

回転流体の性質について*

木 村 竜 治**

まえがき

この解説は、大気や海洋の大規模な流れのメカニズムを理解する上で不可欠と思われる回転流体の基本的な性質（の一部）を、数学的論理の助けをなるべく借りずに、物理的イメージの積重ねで述べようとするものである。

扱った内容は、大抵、高校の地学の教科書にも、またもっと上級の気象（海洋）力学の教科書にも扱われていることであるが、筆者の意図は、どちらの教科書にも十分な説明がなくて、しかも大気や海洋の流れを理解するために役に立つような考え方を提供することにある。

入門的な性格という点では、高校の教科書と同じであるが、現在の気象学の入門が、自然現象の記述に重点がおかれているのに対して、ここでは、大気や海洋のメカニズムを初等的な方法で理解することを試みる。また、メカニズムを扱うという点では、上級の教科書と同じであるが、体系化された教科書がもつぱら数学的論理を拠所とするのに対して、ここでは、物理的なイメージによって理解することを試みる。

もちろん、数学を使用しないで定量的に話を進めることは不可能であるから、ここでは、定性的な性質だけを問題にしよう。自然現象が音楽であって、数学的な理論が楽譜であるとすれば、これから述べようとすることは、筆者が感じた音楽の意味を述べることであり、楽譜を解釈することである。

1. 流体の圧力について

ラッシュ時の超満員の電車の中に押し入ろうとすれば、力に抗して動くわけだから仕事（=力×距離）が必要である。坂道を昇るときの仕事は位置のエネルギーになるのと同じ意味で、電車の中にわけ入る場合の仕事は何に変化するだろうか？

四方から押されると弾力のある体が縮む。いわばバネが縮んだ状態に対応するわけで、実は、押し入る力は弾性のエネルギーに変化しているのである。

この経験を通じて、圧力とは位置のエネルギーと同じくエネルギーの一形態であることを知る。この事は圧力の単位が $\text{dyn/cm}^2 = \text{erg/cm}^3$ と書きなおせることからわかる。左辺は単位面積当りの力であり、右辺は単位体積当りのエネルギーであることを表現している。

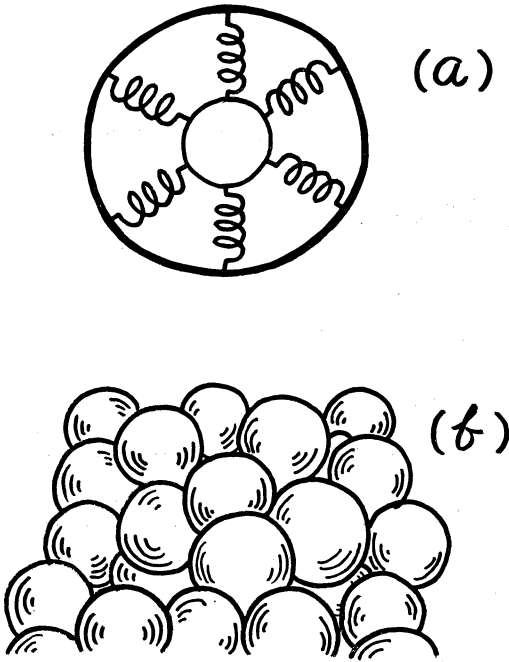
再び電車にもどるが、いくら強い力で押されていて、前後左右から同じように押されていれば、力を入れないでも静止してられる。しかし、左右から押される力が異なれば、力を入れて逆らわないと静止してられない。この事は、物を動かす力は圧力ではなくて、圧力差であることを教えてくれる。圧力と圧力傾度力との関係は、電位と電位差の関係に対応する。

満員電車と流体がよく対応するのは、人間が伸び縮みするからである。1つの流体粒子の構造として第1図に示すような球を考え、流体の伸び縮みをバネの伸び縮みに置きなおして考えてみよう。流体を、このような球がひしめきあっている状態のイメージで考えて見ると、流体の基本的な性質が実感として感じとられる。

1) バネ係数の大きさが流体の非圧縮率に対応する。バネ係数が小さい場合は気体、バネ係数が無限大の場合は、いわゆる非圧縮性流体に対応する。（大気は気体であるが、ここでは理解の簡単のために非圧縮性流体を想定して話を進める。）

* On the basic properties of rotating fluids

** R. Kimura 東大海洋研究所
—1973年8月22日受理—



第1図 流体の模型。(a)流体粒子をバネで支えられた球と考える。バネの縮み具合が圧力に対応する。バネは方向によらず同じ様に縮む(パスカルの原理)。(b)流体粒子がひしめきあって流体を構成している。

2) 流体の一部を急に押したときの圧力の変化は流体内部に弾性波としてひろがってゆく。これは音波に他ならない。水中の音速が空気の音速より大きいのはバネ係数の違いから理解できる。大気や海洋の流れは音速よりもはるかに遅いから、自然流体系では圧力場はつねに流体全体の状態を感じて定まっていると考えて良い。

3) 定常非圧縮性流体に対するベルヌーイ (Bernoulli) の定理:

$\frac{\rho}{2}U^2 + \rho gh + p = \text{一定}$ (U =速度, ρ =密度, h =高さ, p =圧力) は、単位体積の流体粒子の持っている、運動エネルギー、位置のエネルギー、圧力のエネルギーの和が保存されることを示している。

4) 流体粒子は一般に自転しながら並進運動を行う。自転に伴う角運動量が渦度 ($\equiv \nabla \times \mathbf{q}$) に対応する(8節参照)。圧力は粒子の中心のまわりのトルクを持たないから、どんなに圧力傾度力が作用しようとも、渦度を変化させることができない。この性質は、流体力学でヘルムホルツ (Helmholtz) の渦定理、気象学で絶対渦度保存則と呼ばれる。

2. 静力学平衡について

普通、静力学平衡というとき重力と圧力傾度力のつりあいをいうが、ここでは、特に重力にはこだわらずに、流体粒子に働く外力と圧力傾度力とのつりあいを静力学平衡と呼ぼう。

流体力学では、基本場として特に外力場におかれた流体を考えることはないが、気象学や海洋学では、重力場と遠心力の場の中におかれ流体が話の前提になっている注)。従って流体には常に圧力傾度力が現われている。静力学平衡で現われる圧力傾度力は流体全体の性質で定まるので《場の力》と呼ぶにふさわしい。この場合、場の力は、外力を支える《抗力》であり、受身の力である。それでは、この力は床と同じようにいつでも外力を支えられるのだろうか。これは、《場の安定性》を調べればわかる。

外力と圧力傾度力がつりあっている流体系が与えられたとしよう。1つの流体粒子を平衡の位置から強制的に少しずらして見る。この時、つりあいがくずれて流体粒子に働く外力と動かした位置における場の力の差が現れる。平衡がくずれて生じる力(以後、平衡くずれの力と呼ぶ)が流体粒子を平衡の位置にもどす方向に働く(復元力)場合は、場は安定である。逆の方向に働く場合は不安定である。流体粒子を動かしても平衡くずれの力が現れない場合は、場は中立である、という。

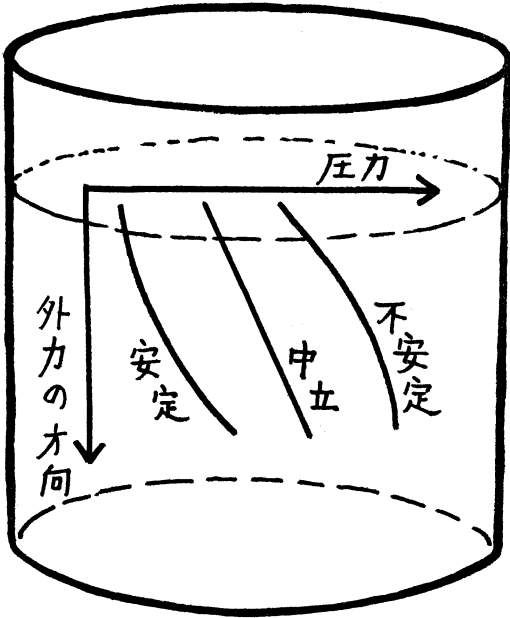
単位質量の流体に働く外力(加速度といってもよいのだろう)を \mathbf{F} 、流体の密度を ρ とするとき、単位体積の流体粒子に働く力 $\rho\mathbf{F}$ が流体粒子を動かしても変化しない場合には、次の定理がなりたつ。

定理: 場の力の大きさが \mathbf{F} の方向に増加すれば安定、変化しなければ中立、減少すれば不安定な平衡である。

同じことを次のようにいいかえることもできる。

系: 圧力 p のグラフが \mathbf{F} の方向に凸ならば安定、直線ならば中立、凹ならば不安定な平衡である(第2図参照)。

注) 一般の気象学では、万有引力と遠心力(地球の自転と同じ速度で回転する流体粒子に働く遠心力)の合力を重力と呼ぶが、ここでは、万有引力の場のみを重力場と呼び、遠心力の場と区別して扱う。万有引力と遠心力との性質の違いを考察したいからである。



