
ての運動量や熱の乱渦輸送はないとし、一方上昇域と下  
降域、下部流入層と上部流出層との間の乱渦輸送に (3.  
8), (3.9) で用いたと同様の混合距離仮説を適用する。  
更に (4.5) の被積分関数はセルの外側境界に沿うもの  
ではなく、上記4領域についてそれぞれ平均されるべき  
ものと見做す。以上の考察にもとづき (4.5) は  $\langle w_a \rangle$   
についての次の運動方程式に還元される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle w_a \rangle = k_1 \langle \Delta \theta \rangle - k_2 \langle w_a \rangle^2 \quad (4.7)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} k_1 &\equiv \frac{g}{\Theta} (1-\sigma)^2 \left\{ 1 - \frac{l_n \sigma}{\mu(1-\mu)} \left( \frac{a}{d} \right)^2 \right\}^{-1} \\ k_2 &\equiv \frac{2\alpha^2}{a(1-\sigma^2)^2} \left\{ 1 + \frac{(1-\sigma^2)^3}{2\mu^3(1-\mu)^3 \sigma} \left( \frac{\sigma l_n \sigma}{1-\sigma^2} \right)^2 \left( \frac{a}{d} \right)^4 \right. \\ &\quad \left. \left\{ 1 - \frac{l_n \sigma}{\mu(1-\mu)} \left( \frac{a}{d} \right)^2 \right\}^{-1} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

$\langle \Delta \theta \rangle \equiv \langle \theta_a \rangle - \langle \theta_b \rangle$  は上昇気柱の平均温位の下降  
流域のそれからの差である。

(4.8) において  $ab/d^2 \ll 1$ . 且  $\sigma \ll 1$  すなわちセル  
の上昇流域の占める面積の割合が非常に小さく、又対流  
セルの水平スケールが厚さに比して非常に小さいならば  
—換言すれば上昇気流のまわりの上降流や水平運動の  
影響が無視できるならば— $k_1$ ,  $k_2$  はそれぞれ次のよう  
になる。

$$\left. \begin{aligned} k_1 &\approx \frac{g}{\Theta} \\ k_2 &\approx \frac{2\alpha^2}{a} \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

即ち摩擦項は上昇気柱の半径に逆比例することを示し、  
すでに多くの人々により導出されているエントレーメン  
トを考慮に入れた積雲モデルと一致する。 $\alpha^2$ は彼等のい  
うエントレーメントの定数に対応し中立成層中の plume  
についてはほぼ 0.1 という実験結果を得ている。しかし  
大気中の積雲についてはこの値はまだ不明確で  
 $0.1 \leq \alpha^2 \leq 1$  の範囲内におさまるとするのが妥当であろ  
う。

次に対流の原動力である浮力に関与する  $\langle \Delta \theta \rangle$  を求  
めなければならない。そのため次の熱力学方程式を用い  
る。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(r\theta u) + \frac{\partial}{\partial z}(\theta w) = \frac{L\theta}{C_p T} M + F_\theta \quad (4.10)$$

$T, \theta$  はそれぞれ温度, 温位の切線平均値,  $M$  は水蒸気の凝結率,  $L$  は凝結潜熱である. また

$$F_\theta = -\frac{\partial}{\partial t}(\overline{r\theta'u'}) - \frac{\partial}{\partial z}(\overline{\theta'w'}) \quad (4.11)$$

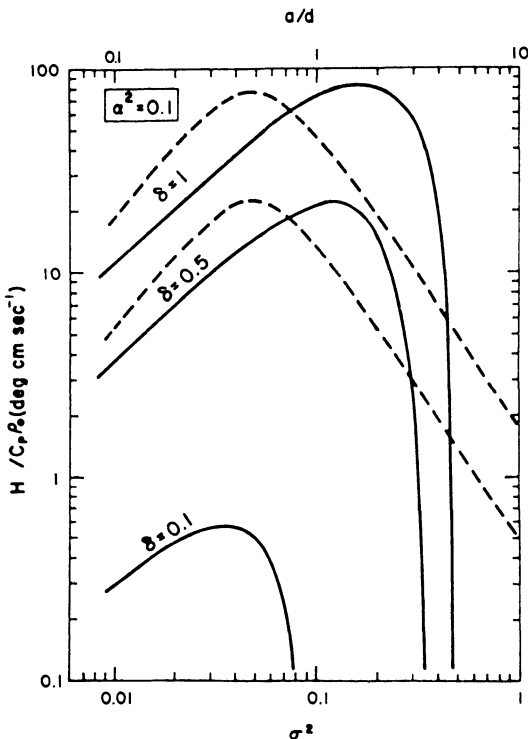
(4.10) を上昇気流域, 下降気流域についてそれぞれ平均する. その際上昇域でのみ水蒸気の凝結が起り, 他方下降域での相変化はないとし, 又 (4.7) の導出におけると同様の操作をほどこすと次式が得られる.

