

分散性波動の性質について*

木 村 竜 治**

1. 前がき

大気や海洋などの地球流体は、復元力を持った力学系である。すなわち、力がつりあった基本状態というものがある。基本状態にある流体の一部を強制的につりあいの状態からずらしてやると、ずらされた流体に力が働いて、元のつりあいの状態に帰ろうとする性質がある。このような性質のある流体の中で物体を振動させると、波動がひき起こされる。また、物体が運動しただけでも波動がひき起こされる。船が進むとまわりに波が生じるのはこの一例である。同じことであるが、復元力のある流体の流れ中に物体がおかれると、やはり波動がひき起こされる。山の後にできる山岳波 (lee wave) はその一例である。気象学や海洋学において、波動に関する議論がいろいろ行われるのは、大気や海洋が復元力のある流体系であるからに他ならない。

特に重要な復元力は①重力、②コリオリの力、③ベーター効果の3種類で、それぞれ、重力波、慣性波、プラネタリー (ロスビー) 波を生む。この3種類の波動は、地球流体における基本的な波動であるが、自然界では、上記の3種類の復元力が組み合わされるので、実にさまざまな波動が存在する。そして、その多くは、波の位相速度が波長によって異なる、いわゆる分散性波動である。

分散性波動の個性は、分散関係で特徴づけられる。分散関係とは、波動の周波数と波数の関係であるが、これは、波動を表現する力学の方程式——一般に線型の偏微分方程式から導かれる。一方、分散関係は、波数空間内に特定の曲面を与えるので、波動の性質と、分散関係が与える曲面の幾何学的な性質との間には、密接な関係があることが予想される。波数空間は、一見、抽象的な概

念のように思われるが、波数空間内で定義される方向が実空間で定義される方向と一致する、という性質を利用して、波数空間の幾何学を実空間に存在する波動の性質に翻訳することができるのである。

次節では、地球流体における基本的な波動について、力学方程式から分散関係を導くことにしよう。3節では、波数空間の幾何学を利用して、移動する励起源によってひき起こされる波動の性質を求める、ライトヒル (Light-hill) の方法を紹介しよう。

2. 線型偏微分方程式と分散関係

流体の粘性は波動現象に対して本質的でないので、非粘性の流体システムを考えよう。また、波動が線型の力学系で記述できるような、微小振幅の波動のみを考えよう。この時、波動の特徴は、周期 T と、 x, y, z 方向の波長 $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ で表現されるのであるが、周期の代りに $\frac{2\pi}{T} = \omega$ で定義される周波数、波長の代りに $\frac{2\pi}{\lambda_x} = k_x$, $\frac{2\pi}{\lambda_y} = k_y$, $\frac{2\pi}{\lambda_z} = k_z$ で定義される x, y, z 方向の波数を用いて表現した方が便利である。

一般に、波動を特徴づける物理量 ξ が、線型偏微分方程式

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial t}, -i\frac{\partial}{\partial x}, -i\frac{\partial}{\partial y}, -i\frac{\partial}{\partial z}\right)\xi=0 \quad (2.1)$$

を満足する時、この波動の分散関係は、

$$P(\omega, k_x, k_y, k_z)=0 \quad (2.2)$$

で与えられる。以下、基本的な波動に対する分散関係を求めよう。鉛直方向を z 方向として、特にことわらない限り記号は慣習に従う。

例1: 深水波

深水波とは、波長に比べて、水深が十分深い水面に生じる外部重力波である。海面や湖面に立つ風波に当てはまるであろう。基本場は静止した水面 ($z=0$ とする)

* On basic properties of dispersive waves.

** R. Kimura, 東大海洋研究所

で、渦無しであるから、渦度保存則から、波が生じても渦無しである。そこで、速度ポテンシャルが定義でき、基本方程式は以下のように書ける。

$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{連続の式})$$

$$\textcircled{2} \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (\text{速度ポテンシャルの定義})$$

基準面からの水位変化量を η とすれば、 $z = \eta$ で、

$$\textcircled{3} \quad w = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (w \text{ の定義})$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -g \quad (\text{運動方程式})$$

①~④から、 ϕ に対して、

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial t^4} + g^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.3)$$

を得る。書きなおして、

$$\left[\left(i \frac{\partial}{\partial t} \right)^4 - g^2 \left\{ \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(-i \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right\} \right] \phi = 0 \quad (2.4)$$

