551. 55

傾度風の計算についてのノート*

阿　部　克　也**

要　旨

傾度風をコンピューターを用いて計算するとき，等圧線が高気圧の側に曲っているか，低気圧の側に曲っているかを判定しなければならない．ここではその判定法を提案する．またこの方法をモデル・パターンと実際の気圧場に適用してみる．

1. はじめに

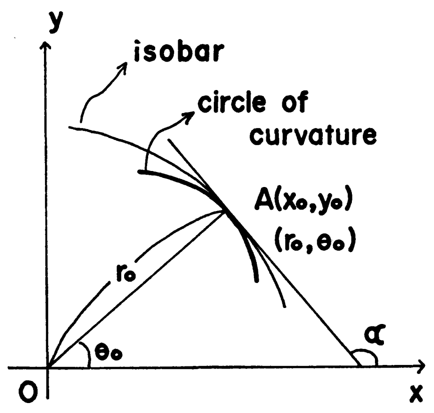
傾度風速について，v, Pr ($\equiv\partial P/\partial r$) に符号をもたせて，次式が成り立つ．

$$fv+\frac{v^2}{r_0}=\frac{1}{\rho}P_r \tag{1}$$

ここで f はコリオリ係数，r_0 は曲率半径，ρ は空気の密度，P は気圧，P_r は曲率中心Oから接触点Aに向かう気圧傾度，v は傾度風の値を表す（第1図を参照）．これを解いて

$$v=\frac{fr_0}{2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{4P_r}{\rho f^2 r_0}}\right) \tag{2}$$

を得る，ここで P_r の符号を決定しなければならないが，この小論はこれについての理論的考察である．グラフィックな計算においては自明であるが，計算機により，広範囲にわたる傾度風の分布を計算するときは，何らかの方法で P_r の符号を求めなければならない．



第1図　等圧線と曲率円との関係

2. 一つの方法

曲線 $y=f(x)$ の曲率 K は

$$K=\frac{d^2y/dx^2}{\{\sqrt{1+(dy/dx)^2}\}^3} \tag{3}$$

で与えられるが，気圧分布 $P=p(x, y)$ における一つの等圧線 $p(x, y)=P_0=\text{const.}$ については（添字は微分を表す）

$$K=\frac{2P_{xy}P_x/P_y^2-P_{xx}/P_y-P_{yy}P_x^2/P_y^3}{\{1+(P_x/P_y)^2\}^{3/2}}$$

$$=(\text{sign }P_y)\frac{2P_{xy}P_xP_y-P_{xx}P_y^2-P_{yy}P_x^2}{\{P_x^2+P_y^2\}^{3/2}} \tag{4}$$

となる．(4) を極座標形になおすと

$$K=(\text{sign }P_y)(-P_r^2P_{\theta\theta}/r^2-P_r^3/r+2P_rP_\theta P_{r\theta}/r^2-2P_rP_\theta^2/r^3-P_\theta^2P_{rr}/r^2)/(P_r^2+P_\theta^2/r^2)^{3/2} \tag{5}$$

を得る．ここに sign P_y は P_y の符号を表し，$P_y>0$ なら1，$P_y<0$ なら -1，$P_y=0$ なら0とする．$p(x, y)=P_0$ なる曲線が極座標系で $P=q(r,\theta)=P_0$ になるとし，後者を r について解いて $r=f(\theta)$ を得たとすると，

$$\frac{dr}{d\theta}P_r+P_\theta=0$$

より（右肩の「′」は常微分を表す）

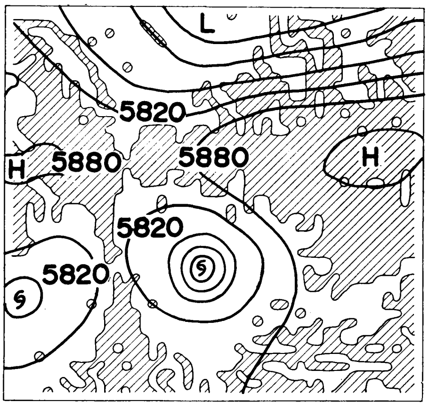
$$P_\theta=-P_r\frac{dr}{d\theta}=-P_rf'(\theta), \tag{6}$$

$$P_{\theta\theta}=-\{P_rf''(\theta)+P_{rr}f'(\theta)^2+P_{r\theta}f'(\theta)\} \tag{7}$$

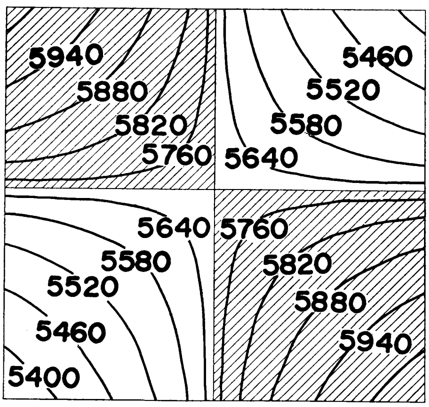
* A Note on the Gradient Wind Calculation.