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \Delta\theta \rangle = k_3 \langle w_a \rangle - k_4 \langle w_a \rangle \langle \Delta\theta \rangle \quad (4.12)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} k_3 &= S_b \left( \delta - \frac{\sigma^2}{1-\sigma^2} \right) \\ k_4 &= \frac{2\alpha^2}{a(1-\sigma^2)^2} \left\{ 1 + \frac{1-\sigma^2}{\alpha^2} \left( \frac{a}{d} \right) \right\} \\ \delta &\equiv S_a/S_b \\ S_a &\equiv -\frac{\partial \theta_e}{\partial z}, \quad S_b \equiv \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

このようにして導出した方程式系 (4.7) と (4.12) に



第8図 鉛直熱輸送量の  $\sigma^2$  に伴う変化を実線で (但し  $a/d=0.5$ ),  $a/d$  に伴う変化を破線で (但し  $\sigma^2=0.1$ ) 示す.

において  $k_1, k_2, k_4$  は常に正であるから  $k_3 > 0$  のとき対流運動を示す次の定常解をもつ.

$$\left. \begin{aligned} \langle w_a \rangle &= \left( \frac{k_1 k_3}{k_2 k_4} \right)^{1/2} \\ \langle \Delta\theta \rangle &= \frac{k_3}{k_4} \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

従って前節で述べたように, 絶対不安定 ( $\frac{\partial \theta}{\partial z} < 0$ ) ならば  $k_3 > 0$  となり常に定常な対流が発現し得るが, 絶対安定 ( $\frac{\partial \theta}{\partial z} > 0$ ) ならば  $k_3 < 0$  で対流は発現し得ない, 一方条件付不安定の場合 ( $\frac{\partial \theta}{\partial z} > 0$  且  $\frac{\partial \theta_e}{\partial z} < 0$ ) には  $\delta > \frac{\sigma^2}{1-\sigma^2}$

のときのみ  $k_3 > 0$  となり定常対流の発現し得ることを示している.

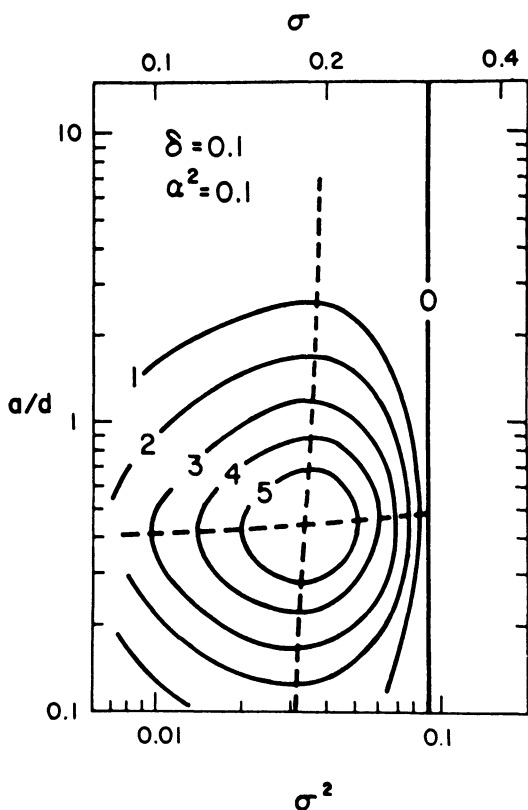
さて (4.14) を用いて鉛直熱輸送量  $H$  を求めると

$$\begin{aligned} H &= C_p \rho_0 \sigma^2 \langle w_a \rangle \langle \Delta\theta \rangle \\ &= C_p \rho_0 \sigma^2 \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^{1/2} \left( \frac{k_3}{k_4} \right)^{3/2} \\ &= C_p \rho_0 \left( \frac{g}{\theta} \right)^{1/2} S_b^{3/2} \left( \delta - \frac{\sigma^2}{1-\sigma^2} \right)^{3/2} \\ &\quad \times \frac{\sigma^2 (1-\sigma^2)^{3/2} a^2}{4\alpha^4} \\ &\quad \times \left\{ 1 + \frac{(1-\sigma^2)^3}{2\mu^3 (1-\mu)^3 \sigma} \left\{ \frac{\sigma L n \sigma}{1-\sigma^2} \right\}^2 \left( \frac{a}{d} \right)^4 \right\}^{-1/2} \\ &\quad \times \left\{ 1 + \frac{(1-\sigma^2)a}{\alpha^2 d} \right\}^{-3/2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

上式は2個の物理的パラメーター, すなわち静力学的安定度と混合に関与する係数,  $\delta$  と  $\alpha^2$ , および対流セルのモードに関するパラメーター,  $d, a, \sigma, \mu$  によって熱輸送量の表現されることを示している. 以下ではすでに述べた大気中で実現する対流は最も効率よく熱を上方へ輸送するものであるという撰択律を用いて対流セルのモードを求めよう. (4.15) を一見して  $\mu=1/2$  のとき  $H$  の最大になることがわかる. 従つて以下では  $\mu=1/2$  とする.

