551.577.21:551.582.2 (521.8)

グリンゴルテン図表による日最大降水量の推定*

——呉における1例——

岡　本　雅　典**

要旨：極値あるいはその再現期間の推定に関する Gringorten の図表の理論的根拠を補足し，1967年7月に集中豪雨のあった呉について実例を示した．

1. はしがき

1967年7月9日15時から17時の間に呉市では110mmに及ぶ強雨が降り，山崩れ，がけ崩れなどに伴う家屋流失のため，多くの人命が失はれ，大災害として報ぜられた．この日の最大日降水量は212.9mm であり，昭和20年9月17日の呉の大洪水では221.8mm であった．

ここでは呉における最大日降水量の再現期間を求めるに当って，Gringorten (1963) の作成した図表を用いたので，その一例を示す．この図表は実用上非常に便利であり，かつその理論的根拠から考えて，経験的再現期間曲線をそのまゝ使うよりは多少なりともよいのではないかと思はれる．

2. 極値の分布

最大値あるいは最小値のような極値分布については Fisher and Tippett (1928) の研究に始まり，近年では Lieblein(1954), Jenkinson (1954), Gringorten (1952, 1963) 等の研究がある．その他 Gumbel (1958), 小河原氏とその協力者 (1954), 気象庁統計課 (1954), 菊池原英和 (1959) 等により研究し尽された観があるが，日本で Gringorten の図表を利用した結果はあまり見かけない．更に最近では二変量の極値分布の性質が研究の対象となっている (Gumbel and Mustafi 1967).

最大値あるいは最小値 x の分布は Fisher and Tippett の与えた関数方程式

$$F^n(x)=F(a_nx+b_n)$$

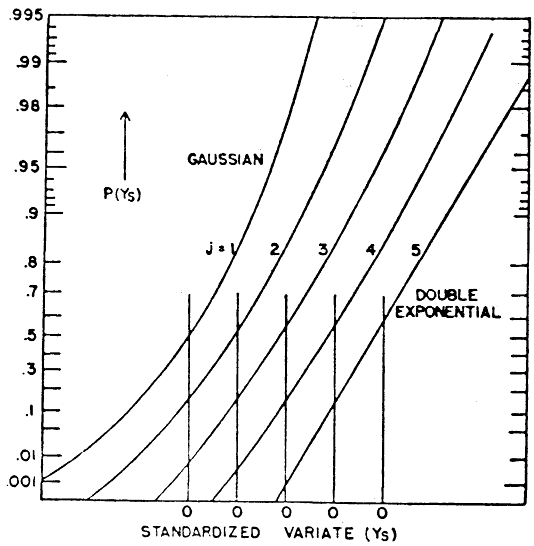
をもとに，Gumbel は $y=ax+b$ として，一つの解

$$P=exp(e^{-y})$$

を，Jenkinson は $x=a(1-e^{-ky}), ak>o$ として

$$P=exp(e^{-y})$$

なる解を与えた．これがいわゆる二重指数分布であるが，一種の極限分布であって，観測値が非常に多い場合にのみ成立する．したがって現実には二重指数分布は必ずしも成立しない．



第1図　極値確率紙上の各種理論モデル分布 (Gringorten. 1962)

二重指数分布に従わない場合には，最大値に関する数種の理論的モデル分布を正規分布から作り，実際のデータに適合するものを視察によって選ぶ方法を Gringorten (1962) は提唱した．このため極値確率紙のたて軸に順位確率 $P(y_s)$ を，よこ軸に標準化変数 y_s をとって次の5種類の累積分布曲線をあらかじめ作っておく（第1図）．こゝに標準化変数 y_s とは y の種々の値を与えて

---

* The Estimation of Maximum Daily Precipitation by Gringorten's Diagram-An Example at Kure.