第2図 場の安定性と圧力分布の関係（外力の大きさが流体粒子の移動によって変化しない場合）。

外力が重力の場合、単位体積の流体粒子に働く力は鉛直下向きに $\rho_0 g$ (ρ_0 はその流体粒子の密度) で流体粒子を動かしても変化しないから、上の定理があてはまる。この時、場の力は $\rho(\mathbf{r}) g$ ($\rho(\mathbf{r})$ は密度の空間分布) で、 g は一定と見なせるから、 ρ が鉛直下向きに増加すれば安定、 ρ =一定ならば中立、下向きに減少すれば不安定な平衡である。

安定な静力学平衡にある流体は復元力が働くので振動が生じることが期待できる。流体は連続体であるから振動は波となって伝播する。また、不安定な平衡にある流体は、流れが生じて安定な平衡の方向に流体粒子の位置交換が行われる。重力場の中では、それぞれ《内部重力波》、《対流》と呼ばれる。自由表面のある流体は安定成層の特殊な場合で、《外部重力波》が生じる。

外力が遠心力の場合、重力波と対流に対応するのが、《慣性振動》と《慣性不安定》である。この呼び名は遠心力が慣性力であることからきている。それでは、場の力を $\rho(\mathbf{r}) g$ の代わりに $\rho(\mathbf{r}) \Omega^2(\mathbf{r}) r$ ($\Omega(\mathbf{r})$ は平衡状態にある流体の角速度) とおきかえれば、重力場における議論は、そのまま遠心力の場に置きかえて良いか、というところはゆかない。

それは、流体粒子が半径方向に動くと、粒子に働く外

力が増えるので、上述の定理があてはまらないからである。この意味で、成層のない回転流体の力学は回転していない成層流体力学よりも複雑で、理解が困難である。次に、節をあらためて、外力が遠心力である場合の場の安定性を考察する。

3. 回転流体の場の安定性について

今、半径 r における角速度が $\Omega(r)$ であるような静力学平衡にある流体の場を考えよう。流体の密度 ρ は一様とする。半径 r_1 にある単位断面を持つ流体の輪を考える。輪を構成する流体粒子に働く遠心力 $F(r)$ は、 $F(r_1) = \rho \Omega^2(r_1) r_1$ であるが、この流体の輪を強制的に半径 $r_2 (> r_1)$ まで移動させた時、この粒子に働く遠心力の大きさはどのように変化するだろうか。

定理：トルクが働かない場合は、流体の輪の角運動量は保存される。（流体力学：ケルビン (Kelvin) の循環定理注)、気象力学：絶対角運動量保存則）。

従って、半径 r_2 における流体粒子の角速度を $\Omega(r_1 \rightarrow r_2)$ とおけば、

$$\Omega(r_1) r_1^2 = \Omega(r_1 \rightarrow r_2) r_2^2 \quad (3.1)$$

が成り立つ。ゆえに

$$F(r_2) = \rho \Omega^2(r_1 \rightarrow r_2) r_2 = \rho \frac{\Omega^2(r_1) r_1^4}{r_2^3} \quad (3.2)$$

であることがわかる。

一方、場の力は中心の方向に $\rho \Omega^2(r) r$ で与えられるから、

$$F(r_2) < \rho \Omega^2(r_2) r_2$$

ならば復元力が働いて安定。

$$F(r_2) > \rho \Omega^2(r_2) r_2$$

ならば、遠心力が勝ってさらに r_1 から遠ざかる方向に力が働く事がわかる。中立の状態は、

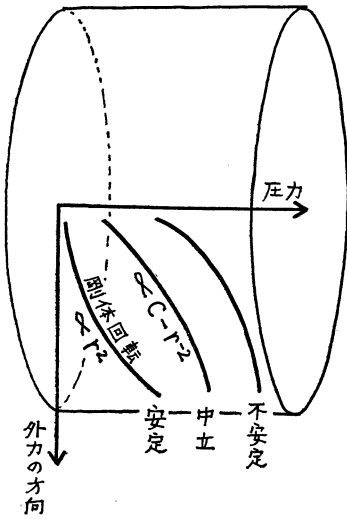
$$F(r_2) = \rho \frac{\Omega^2(r_1) r_1^4}{r_2^3} = \rho \Omega^2(r_2) r_2$$

$$\therefore (\Omega(r_1) r_1^2)^2 = (\Omega(r_2) r_2^2)^2 \quad (3.3)$$

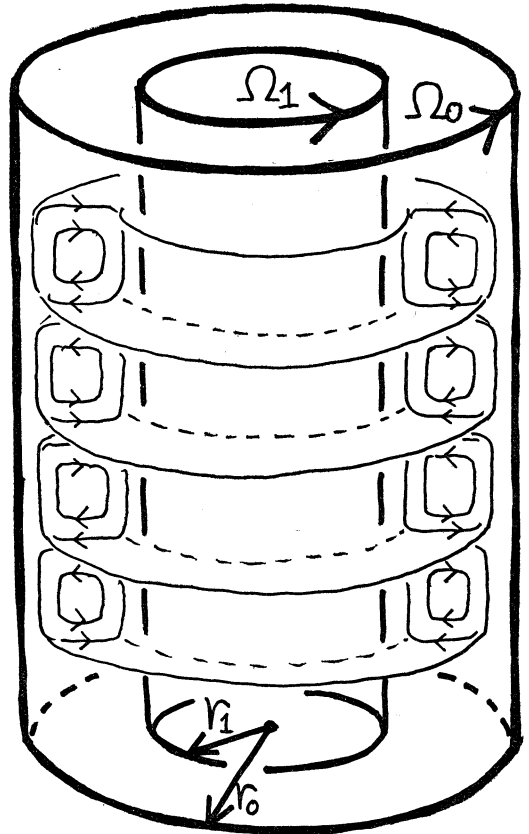
この式は、流体の循環 ($\equiv \mathbf{f} \cdot \mathbf{q} \cdot d\mathbf{s}$) が半径によらず一定の場合に密度一様な回転流体の場は中立であることを示している（この説明は、Von Kármán による）。第3図に r と ρ の分布を示す。第2図と比較されたい。

密度一様な回転流体の場の安定性は、最初 Rayleigh

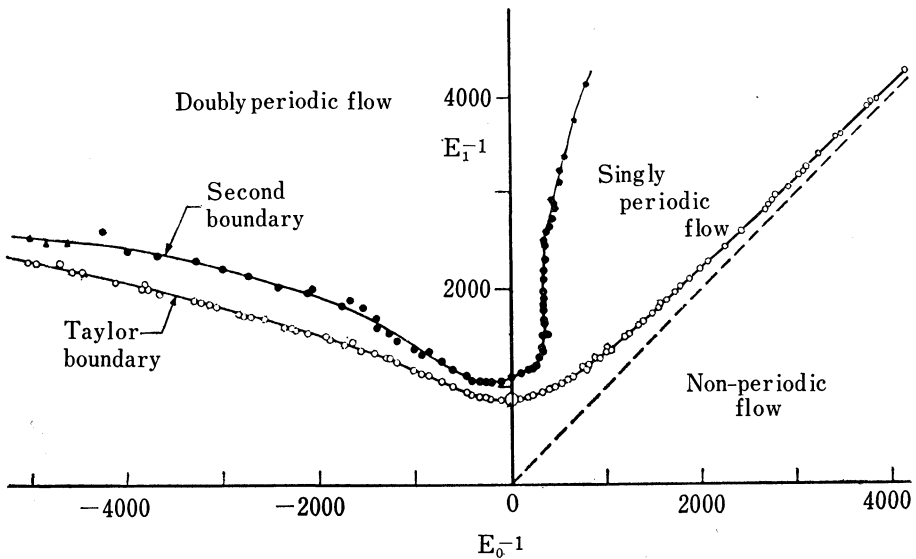
注) 循環定理は、流体の輪が円形でない場合でもなりたつから、角運動量保存則より一般性が大きい。



第3図 回転場の安定性と圧力分布の関係。図中のCは定数。第2図と比較されたい。



第4図 (a)異なる速度で回転する同心二重円筒にはさまれた流体層に生じる2次流れの模式図。(b)流れの安定性と外部パラメーターとの関係 (Coles (1965) によって得られた実験結果), $E_0 = \frac{\nu}{\Omega_0 r_0^2}$, $E_1 = \frac{\nu}{\Omega_1 r_1^2}$; ν は流体の動粘性係数。(a)に示した2次流れは、(b)の Singly periodic flow に対応する。Doubly periodic flow とは、(a)に示した2次流れの水平の軸が上下に蛇行するような流れである。