第8図には鉛直熱輸送量の  $\sigma^2$  に伴う変化を実線 ( $a/d=0.5$ ) で,  $a/d$  に伴う変化を破線 ( $\sigma^2=0.1$ ) で示す. 図からわかるように, 熱輸送量を最大にする  $\sigma^2$  の値が存在しその値は  $\delta$  が增大すると共に大きくなることは前節のモデルと同じである. 例えば  $a/d=0.5$  のとき  $\delta=0.1$  では  $\sigma^2=0.03$ ,  $\delta=1$  では  $\sigma^2=0.15$  で熱輸送量は最大となる. 更にこのモデルは熱輸送量を最大にする





第9図 対流細胞のモード ( $\sigma^2$ ,  $a/d$ ) の関数としての鉛直熱輸送量. 実線は  $H/C_p \rho_0$  の等値線 ( $10^{-1}$  deg. cm. sec. $^{-1}$  単位).

$a/d$ の値の存在することを示している。その値は  $\delta$  には殆んど依存せず、 $\alpha^2=0.1$  のとき  $a/d \approx 0.50$  で  $\alpha^2$  の増大と共に若干大きくなる。(  $\alpha^2=1$  で  $a/d \approx 0.75$  )。上昇気流の水平スケールが非常に小さくても ( $a \ll d$ ) 又、大きくても ( $a \gg d$ ) 熱の鉛直輸送には有効ではない。上昇域の大きさが小さくなると雲内外の水平混合の効果が強く効き、その発達の抑制されることは前節で述べた通りである。他方水平スケールが大きくなると運動エネルギー生成に寄与せず専らそれを消費する水平運動が卓越し運動量の上下の混合がさかんになり対流の発達が阻害されるであろう。

このように実現する積雲対流は上向き熱輸送量最大のものとの仮説にもとづき対流セルのモードを決めることができる。第9図はその1例で、 $\delta=0.1$ ,  $\alpha^2=0.1$  のとき鉛直熱輸送を最大にするモードは、 $\sigma^2 \approx 0.03$ ,  $a/b \approx 0.45$  となることを示している。

## 5. 今後の課題

前節では対流を見掛け上閉じた系として扱い、その結果対流の活動を規定する最も基本的な物理的パラメータは静力学的安定度であるというごく常識的な結論が得られた。しかしながら上向き熱輸送に抗して不安定成層を維持するためには下層で加熱又は上層で冷却されねばならない。更に上昇流域で水蒸気の凝結を維持するには水蒸気が補給されねばならない。むしろこの作用をより explicit に導入して始めて大規模運動と積雲対流の相互作用の機構を解明する端緒をつかむことができるであろう。熱帯地方での積雲対流の観測結果にもとづいて、Malkus 等 (1960, 1963) は活潑な対流雲は決してランダムに分布するのではなく大規模な擾乱と密接に結びついていることや、積雲対流活動の激しい地域程その静力学的安定度は他の地域に比してむしろよくなっているという皮肉な結論を得ている。すなわち活潑な積雲対流群はもはや局地的な静力学的安定度条件のみによって記述するのは無理であってより大規模な運動を考慮しなければならないことを示唆している。更に一般流がプロフィールを持つ場合、例えば鉛直シャーのある場合には、今まで論じた熱輸送の他に運動量の鉛直輸送が生ずる。この問題についてもすでに若干手がけられている (Kuo, 1963; Chao and Cheng, 1963; Asai, 1964 他) が議論の余地を多く残している。

以上では主により大規模な運動との相互作用を念頭において積雲対流を考察したが、そのためにも積雲対流それ自体のふるまいをもっとよく知る必要が一層明らかになった。その際すでにふれた混合過程や降水の雲物理学的過程等微細規模な現象との相互作用にも目を向けねばならなくなるであろう。

## 6. あとがき

ふりかえてみて、「積雲対流に関する理論的研究」というにはその内容は積雲対流そのものの核心からまだほど遠いことに気付かざるを得ない。表題は今回私に授けられた気象学会賞のそれをそのままつけたまでであつて、はしがきにも述べたような側面から積雲対流の研究に一歩ふみ入れたばかりのいわば序曲である。これを「未完成」に終らせないためには？ 壁の厚さと高さに威圧される。しかしながら、進歩のいかにも緩慢に見える気象学の歩みも少し長い時間スケールで眺めるとやはり着実な足どりをたどることができる。地上天気図一本やりの「見えない気象学」から1940年代の高層観測網の