** K. Abe 気象研究所

——1975年3月3日受理——



第2図　1968年7月26日21時の Z_{500}. 斜線部で sign $Pr \leqq 0$.



第3図　$Z=5700-1.5\times10^{-4}$ sign$(xy)\sqrt{|xy|}$. 斜線部で sign $P_r \leqq 0$.

となる．ところで

$$P_\theta(\mathrm{A})=P_{\theta\theta}(\mathrm{A})=0 \qquad (8)$$

が示される（付録参照）．(8)を(5)に代入すると，

$$(K)_A=\{\mathrm{sign}(P_y)_A\}\frac{-(P_r)^3{}_A}{r_0\{(P_r)^2{}_A\}^{3/2}}$$

$$=\frac{-1}{r_0}\{\mathrm{sign}(P_y)_A\}\{\mathrm{sign}(P_r)_A\}$$

すなわち

$$\mathrm{sign}(P_r)_A=-r_0(K)_A\{\mathrm{sign}(P_y)_A\}$$
$$=-\{\mathrm{sign}(K)_A\}\{\mathrm{sign}(P_y)_A\} \qquad (9)$$

が得られる．(4)を(9)に代入すると，

$$\mathrm{sign}(P_r)_A=\mathrm{sign}(-2P_{xy}P_xP_y+P_{xx}P_y^2+P_{yy}P_x^2)_A \qquad (10)$$

を得る．

$P_y=0$ のとき，前節の議論が進まないが，このときは x と y をとりかえて考えればよい．そうしても結果は同じである．$P_x=P_y=0$ のときは $P_r=0$ である．(21)式は P_r の符号が（$-2P_{xy}P_xP_y+P_{xx}P_y^2+P_{yy}P_x^2$）の符号と一致することを示している．

例として，1968年7月26日21時の 500 mb 高度（T6804を含む）と1つのモデル・パターン（$Z=5700-1.5\times10^{-4}$ sign$(xy)\sqrt{|xy|}$）について P_r の符号を計算した結果を示す（第2・3図）．格子間隔は 100 km，格子点の数は49（東西）×46（南北）で中央差分を用いた．モデル・パターンでは理論値と計算値が完全に一致している．実際例では多少合わない所があるが，これは（読みとり値をスムーズしたとはいえ）読みとりの誤差によるものだろう．

3. おわりに

小論では差分のとり方や，それによる精度の問題には言及しないが，目的が P_r の符号の決定にあるからである．

バランス風を一般化された傾度風とみなすならば，バランス方程式を解けば傾度風に近い風が求まるが，ここでは傾度風そのものを計算することを考えている．

最後にこの小論を書くにあたって親切な助言をいただいた竹内衛夫，丸山健人，斎藤直輔，荒井康の各氏に厚く感謝の意を表する．

文　献

入江盛一，1968：微分学，培風館，P．99-103．
正野重方，1960：気象力学，岩波書店，P.148-151
数学辞典：岩波書店，P．445．

〔付録〕（8）式の証明

点Aについて曲線 $p(x,y)=P_0$ に接する円は無数にあるが，曲率円はその中で2位の接触をするもの，即ち，その1階と2階の微係数が $p(x,y)=P_0$ のそれらと等しいものである．直角座標系におけるこの関係が極座標系にも持ち込まれるという訳である．数学としては当然のことであるが，ここでは曲率の定義から出発してこれを証明する．

さて，第1図に従うと曲率円の方程式は

$$x^2+y^2=r_0{}^2 \qquad (\mathrm{A.1})$$

であるが，これを x で微分して

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=-\frac{x}{y}\\ \frac{d^2y}{dx^2}&=-\frac{1+(dy/dx)^2}{y}\end{aligned}\right\}\qquad (\mathrm{A.2})$$