従って、

$$P = \omega^4 - g^2 (k_x^2 + k_y^2) = 0$$

が分散関係である。

例2：内部重力波

安定な密度成層を持つ流体層の内部には内部重力波が生じる。成層の強さは、

$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho}{dz}} \quad (2.6)$$

で表現するのが普通である。 N を浮力振動数と呼ぶ。ここで、 ρ_0 は流体の平均密度、 $\frac{d\rho}{dz}$ が基本場の密度傾度である。この時、 $\mathbf{q} = (u, v, w)$ 、とおけば、基本方程式は、

$$\textcircled{1} \quad \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (\text{連続の式})$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - N^2 \eta \hat{\mathbf{k}}_z \quad (\text{運動方程式})$$

$$\textcircled{3} \quad w = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (w \text{ の定義})$$

(η は基本場からの鉛直方向の変位、 $\hat{\mathbf{k}}_z$ は z 方向の単位ベクトル)と書ける。 w についてまとめると、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 + N^2 \nabla_{k_z}^2 \right) w = 0 \quad (2.7)$$

を得る。ここで、 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 、 $\nabla_{k_z}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ である。例1と同様の変形から、分散関係として、

$$P = \omega^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) - N^2 (k_x^2 + k_y^2) = 0 \quad (2.8)$$

を得る。

例3：慣性波

密度一様の回転流体の内部には、コリオリ力を復元力とする慣性波が生じる。コリオリパラメーターを f_0 (定数)、流体の密度を ρ_0 (定数)とすれば、基本方程式は、

$$\textcircled{1} \quad \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (\text{連続の式})$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + f_0 \hat{\mathbf{k}}_z \times \mathbf{q} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p \quad (\text{運動方程式})$$

と書ける。についてまとめると、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 + f_0^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) p = 0 \quad (2.9)$$

を得る。従って、分散関係は、

$$P = \omega^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) - f_0^2 k_z^2 = 0 \quad (2.10)$$

となる。この式で、 $f_0 \rightarrow N$ 、 $k_z^2 \rightarrow k_x^2 + k_y^2$ 、 $k_x^2 + k_y^2 \rightarrow k_z^2$ と置きかえると、内部重力波の分散関係と等しくなるのに注意されたい。

例4：2次元非発散ロスビー波

いわゆるベーター面近似を用いて、 $f = f_0 + \beta y$ と置く。2次元の場合は、流線関数が定義できるので、基本方程式は次のようになる。

$$\textcircled{1} \quad \mathbf{u} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{流線関数の定義})$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{k^2} \psi = -\beta v \quad (\text{渦度方程式})$$

この式は、流体粒子が y 方向に進むと、相対渦度(= $\nabla^2 \psi$)が小さくなることを表現している。②は

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial x} \right\} \psi = 0 \quad (2.11)$$

と書けるので、分散関係は、

$$P = \omega (k_x^2 + k_y^2) + \beta k_x = 0 \quad (2.12)$$

となる。

3. 分散関係の幾何学

上述したごとく、分散関係は波数空間内の曲面を与える。 ω は、この曲面のパラメーターと見なすことができる。ここで、波数空間とは、 k_x 、 k_y 、 k_z を直交する3つの軸とする空間で、 k_x 軸は実空間の x 軸に、 k_y 軸は y 軸に、 k_z 軸は z 軸に、それぞれ平行であると考え、波数の次元は「長さ」ではないので、波数空間と実空間を比較して考えるのは妙であるが、波数をあたかも「長さ」のように見なして「空間」のイメージを思い浮かべていただきたい。

波数空間の原点から分散関係を与える曲面上の一点を結ぶ矢印を波数ベクトルと呼び、 $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ で

表す。この時、波数が (k_x, k_y, k_z) で与えられる波の位相はこの矢印の方向に向う。位相速度は

$$\mathbf{c} = \frac{\omega}{k} \hat{\mathbf{k}} \quad (3.1)$$

と書ける。但し、 $k = |\mathbf{k}|$, $\hat{\mathbf{k}}$ は \mathbf{k} 方向の単位ベクトルである。群速度は、 $\nabla_{\mathbf{k}} = \left(\frac{\partial}{\partial k_x}, \frac{\partial}{\partial k_y}, \frac{\partial}{\partial k_z} \right)$ を用いて、

$$\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \omega = -\nabla_{\mathbf{k}} P / \frac{\partial P}{\partial \omega} \quad (3.2)$$