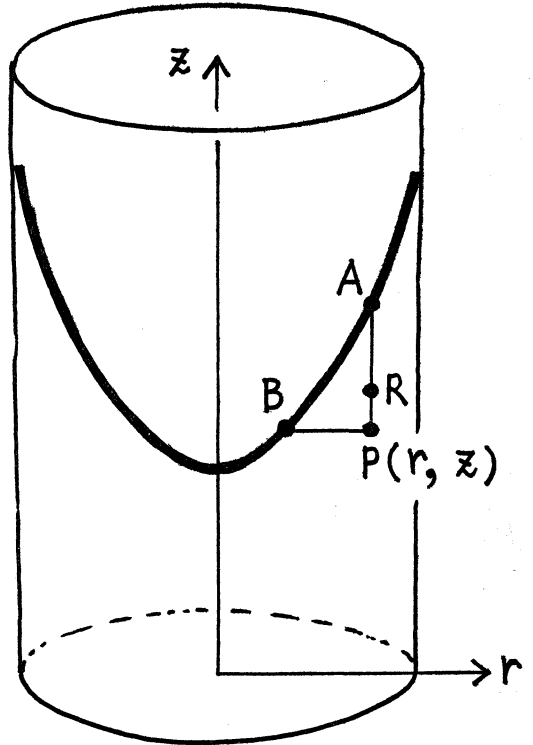
(1917) によって扱われ、Taylor (1923) が粘性効果を入れた回転クェット流 (circular Couette flow) の安定性として理論と実験の両面から詳しい研究を行った。特に、場が不安定になる場合の流れの構造については、慣性不安定の問題として多くの研究がある。第4図に Coles (1965) の実験結果を引用する。なお、慣性不安定の結果として生じる2次流れは、重力場における対流不安定によって生じる流れと著しい対応関係を示す (Lin, 1966, 109ページ参照) ことを述べておこう。

4. 剛体回転の圧力場について

容器に水を入れ、レコードプレーヤーの上ののせて回転させると、しばらくして容器内の水は容器と全く同じ回転を行うようになる注)。もしも容器に乗って水をながめることができるとすれば、水は静止している。ただ、回転していない時と違う点は、水面が水平面ではなく回転放物面になっている事である。このような状況の水は、重力と遠心力の2つの外力が働きそれぞれ圧力傾度力(場の力)とつりあっている。

地球上の流体(大気と海)も似たような状況にあって、われわれは容器(地球)に乗って回転する流体をながめていることになる。地球の場合は、重力と遠心力の相対的な方向が緯度によって異なっているために、2つの効果を分けて考えにくい。これに対して、プレーヤーの上で回転している容器内の水は、重力と遠心力の方向が直交しているので、流れのメカニズムを調べる目的に対しては、大気や海洋よりも見通しが良い。

無重力状態にある宇宙船内では物が浮かびあがって困るので、人工重力を作ることが行われる。これは、宇宙船を自転させて、遠心力で物を壁に押しつけようというアイデアである。この場合には壁が床になって回転の半径(r)方向が下向きということになる。このような状態の宇宙船に長い間乗っていた人が久しぶりに地球に帰ってきて、プレーヤーの上で回転している密度一様の流体(水)(第5図)をながめたとしよう。この人が、「P点(座標を (r, z) とする)における水圧はBP間にある水の重さである」と考えるのは人情として理解できるであろう。ところが、重力場の生活に慣れているわれわれは、P点における圧力はAP間の水の重さと考える。《パスカルの原理》は、この2つの立場が共に正しいこ



第5図 自由表面のある回転流体の点Pにおける圧力を考える。

とを示している。ところが、P点とR点における圧力を2つの立場で比較すればわかるように、 z 方向の水圧は水深に比例するが、 r 方向の水圧は《水深(BPのこと)》に比例しないのである。このような推論を一般化して次の定理を得る。

定理：重力場におかれた自由表面のある密度一様の流体に対して、水平方向に外力(特に遠心力とは限らない)が働いてつりあっている時、外力によって生じた圧力は自由表面の凹凸に表わされている。

系：このような流体に対する水平方向の圧力傾度力は自由表面の傾きに表わされている。

か座標系に対する運動方程式で圧力の代わりにジオポテンシャル(gz)が登場するのはまさにこのような性質の反映である。また、鉛直方向に重力以外の外力が働くような場合は、静力学近似は使えない。対流現象(上下方向の加速度が外力として作用する)を含む問題で静

注) もしも容器にふたがなければ、水面に接した空気のマサツによって、容器よりも多少遅い回転を行なうことになる。容器にふたがあれば、厳密な意味で、剛体回転に落着く。

力学近似を行わないのはこのためである。

3節で述べたごとく、剛体回転の場合は安定である。水平方向の外力は $\rho_0 \Omega^2 r$ (ρ_0, Ω は一定) であるから、場の力は、 r に比例する。一方、重力場内の静止した流体に加わる外力は ρg であるから、 ρ が z に比例して増加する成層流体と、密度一様の剛体回転流体が対応することが予想される。成層流体に生じる内部重力波に対応するものが、剛体回転流体では慣性振動であることはすでに述べた。次にその性質を調べたのであるが、それにはまず復元力の表現を考察する必要がある。

5. 転向力 (コリオリの力) について

5.1 慣性力について

慣性の法則は慣性系でない系に対しては成り立たない。このことは、加速している電車の中では、全く力が働いていないのに、(まさつけない) 物体が動きだしたりすることからわかる。地球も回転しているから慣性系ではないので、加速している電車と同様の事が起こる。大気や海洋の力学を慣性系 (回転系に対して静止系と呼ぶことにしよう) からながめれば、力学の法則は適用しやすいが、地球に乗っているわれわれにとっては、できれば回転系の上で力学の法則を適用したいと思う。ところが、慣性の法則を次のように一般化することによって、この事が可能になる。

定理：慣性系、非慣性系を問わず、その系から見て、物体に力が働かなければ(その系に対して) 等速直線運動を行う。ただし、非慣性系はその系に固有の外力場を常に伴う。この外力を慣性力という。この外力はみかけの力とも呼ばれるが、そもそも物体の慣性に由来している力なので、ここでは慣性力と呼ぶことにする。

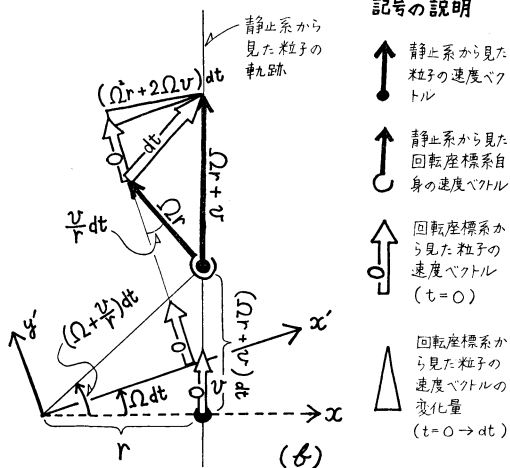
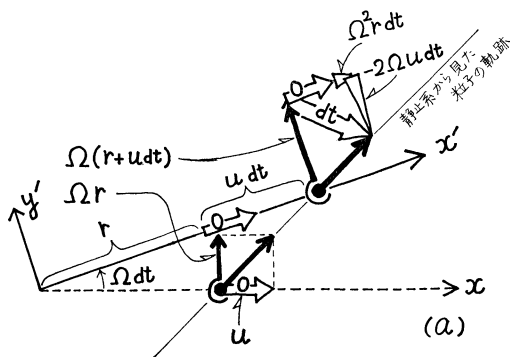
この考えは、加速度系から見て物体が慣性の法則に従わないのを、「いやいや、従っているのですよ。一見奇妙なふるまいをするのは慣性力という力が働いているからなのです」とウソをついてごまかしてしまう態度である。力学法則は、このような細工を行っても破綻が生じないことを示している。

従って、慣性力とは、電磁力や核力と異なり、力の源を持たない。空間の幾可学的な性質が力を生みだしているのである。余談になるが、慣性質量と万有引力を生みだす質量が同じであることを手掛りに、万有引力も慣性力の一種であると考えたのがアインシュタイン (の一一般相対論) である。

5.2 回転系の慣性力

どのような慣性力を導入すれば回転系をあたかも慣性系のように扱うことができるのであろうか。それには、次の方法をとればよい。静止系から見て等速直線運動を行っている粒子を回転系から見て非常に短い時間間隔の間の運動量の変化を見る。ここで得られた変化を起こさせるような慣性力を導入すれば良いのである。このような方法で、回転系の慣性力を調べて見よう。

