551. 511.

波とそのまわりの平均運動*

瓜　生　道　也**

1. はじめに

気流が小さな山々や大山脈を越えたり避けたりするとき，あるいは気流自身のもつ不安定性の結果，大気中には様々なスケールの波がつくられる．それらの波が，大きく2つの種類に分けられ，1つが本質的に重力波の性質をもつもので，他が地衡風運動を特性とするプラネタリー波であることは，よく知られている(*)．このような波は，概して対流圏に源をもっているが，条件さえ整えば励起源からはるかはなれた上層大気へ伝わっていくことができる．その条件というのは，媒質としての大気の特性――「屈折率」――をきめる，流れの配置，温度分布，密度成層の有様などである．

一般に，伝播する波はエネルギーや運動量の輸送を伴っている．これらの量は，波の振幅に関して2次のオーダーであり，一周期（又は一波長）ないし数周期（又は数波長）にわたる平均として定義される．かくて，波は，自分をとりまいて存在するはるかに大きなスケールの場――平均的な流れの場――に何らかの変化（振幅に関して2次のオーダー）をひきおこさずにはいない．その影響は波が有限振幅になれば著しくなるはずである．たとえば，西風の中を上層に伝わるプラネタリー波は次第にそれを弱めていく．この「西風減速」は，大気密度の減少に伴う波の振幅の増大によって，上層ではきわめて顕著になってくる．すでに多くの人の知るところであるが，松野(1971)は上のようなプラネタリー波のはたらきを冬期成層圏における周極渦の崩壊を伴う突然昇温現象のモデルに組みこみ，その現象をまことに鮮かに説明した．また，もう一つのモードに属する内部重力波を例にとれば，それの東向き（西向き）成分は上層に伝わるとき西風（東風）を強めるはたらきがある．Lindzen と Holton (1968, 1972) が，これを赤道成層圏における平均帯状流の準2年振動現象のモデルにとり入れ，主要なからくりを巧みに説明したこともすでによく知られている．

恥をしのんでつけ加えれば，筆者はプラネタリー波と内部重力波のこうしたはたらきを組合わせることによって，太陽表面の赤道加速現象が説明できるのではないかと思いつきを述べたことがある（1974 a）．しかしどうやらこの考え方はうまくなくて，太陽の赤道帯には30日ぐらいの寿命（ゆえに自転を十分感じることができる）の巨大な対流セルがあるらしく（筆者にはなぜそんなものが存在できるのかよくわからない），それの変形に伴う運動量輸送が赤道加速をもたらすと考えられているようである (Gilman, 1972)．

このように，大気の平均的な循環，とりわけ平均帯状流の有様を理解しようとすれば，そこに存在しているプラネタリー波や内部重力波のおよぼす効果を見逃すわけにはいかない．したがって，その効果を何らかの方法で評価・計量することは，流体力学の問題としておもしろいばかりでなく，気象力学にとっても大切な問題であると筆者は考えている．

それでは，どのような考え方に基づけば，波の平均流への影響が計量できるだろうか．内部重力波やプラネタリー波が平均帯状流を強めたり弱めたりするというが，そもそもそれは一体どういうことであろうか．平均帯状流の変化はとりもなおさず帯状平均運動量の変化である．それでは，それらの波はどのようにしてまわりの流体に「力」をおよぼし，それを流すのだろうか．もしほんとうにそれらの波が流体――流体粒子――を動かすならば，その流れの方向に「質量輸送」がおこるはずである．そのことと，ストークス (1848) の昔から海洋学ではよく知られている，水の波（重力波）による「質量輸送」と，概念上どんな関係があるのだろうか．そしてこれらのことは，波に伴うエネルギーや運動量の輸送といわれることとどのように結びついているのだろうか等々

---

* Waves and wave-induced mean motions

** M. Uryu：九州大学・理学部・物理教室

(*) 音波はここでは対象からはずされている．但し第3章以下の議論は容易に音波の場合にも転位させられる．

の疑問が,「波による平均流の加速」効果を評価・計量することをめぐって，むらくものようにわいてくる.

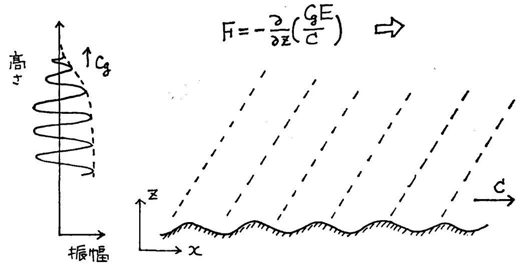
しかし,「波による平均流の加速」は,すでに Lindzen-Holton のモデルや松野のモデルに現象をひきおこす大切な力学過程として組みこまれ，しかも概ね正しい結果を導いているにもかかわらず，なぜいまさら「それは一体どういうことか」などと問うのか——という疑問をもたれるむきもあるかも知れない．それには，筆者がよくわからないからだと答える以外にないが，もっと高踏的な答えをすれば次のようにいえるだろう．一つの概念が，モデルに組みこまれること，ないしは現象説明のために導入されることは，それが原理的に基礎づけられていることを必ずしも意味しない．すでにお気づきの方もあるだろうが，上にかかげたいくつかの疑問は，通常の気象力学的な発想とはかなり色彩を異にしている.「波による平均流の加速」という，どちらかといえば直観的な概念を基礎づけるには，少なくとも上のような問題をきちんとさせていなくてはなるまい．そうすることによって，その概念は現象のしがらみから解き放たれて，普遍性をかちえるはずである．そうした作業のあとで,「準2年振動」や「突然昇温」などの現象をふりかえると，それらが一つの普遍的な概念の実現形態として理解され，認識の視野が広がることになるだろう.