と表わされるから、分散関係の曲面に直交していることがわかる。 \mathbf{v}_g の進行方向は、 ω を増加させたときに、曲面が変化する方向に等しい。以上の性質から直ちに次の事がわかる。

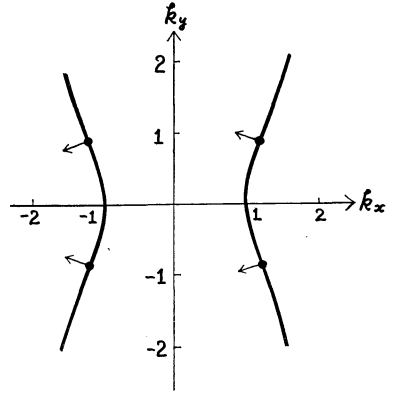
ω が波数の大きさ $(k = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2})$ のみによる波動（これを、等方性波動と呼ぶ）では、位相速度と群速度の方向は等しい（逆方向に進むことはあり得るが）。なぜなら、等方性波動の分散関係を与える曲面は、すべて球であって、原点と球の表面の一点を結ぶ直線は、その点における球面の法線と等しいからである。逆に、等方性でない波動は、一般に、位相の進む方向と群速度の方向がある角度をなすことも予想がつく。

さて、Lighthill (1967) は、流れのない流体中に、 ω_0 で振動しながら、一様な速度 \mathbf{U} で進む物体が、流体の中に引き起す波動は、この曲面を用いて、簡単に求められるのを見出した。その方法は次の通りである。

① $P(\omega_0 + \mathbf{U} \cdot \mathbf{k}, k_x, k_y, k_z) = 0$ なる曲面を描け。すなわち、分散関係の ω の代りに $\omega_0 + \mathbf{U} \cdot \mathbf{k}$ (ドップラーシフトした周波数) を代入して、曲面を描きなおす。

② この時、物体から見て、 \mathbf{r} の方向に現れる波動の波数は、この曲面の法線が \mathbf{r} と平行である点の波数のうち、法線の向き（とは、 ω を増加させた時に、曲面が向う方向と定義するのであるが）が \mathbf{r} の向きに一致する波数のみが現れる。実は、この曲面の法線は、 $\mathbf{v}_g - \mathbf{U}$ ($-\mathbf{U}$ の流れに乗った群速度) の方向に等しく、法線の向きが \mathbf{r} の向きに一致するとは、波動のエネルギーが物体から遠ざかる方向に向う波動のみが現れる、という事なのである。

③ 物体から見て、 \mathbf{r} の位置における変位の大きさは、 $\exp \{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)\}$ に比例する。但し、 \mathbf{k} は、②で定まる波数である。物体が振動しないで、移動するときは、 $\omega_0 = 0$ であるから、波動の変位の分布は、物体に乗って見ると時間的に変化しない。船のたてる波を船に乗ってながめると、水面の凸凹の形は船に固定しているのである。山岳波によって生じる雲（たとえばレンズ



第1図 x 方向 (k_x 方向に等しい) に速度 U で進む船が励起する深水波を求めるための波数空間内の曲線。波数は g/U^2 で規格化してある。変曲点における法線ベクトルのみ示した。

雲) が移動しないのも、この性質の表れである。

但し、以上の性質は、物体のすぐ近くではなりたたない。そこでは、波動の振幅が有限であるから、線型的な議論ができないためである。しかし、たとえ、物体の近くでいかに複雑な現象になっていようと、物体から遠ざかるにつれて、①~③の性質が次第に成り立って来るのが興味深い。なぜこうなるのか、ということは、原論文を参照していただくことにして、ここでは、実例を述べるにとどめる。

例1：深水波

船が起こす波を考える。従って、 $\omega_0 = 0$ である。船が x 軸に U の速度で進むと考えると、 $\omega = Uk_x$ を分散関係 (2.5) に代入すると、

$$k_x^4 - \frac{g^2}{U^4} (k_x^2 + k_y^2) = 0 \quad (3.3)$$

または、

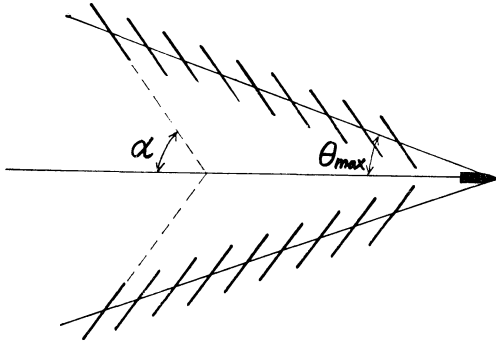
$$k_x^2 - \frac{g}{u^2} \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = 0 \quad (3.4)$$