平面上に原点を共有した2つの直交座標系を考え、1つが静止して、1つが原点のまわりを角速度 Ω で回転しているものとする。静止系を xy -系、回転系を $x'y'$ -系と呼ぼう。今、 x' 軸が x 軸に重なった瞬間 ($t=0$ としよう) に、等速直線運動をしている単位質量の粒子が $x=r$ の点で軸上を横切った、とする。この時刻と、そ



- 記号の説明
- ↑ 静止系から見た粒子の速度ベクトル
 - ↑ 静止系から見た回転座標系自身の速度ベクトル
 - ↑ 回転座標系から見た粒子の速度ベクトル ($t=0$)
 - △ 回転座標系から見た粒子の速度ベクトルの変化量 ($t=0 \rightarrow dt$)

第6図 静止座標系 (xy) に対して一定の速度 ((a) $(u, \Omega r)$, (b) $(0, \Omega r + v)$) で飛ぶ粒子を Ω で回転する座標系 ($x'y'$) からながめて、 dt 時間の間の速度の変化を求める。

れから短い時間 dt 後の粒子の速度ベクトル (=運動量ベクトル) の変化を $x'y'$ -系からながめよう (xy -系から見れば、もちろん速度ベクトルは変化しない)。粒子の速度ベクトルが任意の場合は話が複雑になるので、ここでは2つの特別の場合を考える。すなわち、 $x'y'$ -系から見て $t=0$ に x' 軸を通過する速度が $q'_1(u, 0)$ と $q'_2(0, v)$ の場合である。それぞれの粒子が xy -系に対して $q_1(u, \Omega r)$, $q_2(0, \Omega r + v)$ の速度を持つことは明らかであろう。このように定式化すると、 $x'y'$ -系に対する速度ベクトルの変化の計算は、もはや物理学というよりは幾何学の問題になる。第6図に図解を示すように、速度ベクトルの変化 dq' は、それぞれの粒子で、

$$dq'_1 = (\Omega^2 r, -2\Omega u) dt \quad (5.1)$$

$$dq'_2 = (\Omega^2 r + 2\Omega v, 0) dt \quad (5.2)$$

となる。《運動量の変化は力積に等しい(運動の第2法則)》という事の類推から、次のような慣性力を導入すれば話の辻つまがあいそうである。回転系においては、

① 質量 m の物体に対し、物体の運動に関係なく半径方向に $m\Omega^2 r$ 、ベクトル表記で $m\Omega \times (\Omega \times r)$ なる力が働く。

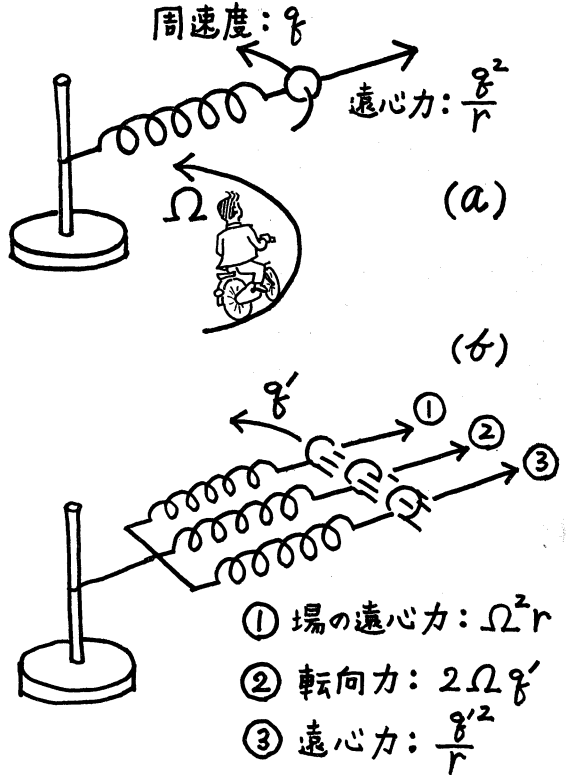
② 物体が運動すると $-2m\Omega \times q$ の力が働く。

① は遠心力、② は転向力(コリオリの力)に他ならない。この2つの力さえ導入すれば、回転系を慣性系と思ってよしい、というのが先に述べた定理の内容である。① を特に《場の遠心力(または人工重力)》と呼ぼう。

慣性力がいかに座標系に相対的なものであるかは、次の場合を考えれば明らかである。マサツのない回転円盤(回転数を Ω とする)の上で(静止系から見て)球が静止している状態を考えよう。円盤の中心から球までの距離を r とする。静止系で見ると、球には全く力が働かないから静止している。一方、円盤に乗って見ると、球は Ω の角速度で回転して定常状態を保っている。このことを、回転系に乗った人は「この球には半径方向外向きに場の遠心力 $\Omega^2 r$ 及び球が回転していることによって生じる遠心力 $\Omega^2 r$ 、また中心の方向に転向力 $2\Omega v = 2\Omega^2 r$ の3つの力が働いてつりあった状態にある」というのである。

5.3 慣性力と場の力との関係

前節では、静止系から見て全く外力が働いていない物体に対して回転系における慣性力を導入した。しかし流体の場合は、場の力(圧力傾度力)によって拘束されているのが一般である。そこで、慣性力と場の力との関係



第7図 圧力傾度力(バネで表現)で拘束されて円運動を行なう流体粒子の力のつりあい。(a) 静止系から見た場合 (b) 同じ粒子を Ω で回転する系から見た場合。

を次に考察する。

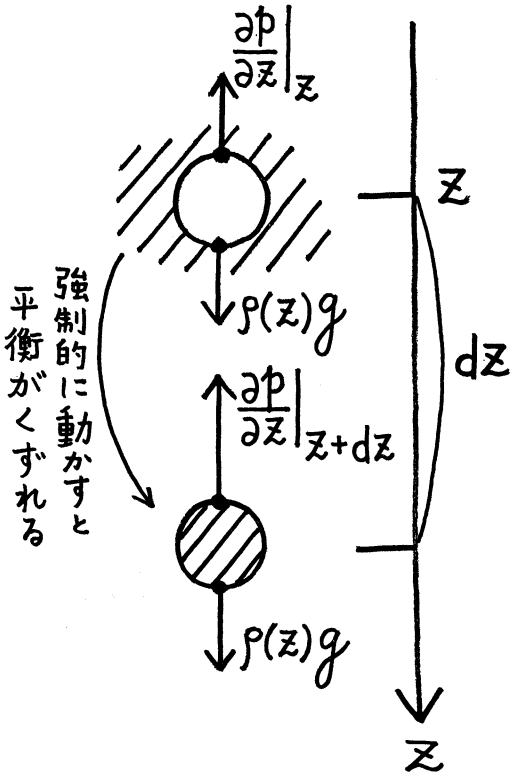
静止系から見て、点Pのまわりを周速度 q で回転している粒子を考えよう。この粒子は遠心力 $\frac{q^2}{r}$ と場の力がつりあっている(第7図(a))。この粒子を同じく点Pのまわりを角速度 Ω で回転する系からながめたとする。その系に対して、粒子が q' で回転していると、

$$q = \Omega r + q' \quad (5.3)$$

ゆえに静止系で見た粒子の遠心力は

$$\frac{q^2}{r} = \frac{(\Omega r + q')^2}{r} = \Omega^2 r + 2\Omega q' + \frac{q'^2}{r} \quad (5.4)$$

右辺第1項は《場の遠心力》、第2項は《転向力》、第3項は回転系から見た粒子の《遠心力》であり、この3つの力の和が気圧傾度力とつりあっている(第8図(b))。そこで、静止系から見た気圧傾度力を3つの部分に分け、それぞれ、場の遠心力、転向力、遠心力にバランスしていると考え。場の遠心力と気圧傾度力とのつりあいは人工重力に対する《静力学平衡》、転向力と気圧傾



第8図 内部重力振動における復元力（浮力）。

度力とのつりあいは《地衡風平衡》、遠心力と気圧傾度力とのつりあいは《旋衡風平衡》と呼ばれるものであるが、静止系で見れば3つ合わせて遠心力に対する静力学平衡を表現していることがわかる。なお、地衡風平衡と旋衡風平衡が同時になりたっている状態は《傾度風平衡》と呼ばれる。

半径方向の運動に対して作用する転向力は粒子の角運動量保存則から導くことができるが、その話は省略する（高橋，1968参照）。

6. 内部重力振動と慣性振動

6.1 内部重力振動

水面を原点、鉛直下向きに z 方向を定めて密度が $\rho(z)$ で与えられる成層流体を考える（第8図）。深さ z にあって場の力とつりあっている単位体積の流体を $z+dz$ まで移動させたときの平衡くずれの力を求めよう。流体粒子に働く外力は $\rho(z)g$ で場の力は $-\rho(z+dz)g$ であるから、平衡くずれの力 $F(z+dz)$ は

$$F(z+dz) = \rho(z)g - \rho(z+dz)g$$

$$\doteq -\frac{d\rho}{dz} dzg \quad (6.1)$$

ニュートンの運動の第2法則より

$$\rho(z) \frac{dw}{dt} = \rho(z) \frac{d^2(dz)}{dt^2} = -\frac{d\rho}{dz} g dz$$

$$\therefore \frac{d^2(dz)}{dt^2} = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz} dz = -\nu_b^2 dz \quad (6.2)$$