を得る．$P(x,y)=P_0$ を y について解いて $y=g(x)$ を得たとする．第1図のように，A点が第1象限にくるようにx軸，y軸をとると

$$\left.\begin{aligned}&x_0=r_0\cos\theta_0=r_0\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=r_0\sin\alpha\\ &y_0=r_0\sin\theta_0=r_0\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-r_0\cos\alpha\\ &\tan\alpha=g'(x)\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{A.3})$$

によって（A.2）から

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_A=-\frac{x_0}{y_0}=\tan\alpha=g'(x_0)\qquad (\mathrm{A.4})$$

を得る．また（A.3）から

$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{sign}\,(\cos\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{-1}{\sqrt{1+g'(x_0)^2}}\qquad (\mathrm{A.5})$$

（A.3），（A.4），（A.5）を（A.2）に代入すると，（3）を用いて

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_A=-\frac{\{1+g'(x_0)^2\}^{3/2}}{r_0}=-|K|\{1+g'(x_0)^2\}^{3/2}=-|g''(x_0)|$$

を得るが，図から明らかなように $g''(x_0)<0$ だから

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_A=g''(x_0)\qquad (\mathrm{A.6})$$

となる．（A.4），（A.6）の左辺は曲率円に関する微系数であり，右辺は等圧線自体に関する微系数である．（A.4），（A.6）の関係を極座標になおすと，極座標と直角座標の間の一般的な関係

$$g'(x)=\frac{r+f'(\theta)\tan\theta}{f'(\theta)-r\tan\theta}\qquad (\mathrm{A.7})$$

$$g''(x)=\frac{r^2+2f'(\theta)^2-rf''(\theta)}{\{f'(\theta)\cos\theta-r\sin\theta\}^3}\qquad (\mathrm{A.8})$$

によって，（曲率円の方程式は $r=r_0$ なので）

$$\frac{r_0+0\cdot\tan\theta_0}{0-r_0\tan\theta_0}=\frac{r_0+f'(\theta_0)\tan\theta_0}{f'(\theta_0)-r_0\tan\theta_0}\qquad (\mathrm{A.9})$$

$$\frac{r_0{}^2+2\cdot0^2-r_0\cdot0}{\{0\cdot\cos\theta_0-r_0\sin\theta_0\}^3}=\frac{r_0{}^2+2f'(\theta_0)^2-r_0f''(\theta_0)}{\{f'(\theta_0)\cos\theta_0-r_0\sin\theta_0\}^3}\qquad (\mathrm{A.10})$$

となる．（A.9），（A.10）から

$$f'(\theta_0)=f''(\theta_0)=0\qquad (\mathrm{A.11})$$

を得る．（6），（7）へ（A.11）を代入して

$$P_\theta(\mathrm{A})=P_{\theta\theta}(\mathrm{A})=0$$

を得る．

小野秋水著

自然と生活

あさを社，1974，292頁，1,300円

人間は長い間自然の生みだす豊かなる恩恵を享受しながら，自らの手によって除々にそれを汚し続けてきた．そして今になって失われた自然に愛着をもち，それを取り戻そうと努力している．

かって中央気象台予報部に席をおき，天文や気象学に該薄な知識をもっているばかりでなく，俳句作家としても年度賞受賞など，抜群の才能をもっている著者が，人間と自然とのつながりを，科学者の眼と俳人の心から眺めた名著である．

本書の内容は3部に分れているが，第1部は四季から始まり，雨・風・台風・天文など，人間をめぐる自然現象について，味わい深い科学的な文章と俳句を取り入れての解説は，初心者向けの気象学の入門書としても理解しやすく，俳句の季語としての解説は，俳句に興味のない人も，その優雅さに強く魅せられる．

第2部の暦は生活に関連のある歳時記を兼ねもたのであるが，従来のものと異り，個々の事項の説明にとどまらず，日常生活に必要な知識と教養の解説書でもある．また俳句に興味のない人は，俳句の部分だけ飛ばして読んでも，一般の読物として十分理解でき，我々の心を強くひきつける．

第3部は生活に密接な関係のある衣服，食物，住居，お祭りなどについて，全国的な視野から人間のかかわりを詳細にときあかしてくれる．

最後に環境の変化の項で「森や林に鳥が飛び交い，透きとおった川や海にも魚が群れ……人類の良識と公徳心のよみがえる日を首を長くして待とう」と結んでいる．

（丸山栄三）