** M. Okamoto. 広島大学教養部

—1967年9月9日受理，1968年4月11日改稿受理—

$$y_s=\frac{y-\mu_j}{\sigma_j},\quad 1\leqq j\leqq 5$$

としたものである．y_j は y の真の平均，σ_j は y の真の標準偏差であって，各 j に対する μ_j, σ_j の値と累積分布の型を第1表に示す．

第1表　理論的モデル分布

j	μ_j	σ_j	y の累積分布
1	0	1	$P(y)=$正規分布$=P_1$
2	1.5388	0.5868	$P(y)=P_1^{10}$
3	2.5076	0.4294	$P(y)=P_1^{100}$
4	3.2414	0.3514	$P(y)=P_1^{1000}$
5	5.7772	1.28255	$P(y)=exp(-e^{-y})$

第1図および第1表の $j=1,\ 2,\ 3,\ 4$ は正規母集団からそれぞれ独立に 10^{j-1} 個の標本を取ったことを示し，P_1 は1個の，P_1^{10} は10個の，P_1^{100} は100個の，P_1^{1000} は1000個の標本の中の標本最大値の累積分布を示す．

実際にデータから y_s を推定するには

$$y_s=\frac{x-\bar{x}}{s_x}$$

を用いる．こゝに $\bar{x}$ は x の標本平均値であり，s_y は x の標準偏差である．

大きさ n の標本に対して極値確率紙上に下から教えて i 番目の順位確率の推定値 $\hat{P}_i$ をプロットするには，

$$\hat{P}_i=\frac{i-\frac{1}{2}}{n}$$

あるいは

$$\hat{P}_i=\frac{i}{n+1}$$

とする方法があるが，これらをまとめて Gringorten (1963) は

$$\hat{P}i=\frac{i-a}{n+1-2a},\quad 0\leqq a<1 \qquad (1)$$

なる式を示した．a はある定数であるが，a を求めるために n 個の標本に対して

$$\hat{P}_n=P\{E(x_n)\} \qquad (2)$$

とした．この理由を推測するにチェビシェフの不等式

$$P_r\{|X_n-E(X_n)|\geqq\varepsilon\}\leqq\frac{E\{|X_n-E(X_n)|^2\}}{\varepsilon^2}$$

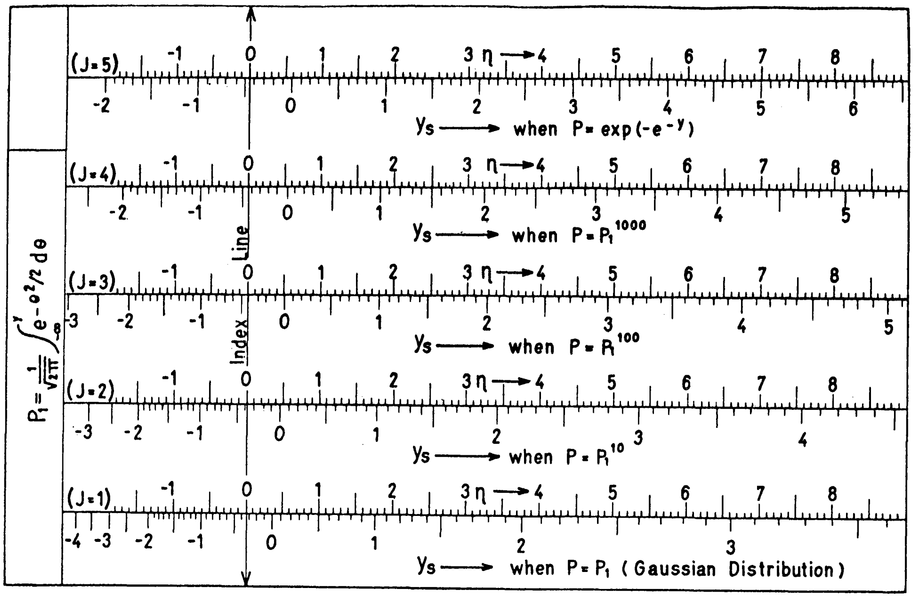
において，二乗平均誤差 $E\{|X_n-E(X_n|^2\}$ が n と共に非常に小さくなれば，X_n は $E(X_n)$ に確率収束する．したがつて $P(X_n)$ は $P\{E(X_n)\}$ に法則収束する．$P(X_n)=P_n$ であるから，上のように $P\{E(X_n)\}$ で P_n の推定値 $\hat{P}_n$ としてよいであろう．こゝに X_n は x_n に対する確率変数である．