この式の右辺は単位体積当りの浮力を表し、

$$\nu_b^2 = \sqrt{\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz}}$$

を Brunt-Väisälä の振動数という。振動数という意味は、 dz が小さい時に ν_b が近似的に定数とみなせて、

$$dz = \sin \nu_b t$$

を得るからである。 ν_b は内部重力波の角振動数を表す。

実は、上に述べた議論は厳密ではない。流体粒子の振動が生じると、その加速度が外力（慣性力）として作用するために流体全体の圧力場（バネの縮みの分布）は、重力場のみが作用した状態から変化するのである。従って流体粒子に働く場の力が上述の値からずれてくるからである。 z 方向の運動方程式

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{A\rho}{\rho} g \quad (6.3)$$

に現われる圧力の摂動 p' は、まさにその効果を表現している。 p' の効果を考慮した内部重力波の議論については小倉（1966）第2章を参照されたい。

さて、次に同じ事を成層のない回転流体について考えて見よう。

6.2 回転系から見た慣性振動

5.3 で述べたごとく、回転系に対して相対運動のない剛体回転の場合は、人工重力（場の遠心力）に対する静力学平衡がなりたっている。そこで、第8図の z 軸を r 軸（回転半径）に置きなおして6.1と同じ事を考えて見よう（第9図）。

つりあっている粒子を半径方向に dr だけ移動させると、転向力のために

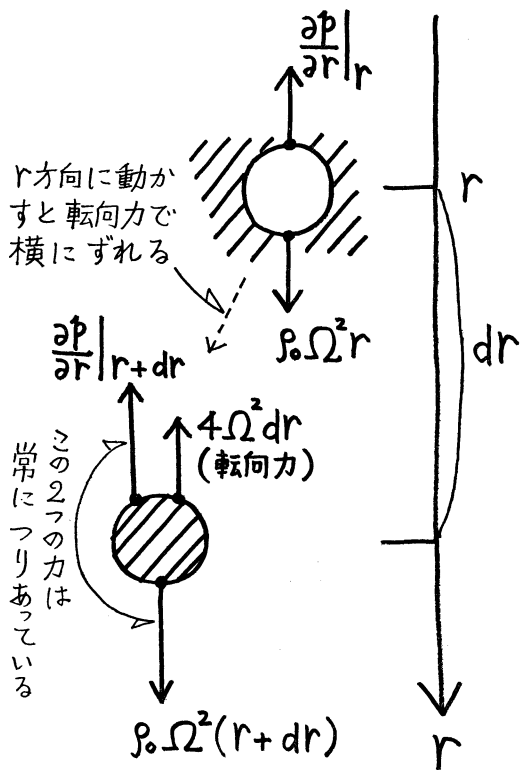
$$\rho_0 \int 2\Omega v dt = \rho_0 \int 2\Omega \frac{dr}{dt} dt = 2\rho_0 \Omega dr$$

$$(6.4)$$

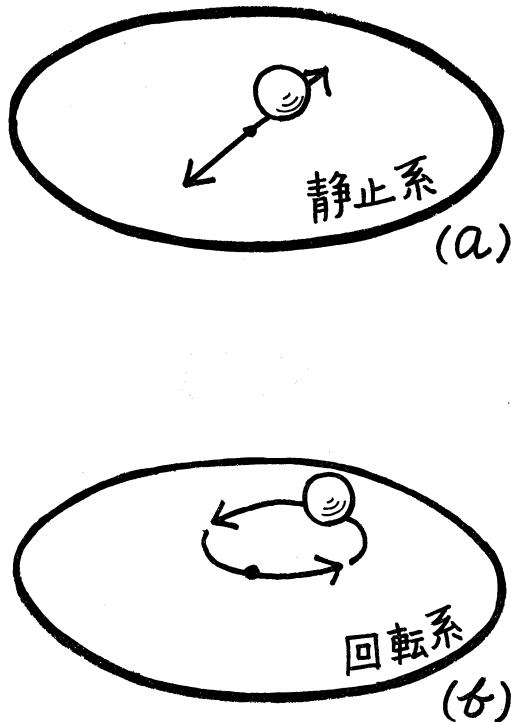
だけ運動量（従って $2\Omega dr$ の速度）を r と直角方向に与えられる。ところが、この速度 ($v=2\Omega dr$) に転向力が働いて、粒子は中心方向に

$$2\rho_0 \Omega v = 4\rho_0 \Omega^2 dr \quad (6.5)$$

の外力を受ける。粒子にはこの他に人工重力 $\rho_0 \Omega^2 (r+dr)$ と、気圧傾度圧 $\frac{\partial p}{\partial r}$ を受けるわけだが、人工重力と



第9図 慣性振動における復元力. 第8図と比較されたい.



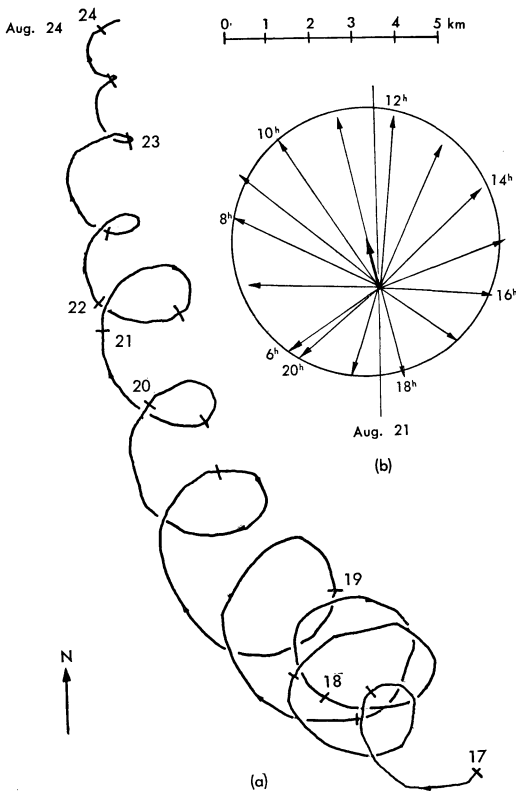
第10図 (a)静止系から見た慣性振動は(原点を通る粒子に対して)調和振動である。(b)同じ現象を回転系からながめると円運動を行っている。

気圧傾度力のバランスは粒子の位置が変わっても変化しないから、結局平衡くずれの力は偏向力そのもの、ということになる。同じく平衡くずれの復元力でありながら、圧力傾度力が関与していない点が浮力と異なっている。Brunt-Väisäläの振動数に対応するものが $f=2\Omega$ である事は、(6.5)式が(6.2)式の右辺に対応することからわかる。 f が慣性振動の角振動数である。内部重力振動と慣性振動を比較してみると、粒子の軌跡は非常に異なっている。前者が z 軸方向の往復運動であるのに対し、後者は、慣性円と呼ばれる円軌道を描く。振動とはいいながら、粒子の運動エネルギーは全然変化しないのである。そもそも、振動とは、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーのやりとりであるはずなのに、これは一体どういうことなのだろうか。この事を理解するために同じ慣性振動を静止系から観察してみよう。

6.3 静止系から見た慣性振動

話を簡単にするために、剛体回転を行っている流体の中心にある粒子(角運動量をもっていない)を強制的に

半径方向に r_0 だけ移動させて、その後の運動を見る(第10図)。この時、この粒子に働く力は圧力傾度力 $\frac{\partial p}{\partial r} = -\Omega^2 r$ のみであるから、運動方程式は、 $\frac{d^2 r}{dt^2} = -\Omega^2 r$ となり、角振動数 Ω で調和振動を行うことになる。粒子は水平圧力傾度のある場を運動するので、粒子のバネは伸びたり縮んだりするはずである。すなわち、この振動で運動エネルギーとやりとりを行うポテンシャルは圧力であることがわかる。さて、この振動によって粒子は回転容器の底にどのような軌跡を描くであろうか。粒子を回転系から見れば、中心を通る直径 r_0 の慣性円を描き、角速度 2Ω で等速円運動を行うことが予想されるが、幾何学的な関係はまさにそうなっているのである(この証明は頭の体操として試みられたい)。この事から、慣性振動とは本質的には半径方向の振動であり、半径に直角方向の運動は、振動のメカニズムには直接関係がないことがわかるであろう。運動エネルギーとやりとりを行うポテンシャルは、粒子が水平面を動くときは圧力のエネルギーであり、粒子が等圧面に沿って動くときは、位置