を得る。波数を $\frac{g}{u^2}$ で無次元化して、書きなおすと、

$$k_x^2 - \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = 0 \quad (3.5)$$

この式が表わす曲線 (2次元であるので、曲面は曲線に縮退している) を第1図に示す。法線の向きを調べるために $\omega = \Delta\omega + Uk_x$ を分散関係に代入して、(次元のある量で)

$$(\Delta\omega + Uk_x)^2 - g^2 \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = 0 \quad (3.6)$$



第2図 進行する船が励起する深水波の広がりと端に現れる波の波面の方向. $\sin \theta_{max} = \frac{1}{3}$, $\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ で与えられる.

を得るが, k_x を固定して, $\Delta\omega$ を少し増加させると, $k_x > 0$ ならば k_y^2 は増加し, $k_x < 0$ ならば k_y^2 は減少することから, 法線の向きが, 常に左向きであることがわかる. すなわち, 船の前方に波は発生しない. さて, 第1図に示した曲線は変曲点を持つのであるが, 法線の向きが, x 軸となす角度は変曲点で最大となる. (3.5) 式に対する簡単な代数計算から, 変曲点における法線が軸となす角度を θ_{max} とすれば,

$$\sin \theta_{max} = \frac{1}{3} \therefore \theta_{max} = 19^\circ 28' \quad (3.7)$$

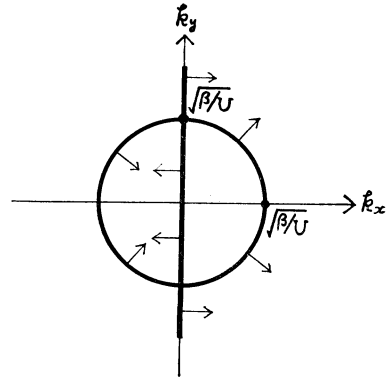
であることがわかる. 船のたてる波は, 船の船先を頂点として, $2\theta_{max}$ の角度で船の後に開くくさびの内部に存在することはよく知られた事実である. このくさびに沿った波面の分布は, 波数ベクトルと直交するので, 第1図から簡単に計算できる. 結果を第2図に示す.

ついでながら, 第1図において, 同じ法線の向きを持つ波数ベクトルが対になって存在している点に注目したい. 対になった波数ベクトルは進行方向が逆であるために, 重なると定在波となる. この性質と, 波の位相が物体に固定される事が, まさに対応しているのである. 従って, $\omega_0 \neq 0$ の場合に, 分散関係の曲面の対称性がくずれることは容易に想像される.

例2: 2次元非発散ロスビー波

船は西に進んでも東に進んでも同じ形の深水波を励起するが, ロスビー波は物体が動く方向, またはもっと実際的に, 山岳にぶつかる風の方向によって, 励起される波動の形が非常に異なる. ここでは, 西風と東風の場合を比較してみよう. 物体として山岳を考慮するので, $\omega_0 = 0$ である.

A) 西風の場合



第3図 西風が山岳に当って励起するロスビー波を求めるための波数空間内の曲線.

$\omega = -Uk_x$ を分散関係 (2.12) に代入して,

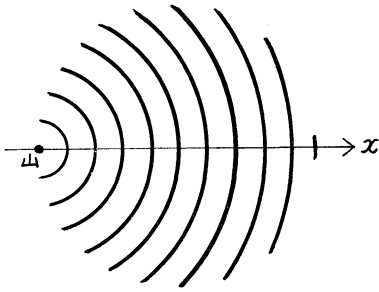
$$-Uk_x(k_x^2 + k_y^2 - \frac{\beta}{U}) = 0 \quad (3.8)$$

を得る. (3.8) 式が示す曲線と法線を第3図に示す. 円の部分は, 山岳の下流側に波数 $\sqrt{\frac{\beta}{U}}$ の波動が生じることを示している. 波面の形は,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \sqrt{\frac{\beta}{U}} \quad r = \text{一定} \quad (3.9)$$