一方二重指数分布に対して標準化変数 y_n の平均値 $E(y_n)=\gamma+ln\,n$（こゝに $\gamma=0.5772\cdots$）である(Gumbel, 1958)．x_n の代りに，y_n を取って考え（2）式より

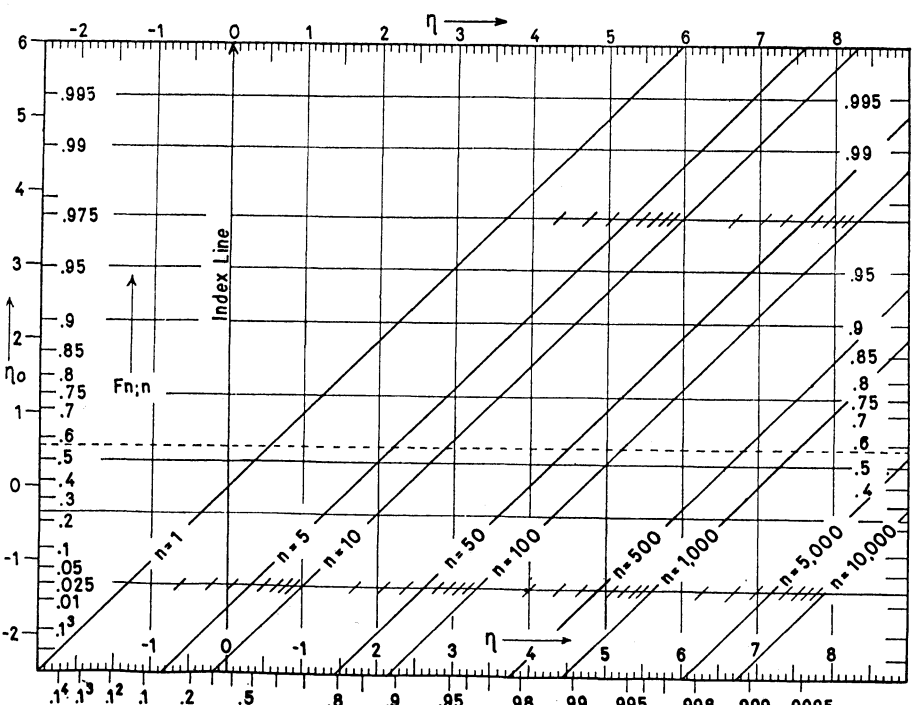
第2表　呉の最大日降水量順位表
(1894—1967年)単位 mm

順位	日降水量	起　日	順位	日降水量	起　日
1	221.8	1945. 9.17	38	93.0	1957. 7.25
2	212.9	1967. 7. 9	39	92.3	1964. 6.27
3	173.2	1960. 7. 7	40	90.3	1914. 9.24
4	162.5	1910. 9. 6	41	89.9	1902. 6.15
5	150.9	1905. 6.20	42	86.6	1907. 9.21
6	150.0	1943. 7.24	43	86.1	1911. 6.27
7	138.4	1916. 9.23	44	85.9	1925. 8.21
8	137.3	1894. 8.24	45	83.2	1909. 9.24
9	136.2	1923. 6.20	46	82.5	1917.10.10
10	135.8	1965. 6.20	47	81.7	1921. 9.13
11	135.2	1903. 7.14	48	80.9	1915. 6.25
12	134.9	1897. 9.29	49	80.9	1944. 9.17
13	133.9	1912. 7.23	50	78.9	1950. 3. 7
14	132.1	1899. 7. 9	51	78.3	1896.10·13
15	132.0	1926. 5.29	52	75.5	1942. 8. 7
16	128.7	1934. 6.20	53	75.2	1961. 10.6
17	121.4	1963. 9.11	54	74.8	1933. 6.22
18	118.1	1930. 8.13	55	74.5	1895. 8.25
19	114.4	1924. 9.12	56	74.2	1898. 7. 4
20	111.5	1951.10.14	57	72.5	1948. 8.26
21	110.3	1941. 6.27	58	72.4	1900. 7.11
22	109.9	1955. 4.15	59	72.1	1920. 4.25
23	109.8	1947. 6.24	60	72.0	1962. 7. 3
24	107.0	1966. 9.18	61	71.5	1922. 7. 5
25	105.5	1935. 6.29	62	69.4	1937. 8.22
26	105.4	1938. 8. 1	63	69.3	1908.10.15
27	105.1	1954. 7. 4	64	64.8	1959. 7.11
28	104.9	1928. 6.26	65	62.5	1936. 5. 6