第11図 1933年8月17日より24日までバルト海で観測された慣性振動。(a)は流れに乗った粒子の軌跡を表す。(b)は8月21日の6時より20時までの速度ベクトルの変化を表す。Gustafson と Kullenberg の観測結果 (Sverdrup et al (1942) の p. 438 より)。

のエネルギーである。

以上の議論でも、6.1 と同様、運動によって生じる圧力場の変化を考えないで話を進めた。この効果を考慮した慣性振動の議論は Greenspan (1968) p. 185 を参照されたい。

大気中では、プラネタリー境界層の上部 (Blackadar, 1957) とジェット気流の中に (Newton, 1959) 慣性振動が生じることが報告されている。海洋の内部では、強い風が吹いた後に慣性振動がよく観測される。第11図に海洋内部の振動例を示す。

7. 地衡風 (温度風) 平衡について

5.3 節で、剛体回転をしている流体を異なる回転系から見ると、遠心力と気圧傾度力のつりあいが、3つの力とそれに対応する気圧傾度力とのつりあいに分解される事を述べた。3つの力のうち、場の遠心力 (人工重力)

は流体の運動に関係なく作用するので、自然の重力と合せて扱われるのが普通である。ここでは、これを《合成重力》と呼ぶことにする。もしも $q' \ll \Omega r$ であれば、遠心力にバランスする気圧傾度力は、転向力にバランスする気圧傾度力に比べて無視できるので、剛体回転をしている流体を、その回転数とほとんど同じ回転をしている系からながめると、流体は地衡風平衡にあると理解される。この時、圧力場と流れの関係がバイスパロットの法則を満足しているのに注意されたい。

以上は、圧力場が剛体回転と平衡にある特別な場合であったが、地球大気 (海洋) の圧力場は流体の加熱冷却が伴うためにはるかに複雑な分布となっている。しかし、流れの場は (境界層をのぞいて) 大体地衡風平衡にある。もしも、何かの原因で地衡風平衡が破れたとしても、6節で調べたごとく、平衡くずれの力は慣性 (重力) 振動をひきおこし、振動のエネルギーは波として四方に広がってしまうので、再び地衡風平衡に落ちついてしまうのである (これを地衡風調節という)。

さて、地衡風平衡、

$$2\Omega \times \mathbf{q} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (\Omega \text{ は } z \text{ 方向のベクトル, } \rho \text{ は一定}) \quad (7 \cdot 1)$$

の回転 ($\nabla \times$) を取ると、

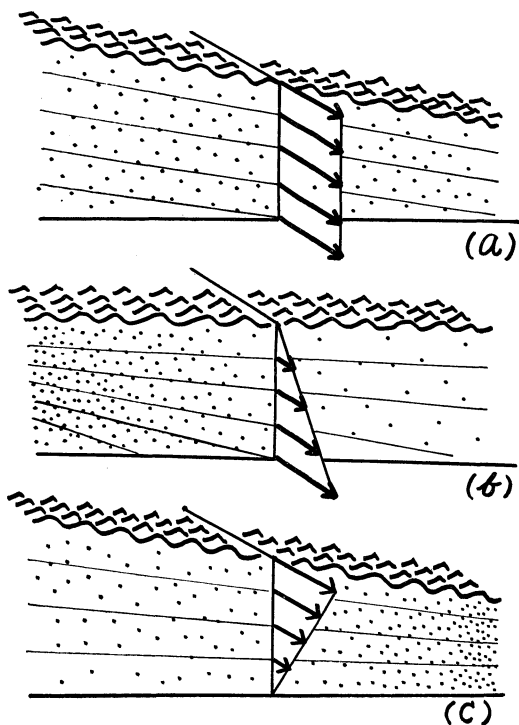
$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} = 0 \quad (7 \cdot 2)$$

を得る。

すなわち、地衡風平衡にある流れは回転軸の方向に変化しない。これをテラー=プラウドマン (Taylor-Proudman) の定理という。確かにそうであることは、プレーヤーの上で回転している容器内の水の中にインクを一滴たらして少しかきまわして見ればわかる。インクは流れに乗って乱れた渦の模様を描くが、どの深さの模様もすべて同じである。すなわち、インクの模様はカーテンのような感じになるのである。

なぜ、回転軸の方向に流れが一様になるのであろうか。これは転向力の性質というよりは圧力の性質に関係がある。密度一様の自由表面のある流体内の圧力傾度力は深さによらない (4節の定理参照)。従ってこれにつりあう外力 (転向力) の大きさも深さによらない。従って、速度も変化しないわけである注)。

逆に圧力傾度力が深さによって変化すれば、それと地衡風平衡にある流れの速さは深さと共に変化する。このような状態は密度が水平方向に異なる場合 (等密度線が



第12図 地衡風平衡にある風の鉛直分布。波型は水面，点の数が密度，細い直線は等圧線を表す。(a)は地衡風，(b)，(c)は温度風に対応する。

傾斜している場合)に実現して、これにつりあう流れの場を気象学では「温度風」と呼ぶ。第12図は等圧面の傾きと流速の鉛直分布の関係を示している。(a)は密度一様で自由表面の傾きがある場合、(b)は密度が水平方向に変化して自由表面の傾きがない場合、(c)は密度も自由表面の傾きも水平方向に変化している場合である。(a)、(b)、(c)はすべて気圧傾度力と転向力がつりあう、という意味で地衡風平衡にある。

定常状態の運動方程式

$$2\Omega \times \mathbf{q} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g} \mathbf{k} \quad (7.3)$$

(ρ_0 は一定、 ρ' は密度の摂動) の回転 ($\nabla \times$) を取って得られる温度風の関係式

注) もちろん、自由表面の代りに固体の壁がある場合でも同じことがいえる。このことは、自由表面のある流体内に水平に板をさし入れても、流体の圧力場が変化しないことから理解されるであろう。

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} = -\frac{g}{2\Omega\rho_0} \mathbf{k} \times \nabla \rho' \quad (7.4)$$

は、あたかも転向力と浮力との平衡のように見えるが、浮力の内容が平衡くずれによって生じた気圧傾度力であることを考えれば、温度風方程式は地衡風平衡を表現していることが理解されるであろう。テラー=プラウドマンの定理は温度風方程式の特別の場合なのである。

8. 渦について

8.1 渦度 (vorticity) と渦 (vortex)

1節で流体粒子の自転に伴う角運動量が渦度であることを述べた。流体粒子の自転はミクロスコピックな概念であるが、マクロな流れと密接な関係がある。それは、流体粒子がお互いにすべらないからである。1節で述べた流体粒子のイメージをさらに正確に述べれば、第1図に示した球がお互いにすべりあわないで、押しあっている状態なのである。従って1つの球が自転すれば、隣の球はどうしても自転せざるを得ないわけで、ミクロな渦は必然的にマクロな流れを生むのである。この関係を数学的に表現したものがストークス (Stokes) の定理である。

$$\int \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{q} \, dS = \oint \mathbf{q} \cdot d\mathbf{s} \quad (8.1) \text{注1)}$$

左辺は渦度の世界を表し、右辺は渦 (循環) の世界を表す。

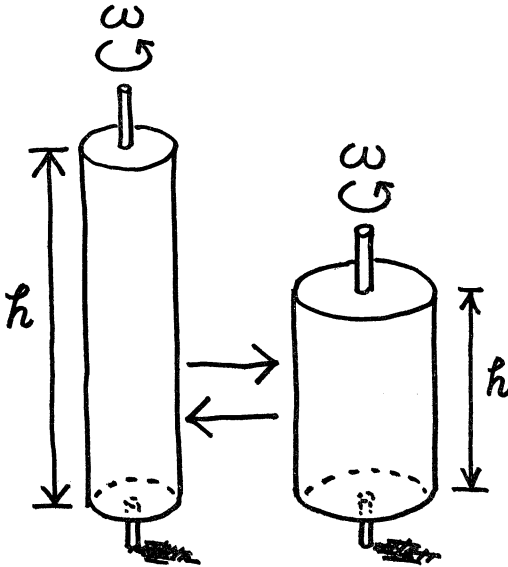
一般に、正の渦度は反時計方向の渦に、負の渦度は時計方向の渦に対応する。渦度が大きくなることと、渦の周速度が大きくなること、または曲率半径が小さくなることに対応する注2)。

8.2 ポテンシャル渦度保存則

密度一様の回転流体においては、テラー=プラウドマンの定理により、流体粒子の自転軸の方向は鉛直で、 z 方向に積み重なった粒子の自転速度は同じである。そこで流体粒子を鉛直方向に串ぎしにして、第13図に示したような渦の柱を考える。これを流体力学では、「渦糸」

注1) \mathbf{n} は面 S に立てた法線方向の単位ベクトル、 dS は面 S の面積素、 $d\mathbf{s}$ は面 S の境界線の線素で、境界線は閉じているとする。