充実や最近の気象衛星や電子計算機を始めとする観測技術、処理能力の急速な進歩は「見える気象学」に脱皮させた。やがて我々がこれらを十分に使いこなした暁には積極的に自然に立ち向う「見る気象学」へと生れ変わるであろう。GARPの推進がその道を切り開ききっかけになることを期待したい。

#### 参考文献

- Asai, T., 1960: Numerical experiment of convection in the model atmosphere. Proc. International Symposium on Numerical Weather Prediction in Tokyo, Meteor. Soc. Japan, 469-476.
- Asai, T., 1964 a: Numerical experiment of cumulus convection under the pseudo-adiabatic process. Papers in Meteor. and Geophys., 15, 1-30.
- Asai, T., 1964 b: Cumulus convection in the atmosphere with vertical wind shear: numerical experiment. J. meteor. Soc. Japan, 42, 245-259.
- Asai, T. and A. Kasahara, 1967: A theoretical study of the compensating downward motions associated with cumulus clouds. J. atmos. Sci. 24, 487-496.
- Asai, T., 1967: On the characteristics of cellular cumulus convection. J. meteor. Soc. Japan, 45, 251-260.
- Bjerknes, J., 1938: Saturated-adiabatic ascent of air through dry-adiabatically descending environment. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 64, 325-330.
- Chao, J.P. and L.S. Cheng, 1964: On the effects of the vertical wind shear on the development and structure of convection. Acta Meteorologica Sinica, 34, 94-102.
- Charney, J.G. and A. Eliassen, 1964: On the growth of the hurricane depression. J. atmos. Sci., 21, 68-75.
- Haltiner, G. J., 1959: On the theory of convective currents. Tellus, 11, 4-15.
- Kasahara, A. and T. Asai, 1967: Effects of an ensemble of convective elements on the large-scale motions of the atmosphere. J. meteor. Soc. Japan, 45, 280-291.
- Kuo, H.L., 1961: Convection in conditionally unstable atmosphere. Tellus, 13, 441-459.
- Kuo, H.L., 1962: On the controlling influences of eddy diffusion on thermal convection. J. atmos. Sci., 19, 236-243.
- Kuo, H.L., 1963: Perturbations of plane Couette flow in stratified fluid and origin of cloud streets. The Physics of Fluids, 6, 195-211.
- Kuo, H.L., 1965 a: On formation and intensification of tropical cyclones through latent heat release by cumulus convection. J. atmos. Sci., 22, 40-63.
- Kuo, H.L., 1965 b: Further studies of the properties of cellular convection in a conditionally unstable atmosphere. Tellus, 17, 413-433.
- Levine, J., 1959: Spherical vortex theory of bubble-like motion in cumulus clouds. J. meteor., 16, 653-662.
- Lilly, D.K., 1960: On the theory of disturbances in a conditionally unstable atmosphere. Mon. Wea. Rev., 88, 1-17.
- Malkus, J.S., 1960, Recent developments in studies of penetrative convection and an application to hurricane cumulonimbus towers. Cumulus Dynamics, Pergamon Press, New York, 65-84.
- Malkus, J.S. and R.T. Williams, 1963: On the interaction between severe storms and large cumulus clouds. Meteorological Monographs, 5, No. 27, 59-64.
- Manabe, S., J. Smagorinsky and R.F. Strickler, 1965: Simulated climatology of a general circulation model with a hydrological cycle. Mon. Wea. Rev., 93, 769-798.
- Mason, B.J. and R. Emig, 1961: Calculations of the ascent of a saturated buoyant parcel with mixing. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 87, 212-222.
- Morton, B.R., G. Taylor and J.S. Turner, 1956: Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources. Proc. Roy. Soc., 234, 1-23.
- Ooyama, K., 1963: A dynamical model for the study of tropical cyclone development. Department of Meteorology and Oceanography, New York University, 22 pp.
- Priestley, C.H.B. and F.K. Ball, 1955: Continuous convection from an isolated source of heat. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 81, 144-157.
- Scorer, R.S. and F.H. Ludlam, 1953: The bubble theory of penetrative convection. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 79, 94-103.
- Squires, P. and J.S. Turner, 1962: An entraining jet model for cumulonimbus updraughts. Tellus, 14, 422-434.
- Syono, S. and M. Yamasaki, 1966: Stability of symmetrical motions driven by latent heat release by cumulus convection under the existence of surface friction.