29	104.7	1904. 6.25	66	62.1	1952. 7. 1
30	102.9	1953. 6.25	67	61.3	1932. 9.12
31	102.4	1940. 9.11	68	61.1	1956. 6.29
32	102.0	1958. 7. 2	69	57.4	1913. 9.11
33	100.7	1931. 7. 6	70	55.6	1949. 6.19
34	99.5	1901. 6.30	71	51.5	1906.10. 2
35	98.1	1919. 7. 4	72	51.4	1939. 5.12
36	95.1	1918. 6.26	73	150.0	1946.10.11
37	94.3	1929. 7. 5	74	48.7	1927. 6.15

本表は呉気象累年報（呉測候所，1962）に補充して作成．ただし1946年は推定．



第２図　η と y_s の変換 (Gringorten, 1963)



第３図　η と $F_{n;n}$ (Grigorten, 1963)

$$\widehat{P}_n=P(\gamma+ln\ n)=P$$

とおき，$i=n$ として（1）式に代入すれば

$$a=\frac{P-n+nP}{2P-1}$$

を得る．実際に n の大きな値を順次入れて計算すると a は0.439に近かずく．n が20より大きれば十分に $a=0.44$ としてよく，したがって（1）式は

$$\widehat{P}_n=\frac{i-0.44}{n+0.12} \qquad (3)$$

となる．この順位確率の推定値によりプロットすると，もし標本最大値が二重指数分布に従うならば，完全に直線となる．

次に新変数 η を理論的各モデル分布 $P(y_s)$ に対して

$$\eta=-exp\{-exp\,P(y_s)\}$$

により y_s から η に変換する目盛尺（第2図）を作っておく．

また n 個のうちの最大値の分布関数を $F_{n;n}$ とすると

$$F_{n;n}=P^n$$

であるから，

$$\eta=exp\ n-exp(-exp\ F_{n;n})=exp\ n+\eta.$$

ただし $\eta_0=-exp(-exp\ F_{n;n})$.

したがって n を与えると η と η_0，つまり η と $F_{n;n}$ の関係が定まる（第3図）．

呉の1894年から1967年まで74年間の最大日降水量の順位表を第2表に示す．

$$\bar{x}=99.0,\quad s_x=33.5$$

であった．標準化変数 y_s は

$$y_s=\frac{x-99.0}{33.5}$$

により求め，$\widehat{P}_i$ は（3）式による．二重指数確率紙にプロットしたのが第4図である．両側の曲線は95%の信頼限界を表わすもので，Gringorten（1963）の作った図表を用いた．その理論的根拠は次の通りである．