注2) 「渦」という言葉は多少あいまいである。循環のある流れをすべて渦と呼べば、数学的にはすっきりするが、目で見ただけでいう渦とはかならずしも対応しない。たとえばシアのある流れなども渦と呼ぶことになる。一方、目で見ただけでいう渦は、かならず循環を伴う、と考えてよい。



第13図 渦の柱（コマで表現）が体積を変えないで伸びたり縮んだりしても ω/h は一定に保たれる（ポテンシャル渦度保存則）。

と呼ぶ。渦の柱は水平方向にはミクロのスケールであり、鉛直方向には、流体層の深さ h というマクロのスケールを持つような概念である。

さて、もしも h が固定されていれば、渦の角運動量が保存されることから粒子の自転速度 ω （渦度の1/2）が静止系から見て保存される注。もしも渦の柱がその体積を保存したまま伸びたり縮んだりした場合には、何が保存するのであろうか。

渦の柱の半径を r_0 とするとき、

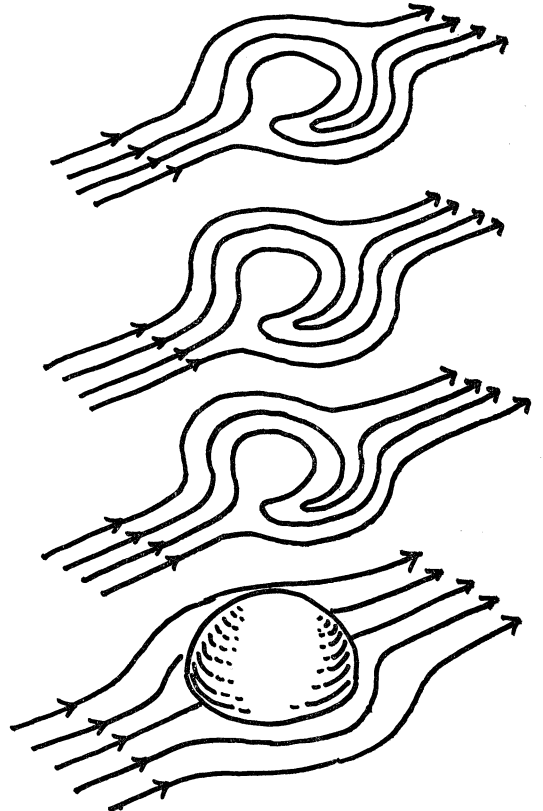
$$\begin{aligned} \text{渦の柱の角運動量} &= \int_{\text{全体積}} \rho \omega r^2 dv \\ &= 2\pi\rho\omega h \int_0^{r_0} r^3 dr \\ &= 2\pi\rho\omega h \frac{r_0^4}{4}. \end{aligned} \tag{8.2}$$

一方、渦柱の体積は $V = \pi r_0^2 h$ であるから、上式に代入して ω/h が保存することがわかる。 ω を Ω で回転する系から見ると、

$$\omega' = \omega - \Omega$$

のように見えるから、回転系に対しては、

注) 渦の柱に働く力が圧力傾度のみの場合である。粘性力が作用する場合は、渦の柱にトルクを与えるので、角運動量は保存しない。



第14図 Taylor column の模式図。山の上を通過する流れは渦を巻いて柱のようになる。

$$\frac{\omega' + \Omega}{h} \tag{8.3}$$

が保存される。 ω' の代わりに相対渦度 $(\nabla \times \mathbf{q})$ を導入すれば、

$$\frac{2\Omega + (\nabla \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{k}}{h} \tag{8.4}$$

が保存される。これをポテンシャル渦度保存則という。

回転流体の特徴的な現象の中には、ポテンシャル渦度保存則によって説明できるものが多い。そのいくつかを次に述べよう。

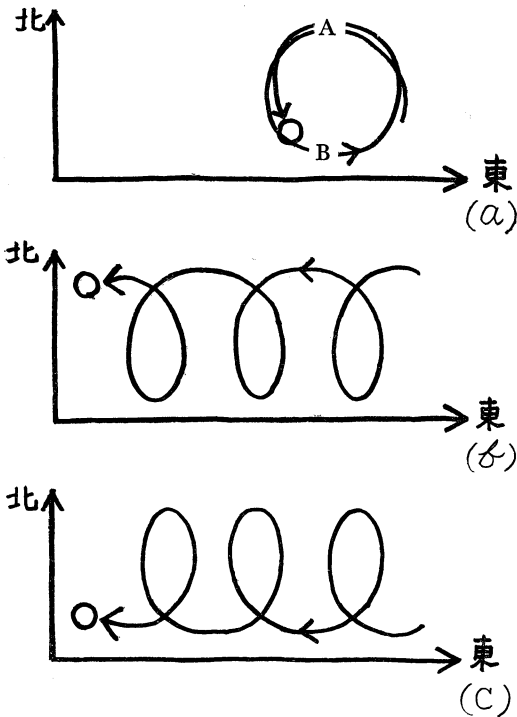
a) Taylor column

Ω で回転する円筒容器の中に、 Ω と少し異なる回転数で剛体回転をしている流体が満たされているとしよう。容器にはふたがしてあって流体層の深さは場所によらず一様 (h) であるとする。このような流れは、流体粒子の相対渦度が常に一定に保たれるので、ポテンシャル渦度保存則を満足している。

$$(\nabla \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{k} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) = 2\omega \quad (8.5)$$

であるから、相対渦度が増減しなければ、流体粒子は円運動を行い、渦の中心は回転系に対して静止している(第15図(a)).

さて、回転系に固定した座標系 (x, y) に対し、流体層の深さ h が、たとえば北方向に浅くなってゆくような場合を考えよう。流体粒子がポテンシャル渦度を満足しながら円運動を行う場合、第15図(a)におけるA点とB点では相対渦度の大きさ 2ω は異なっているはずである。一方、流体粒子の進行方向には力が全く働かないから(地衡風平衡にあるので) v は変化しない。そこで、円運動の曲率半径 r_c が変化することになる。A点では h が小さいので、 ω が正の場合、 2ω が小さくなり、従って r_c は大きくなる。B点では逆に r_c は小さくなる。この時、流体粒子はもはや閉じた円を描くことはできなくなり、第15図(b)のように西の方向に移動



第15図 (a) 深さ一定の流体層に生じる渦。(b) 深さが北に行く程浅くなる流体層に生じる渦。渦の向きが反時計方向の場合。(c) (b)と同様であるが渦の向きが時計方向の場合。

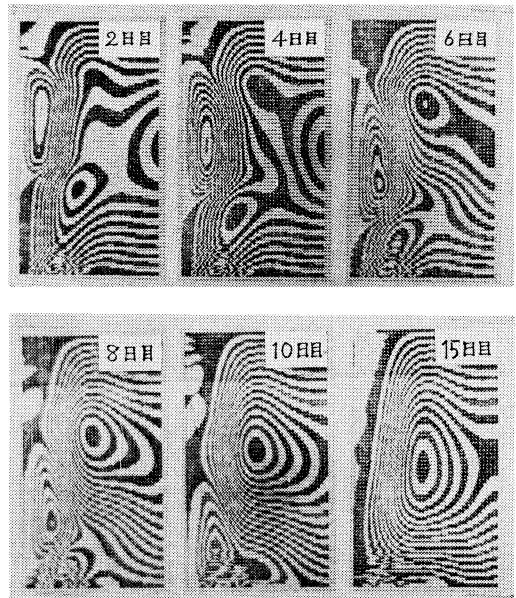
ところが、もしも底の一部に山があると事情は異ってくる(第14図)。この山の上のぼりあげた渦の柱は h が小さくなるので、(8.4)式を満足させるように渦度が増減する。従って山の上では渦が生じて、山を下りれば消えてしまうわけである。テラー=プラウドマンの定理により、現象は高さによって変化しないから、あたかも山の上に柱が立ったような具合になる。これを Taylor column という注)。

このような現象は、最初 Proudman (1916) によって予言され、Taylor (1923) によって検証された。その後多くの研究があるが、成層流体における問題を扱った Davies (1972) の実験をあげるにとどめる。