で与えられるから, 山岳を中心とする円であり, 等位相線の間隔は $2\pi\sqrt{U/\beta}$ となることがわかる. いいかえれば, 西風を作るロスビー波は, あたかも水面に落ちた石が作る波紋のように, 等方的にふるまうのである (もちろん, 等位相線は山岳に固定しているのであるが). それでは, $t=0$ に西風が吹き始めたとして, 時刻 t までに, 波面はどこまで広がるのであろうか. 我々は, 時刻 t において, 物体から \mathbf{r} 方向に現れる波の波数を (第3図を見て) 知っている. \mathbf{r} 方向でもっとも遠くまで広がっている波動は, $t=0$ に励起された波数 \mathbf{k}_0 の波動であろう. この波動は群速度 (\mathbf{k}_0 に対する群速度は分散関係から計算できる) で進みながら, 同時に \mathbf{U} の流れで流されて, 時刻 t に \mathbf{r} 方向に現れるはずである. そこで, 物体から Ut はなれた位置を中心として, vgt を半径とする円を描き, 物体から \mathbf{r} 方向の直線との交点を求めれば, その点が波動の広がる限界を示すであろう. この手続きは, 一般には, いろいろな方向に対して, それぞれ行う必要があるのだが, ロスビー波の場合は, 事柄は非常に簡単である. というのは, 群速度の大きさは,

$$v_g = \frac{\beta}{k^2} \quad (3.10)$$



第4図 西風が山岳に当たって励起するロスビー波の広がりと波面の分布。

と表わされるのだが、今の場合、方向によらず

$$k = \sqrt{\frac{\beta}{U}} \quad (3.11)$$

であるので、あらゆる方向に対して、 $v_0=U$ となるからである。そこで、物体から東方に Ut はなれた点を中心として半径 Ut の円を描けば、時刻 t における波動は、すべてこの円の内部に存在することがわかる。第4図にその様子を示す。

第3図の直線に対応する波動は、 $k_x=0$ であるから、波面は x 軸に平行になり、しかも x 軸の近くのみに見える。山岳の風上側に現れる点が深水波と異なっている。

B) 東風の場合

$\omega=Uk_x$ を分散関係 (2.12) に代入して、

$$Uk_x (k_x^2 + k_y^2 + \frac{\beta}{U}) = 0 \quad (3.12)$$

を得るが、これに対応する曲線は k_y 軸に一致し、法線の向きは西向きとなる。すなわち、東風が山岳に当たると、風下側に、 x 軸に沿って、波面が x 軸に平行な波動のみが励起されることを示している。

ここでは、西風と東風の場合のみを考察したが、Lighthill (1968) は、任意の方向から風が吹く場合について、山岳のつくる波動を求めている。なお、ライトヒルの方法は、Greenspan (1968) の §4.5 で解説されていることを付記する。

謝辞

ライトヒルの方法を紹介していただいた、ウズホール海洋研究所のP. ラインズ氏に感謝します。この論文の理解には、九大応用力学研究所の山形俊男氏の解説が非常に役に立ちました。また、原稿の清書をお願いした吉田佳代子さんに感謝いたします。

文献

Greenspan, H.P., 1968: The theory of rotating fluids. Cambridge University Press, 204-213.
 Lighthill, M.J.: 1967: On waves generated in dispersive systems by travelling forcing effects, with applications to the dynamics of rotating fluids. J. Fluid Mech, 27, 725-752.

第13回 理工学における同位元素研究発表会について

表記の研究発表会が昭和51年6月29日(火)～7月1日(木)は国立教育会館(東京都千代田区霞が関3-23, 文部省隣り)で開かれます。発表申込は下記の通りです。

記

発表者の資格 発表申込者が所属する主催学協会(の年会(大会)等の規定または慣例に従う。

発表申込み 所定の申込書(1件1通)によりお申込み下さい。所定の申込書は下記にて請求して下さい。

133 東京都文京区本駒込二丁目28番45号

日本アイソトープ協会内

理工学における同位元素研究発表会運営委員会
 電話 東京(03)946-7111(代表)

発表申込締切: 昭和51年2月28日(土) 必着

講演要旨 講演要旨集を発行します。発表申込みがあり次第、所定の原稿用紙(1,400字程度)をお送りします。

講演要旨原稿締切: 昭和51年4月15日(木) 必着

発表時間 1件の発表15分以内の予定

なお詳細は申込先である運営委員会に照会下さい。