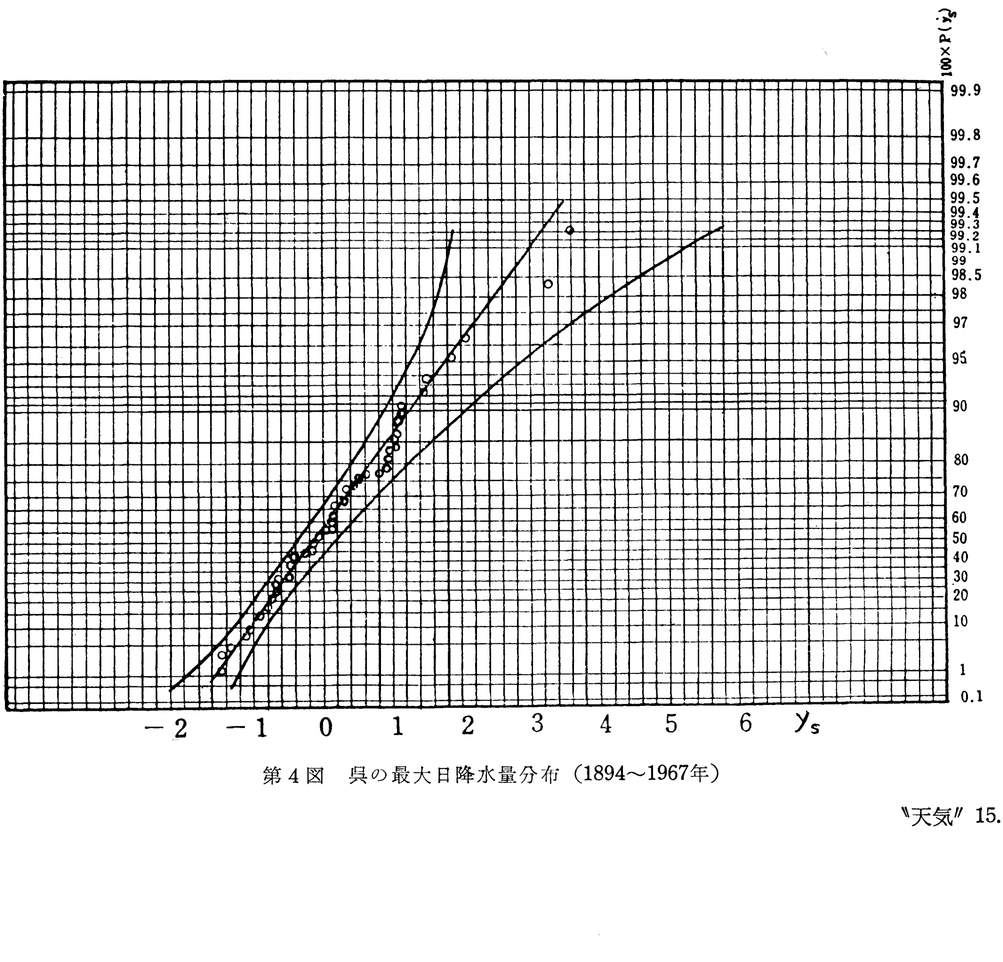
一般に n 個の観測値を大きさの順にならべたとき，最大値から数えて m 番目の標本の確率密度は

$$dF_{n-m+1;n}=P^{n-m}(1-P)^{m-1}dP/B(n-m+1,m)$$

で与えられる（Kendall, 1947）．いま不完全ベータ関数

$$I_x(a,b)=\int_0^x\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}d\theta/B(a,b),\quad 0<x<1$$

を用い，最小値から数えた標本の順位を i とすれば $i=$



第4図　呉の最大日降水量分布（1894～1967年）

$n-m+1$ であるから

$$F_{i;n}=I_p(n-m+1,m)=I_p(i,n-i+1)$$

となる．n を定めて $F_{i;n}$ の値をあらかじめ $\varepsilon, 1-\varepsilon$ と与えれば各 i あるいは各 m に対して信頼限界を作ることができる．

呉の資料では第4図に示したようにほゞ直線と見做せるから，適合する曲線は $j=5$ の場合である．

そこで第2図，第3図を用いて，呉において10年間にある最大日降水量を越える確率がわずか1％であるような，ある最大日降水量を求めよう．第3図で $n=10$の斜線をたどり，$F_{n;n}=0.99$のよこ線と交わる点を下にたどり，よこ軸の $\eta=6.93$ を得る．第2図の変換尺でこの η に対して y_s を $j=5$ の場合について求めると $y_s=4.95$. 推定値 $\hat{x}$ は