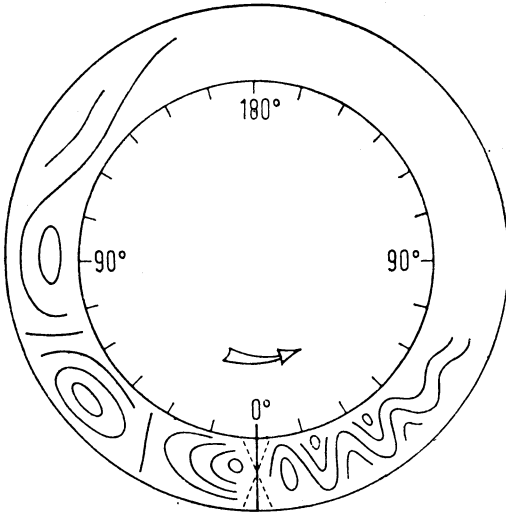
b) Rossby 波と大陸棚波

再び剛体回転をしている渦を回転系からながめよう。半径 r における流体粒子の周速度を $v(=\omega r)$ とすると、

注) 十分発達した Taylor column では、山の上に乗上げる流体はほんのわずかで、柱の内部では、ほとんどよどんだ状態になる。



第16図 数値実験で示された大陸棚波。長方形は南北(縦方向)3500 km, 東西(横方向)400 km のスケールで、右辺を除く辺を海岸線とする海洋(の西岸付近)を表す。右辺下半分からの水の流入、右辺上半分からの水の流出によって流れ(流線で表現)が生じている。西海岸(右辺)付近の水深は東に行く程深くなっている。斜面上にある渦が大陸棚波で、時間と共に南の方向に移動してゆく様子が示されている (Endoh, 1973)。



第17図 室内実験によって得られた Rossby 波のパターンのスケッチ。経度 0° の地点で、円型水路の中に、半径方向に板をさし入れて振動させると、板の西側には波長の長い渦が、東側には波長の短い渦が生じる。どちらの渦も位相速度は西向きである。Platzman (1968) より。

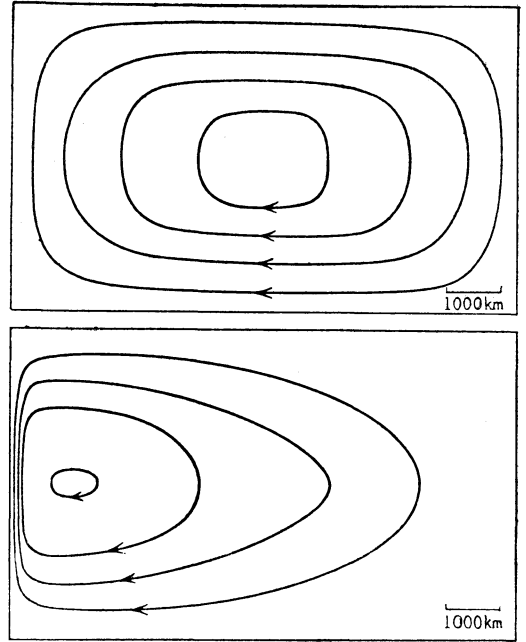
してゆくであろう。渦の向きが逆の場合 ($\omega < 0$) でも、同様に考えて、やはり、粒子は西の方向に移動してゆくことがわかる (第15図 (c))注。

このようにして渦が回転系に対して移動してゆく現象は、大気でも海洋でも観察される。

海洋の場合、大陸棚の斜面の上に生じた渦は、まさに上に述べた状況にあって、渦は岸を右手に見て進行する。このような現象を《大陸棚波》と呼ぶ。第16図に数値実験によって得られた大陸棚波の一例を示す。

大気の場合、 h の変化の代わりに Ω が南北方向に変化する (というのは非常に特殊な事情であるが、その理由に立入ると話が複雑になるので、ここでは $2\Omega - \omega = 2\Omega_0 \sin \varphi$ (Ω_0 : 自転速度, φ : 緯度) の対応で考えられたい) ために、同様の効果が生じる。 Ω が北向きに大きくなると、渦は西に進行する。このような現象を《(非発散) Rossby 波》と呼ぶ。Rossby 波に関しては

注) このような説明は適当でないかも知れない。この説明では、流体粒子自身が西に移動して行くのであって、渦の位相が西に移動して行くことの説明にはならないからである。この点は、筆者自身がまだ十分に理解していないので、問題点を指摘するにとどめる。



第18図 海洋の西岸強化現象を示す理論結果。東西方向に細長い長方形の海を考え、時計方向に働く風のトルクによって水平循環を引き起こす。(a) f が緯度によって変化しない場合の流線。(b) f が北に行く程大きくなる場合の流線で、(a) と同じトルクを与えても流れの様子が異なることがわかる (Stommel, 1948)。

Platzman (1968) のレビューがある。第17図に実験によって得られた Rossby 波のスケッチを示す。

c) 海流の西岸強化現象

太平洋でも、大西洋でも、海洋の西岸 (大陸から見れば東岸) に強い海流が生じることは良く知られている。黒潮とメキシコ湾流は特に有名である。Stommel (1948) は、このような現象が絶対渦度保存則によって説明できることを、はじめて示した。この場合の渦は風のストレスによって引き起こされる。風のストレスは特に西岸近くが強い、ということはないのであるが、b) と同じ理由で渦は西に進もうとする。ところが岸があるので、西岸付近の流れが特に強くなるのである。第18図に Stommel によって得られた線型理論の結果を示す。

あとがき

大気や海洋の流れには2つの性格がある。1つは、力学の法則 (古典力学) に従って流れることが、流れの特徴として現れている面と、もう1つは、地球上の大気や

海洋という特殊な条件の下にあることが、流れの特徴として現れている面である。後者は、流れの駆動力を生み出す熱力学的な問題に関連して、力学の法則に現れるパラメーターの値を規定する作用をなす。

力学の法則は、非常に広い適用範囲を持つから、たとえば、大気や海洋が相当複雑なシステムであろうとも、単純な問題から複雑な問題へと段階的に進むことによって、理解を深めることができる(物理学の教育はまさにその様に進められている)。しかし、後者の面は、段階的に理解する、というわけにはゆかない。不幸にも、大気や海洋は複雑な条件の下にあるので、条件を単純化してしまつたら、もはや興味の対象ではなくなるからである。

気象学や海洋学(の教育)は、この2つの面を混然一体として扱っているために、理解するのがはなはだ困難になっているように思われる。

この解説で述べたかったことは、2つの性格を切り離して、特に前者の面のみを段階的に理解しようとする事であった。まだ、出発点をほんの少し過ぎただけであるから、とても現実の大気や海洋と結びつかないが、この先、粘性や密度成層の効果を加えることによって、少しずつ、理解を深めてゆくことができるのではないかと期待している。

謝 辞

回転流体のメカニズムに対する筆者の理解は、研究室で行っている輪講と、地球流体力学研究会における討論によって得られたものであり、この2つのセミナーのメンバーの方々に負う所大である。特に、遠藤昌宏君と山形俊男君の2人の後輩からはセミナー以外でも、いろいろ教えられる所があったので深く感謝します。この文章の下書きは、東大海洋研究所の浅井富雄教授と東大気象研究室の松野太郎助教授に読んでいただき、有益なコメントをいただきましたので感謝します。清書は吉田佳代子さんの手を煩わせました事を感謝をこめて付記します。

文 献

1) Blackadar, A.K., 1957: Boundary layer wind

maxima and their significance for the growth of nocturnal inversions. *Bull. Amer. meteor. Soc.*, **38**, 283-290.

2) Coles, D., 1965: Transition in circular Couette flow. *J. Fluid Mech.*, 385-425.

3) Davies, P.A., 1972: Experiments on Taylor columns in rotating stratified fluids. *J. Fluid Mech.*, **54**, 691-717.

4) Endoh, M., 1973: A numerical experiment on the variations of western boundary currents part II. Response to a moving typhoon. *J. Oceanog. Soc. Japan*, **29**, 28-43.

5) Greenspan, H.P., 1968: The theory of rotating fluids. Cambridge University Press. 185-191.

6) Lin, C.C., 1966: The theory of hydrodynamic stability. Cambridge University Press. 106-110.

7) Newton, C.W., 1959: Axial velocity streaks in the jet stream: ageostrophic "inertial" oscillations. *J. Meteor.*, **16**, 638-645.

8) 小倉義光, 1966: 最近の気象力学. 気象研究ノート, **17**, 1-61.

9) Platzman, C.W., 1968: The Rossby waves. *Quart. J.R. Met. Soc.*, **66**, 225-248.

10) Proudman, J., 1916: On the motion of solids in liquids possessing vorticity. *Proc. Roy. Soc. A* **92**, 408-424.

11) Rayleigh, Lord, 1917: On the dynamics of revolving fluids. *Proc. Roy. Soc. A* **93**, 148-154.

12) Stommel, H.M., 1948: The westward intensification of wind-driven ocean currents. *Trans. Amer. Geophys. Union*. **29**, 202-206.

13) Sverdrup, H.U. et al., 1942: The oceans. New York: Prentice-Hall. 438.

14) 高橋正吾, 1968: コリオリの力の初心者向き解説に当たっての問題点. *天気*. **15**, 2-4.

15) Taylor, G.I., 1923 a: Experiments on the motion of solid bodies in rotating fluids. *Proc. Roy. Soc. A* **104**, 213-218.

16) Taylor, G.L., 1923 b: Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Phil. Trans. Roy. Soc A* **223**, 289-343.