$$\hat{x}=\bar{x}+s_x y_s$$

で与えられるから

$$\hat{x}=99.0+33.5\times4.95=264.8$$

また推定値の標準偏差 $s(\hat{x})$ は近似的に

$$s^2(\hat{x})=s_x^2\frac{\alpha}{N}$$

で与えられる．Nは標本の大きさで，α は各分布型によって第3表の各式を用いて求められる．

第3表　α を求める式

分布の型	
$j=1$（正　規）	$0.5y_s^2+1$
$j=2$	$0.583y_s^2+0.410y_s+1$
$j=3$	$0.691y_s^2+0.655y_s+1$
$j=4$	$0.772y_s^2+0.5963y_s+1$
$j=5$（二重指数）	$1.100y_s^2+1.1396y_s+1$

いまの場合には

$$\alpha=1.100\times(4.95)^2+1.1396\times(4.95)+1=32.5939$$

したがって

$$s(\hat{x})=33.5\times\sqrt{\frac{32.5939}{72}}=22.5$$

求める最大日降水量は

264.8±22.5 mm

となる．

同様に呉における再現期間70年に相当する最大日降水量を求めよう．

再現期間と確率 P との関係から

$$1-P=\frac{1}{70}$$

したがって $P=0.986$となるから，第3図よこ軸上で $P=0.986$に対応する η を読むと $\eta=4.32$. $j=5$ の場合にこのに対応する y_s は第2図で $y_s=2.92$. したがって

$$\hat{x}=99.0+33.5\times2.92=196.8$$

前と同じく，推定値 x の標準偏差 $s(\hat{x})$ は α を求めて，

$$\alpha=1.100\times(2.92)^2+1.1396\times2.92+1=13.7067$$

となるから

$$s(x)=34.5\times\sqrt{\frac{13.7067}{72}}=14.61$$

したがって求める最大日降水量は196.8±14.6 mm.

3 むすび

以上 Gringorten の極値推定図表を使用した1例を示した．従来の方法で求めたものと比較することが必要であるが，今後の研究課題として残す．最後に種々御助言を頂いた気象研究所鈴木栄一氏および呉市における最大日降水量の再現期間の推定を含め集中豪雨の調査を御提示された理学部前川力教授に感謝する．

参考文献

Fisher, R.A. and Tippett, L.H.C. (1928); Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. Proc. Cambridge Philos. Soc. **24**, 180-190.

Jenkinson, A.F. (1955); The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements. Quart. J.R.Met.Soc., **81**, 158-171.

Gringorten. I. (1962); Fitting-meteorological extremes by various deteoroons. Quart. J.R. Met. Soc., **88**, 170-176.

(1963); Envelopes for ordered observations paplied to meteorological extremes. J. Geophy. Res., **68**, 815-826.

(1963); A simplified method of estimating extreme values from data samples. J. App. Met., **2**, 82-89.

(1963): A plotting rule for extreme probability paper. J. Geophy. Res. **68**, 813-814.

Gumbel. E.J. (1958);「極値統計学」河田竜夫・岩井重久・加瀬滋男監訳，広川書店．1962.

Gumbel, E.J. and C.K. Mustafi (1967); Some analytical properties of bivariate extremal distributions. J. Amer. Stat. Assoc., **62**, 569-588.

気象庁統計課 (1954)；主として小河原氏の方法による日降水量の Return Period の計算法，電力気象連絡会彙報，第2輯，**3**, 209-239.

菊地原英和 (1959)；確率雨量について，気象研究ノート．**10**, 125-138.

Kendall, M.G. (1947); The advanced theory of statistics. vol. 1, Charles Griffin and Co., London 1947.

Lieblein, J. (1954); A new method of analyzing extreme value data. NACA tech. Note 3053. 88pp.

Ogawara, M. and Collaborators(1955); Stochastic limits for the maximum possible amount of precipitation. Papers in Met. and Geophys., **5**, 8-21.

Tippett, L.H.C. (1925); On the extreme individuals and the range of samples taken from a normal population. Biometrika, **17**, 364-387.