ここでは，Bretherton, Longuet-Higgins, Linzen, Holton, McIntyre, 松野などの先達の仕事を踏えつつ，筆者の最近のいくつかの仕事を要約あるいは加筆してのべ,「波によってつくられる平均運動」について考えていきたい．なお，それらの仕事は，いわば“五目めし”のような形でこの文章の中にとり入れられることになろう．まことに主観的な総合報告である．なお，以下の議論では波の鉛直方向の伝播のみをあつかう．プラネタリー波の場合，緯度方向への伝播も大切な問題であるが，それについては拙著 (Uryu, 1975) をみられたい．鉛直方向の場合と平行な議論が可能である.

2. 造波抵抗 (Wave drag) と平均流加速

「波による平均流の加速」というのは，一般的には，波に伴うエネルギー流束や運動量流束によってひきおこされる平均場の変化の一種であるから，波の振幅に関して2次のオーダーの現象である．したがって，その議論は，2次のオーダーにおいてきちんと成り立つ方程式系に基づいてなされなくてはならない．正確な取り扱いは次章でおこなうことにして，ここではきわめて直観的な議論を試みよう.

次のような状況を考える (図1参照)．正弦型の凹凸



第1図　凹凸のある底板によってつくられた波が上方へ伝わっているところ.

をもち，東西 (x方向) にどこまでものびた底板の上に，粘性のないブーシネスク流体 (非圧縮性成層流体) がのっていて，鉛直上方 (z方向) にどこまでもひろがっている．その底板は波をつくりながら，x軸に沿って C の速さで流体に相対的に動いている．波は十分発達して，波束 (wave packet) として上方に伝播しつつあるとしよう．鉛直群速度を C_g，波に伴うエネルギー密度 (x方向に平均した) をEとする．ここで，波の種類についてはことわっていないが，内部重力波でもプラネタリー波でもよいということである．ただし，後者の場合，底板は西向きに動いていることが必要であり，また，波のエネルギー密度Eには，南北にも (波のひろがりにわたって) 積分したものを用いる．そうすれば事柄を2次元 (x−z 平面内) で考えることができる.

さて，問題はこうである.『上に設定した状態で,平均流 (x方向に平均された流れの場) に変化がおこっているだろうか.』いいかえれば，流体層はもともと静止していたわけだから,『2次のオーダーの平均流がつくられているかどうか』である.

ちょっと考えると,「波のエネルギー」Eは単に群速度 C_g で上方に伝達されていくだけで,「平均流のエネルギー」に転換されず，それゆえ平均流に変化がおこるとは思われない．しかし，この考え方ははじめの部分だけ正しく，後半はまちがいである．この種の考え方——「系のエネルギー」を2つに分けて，それだけをたよりにしながらものごとを考える——の含む問題点については，第4章でくわしくふれることにしよう.

上の考え方のおかしさは，波がつくられる機構に思いをいたせばたちまち明らかとなる．つまり，波をつくりつつ動いている底板は，造波抵抗 (wave drag) を感じているはずであり，逆にそれは流体が底板から力をうけていることを意味しているから，その力に応じた運動量の変化が流体内にあらわれるはずである.

底板の感じる造波抵抗を D としよう．そうすれば，底板から流体に単位時間当り投入されるエネルギーは CD である．このエネルギーによって波がつくられ，上方に伝わりつつあるわけである．それに伴うエネルギー流束（energy flux）は C_gE である．したがって，造波抵抗 D は，

$$D=\frac{C_gE}{C} \qquad (2\text{-}1)$$

で与えられることになる．E と同様，D もまた波の振幅に関して2次のオーダーである．流体が平均的にこれだけの抵抗を示すのだから，逆にいえば流体は底板からこれに相当する平均的な力をうけているわけである．それゆえ，その力に対応して，2次のオーダーの平均運動量の変化があらわれるはずである．

さて，これから先の議論は直観的だから，次章がその正しさを証明する役を荷っているわけだが——底板が波を媒介として流体におよぼす力については，次のように推察できる．造波抵抗 D を与える方程式（2-1）は，いかにも，底板によって加えられた力が，「運動量」E/C として波に伴って上方に伝達されるということを暗示している．すなわち，波の先端部付近（そこでは波の振幅変化が大きい）で，「運動量流束（momentum flux）」C_gE/C の発散による，2次のオーダーの力

$$Q=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{C_gE}{C}\right) \qquad (2\text{-}2)$$

が働いて，流体は底板（つまり波）の進行方向に流されるであろう．そうしてつくられる平均帯状 U は，次のような2次のオーダーの運動方程式に従うと考えられる．

$$\rho_0\frac{\partial U}{\partial t}=Q=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{C_gE}{C}\right) \qquad (2\text{-}3)$$

ここで ρ_0 は体の平均密度である．

次章できちんと示されるように，方程式（2-3）は「波による平均流の加速」の眼目である．この方程式が述べているのは，「平均流 U は，波のエネルギーが平均流のエネルギーに転換される結果生じる」ということではなくて，「系の全運動量が保存する結果，波に伴う過剰な運動量 E/C の分だけ，流体は平均的に流される」ということである．また，方程式（2-3）を導いた議論には，波のエネルギー密度 E や鉛直群速度 C_g や水平位相速度（底板の速さ）C などがあらわれるだけで，波が内部重力波であるかプラネタリー波であるかの区別はみかけ上入りこんでいない．逆にいえば，「波による平均流加速」の力学にとって大切なのは，波が「運動量」E/C（これが正しくそう呼ばれるには，もうちょっと慎重な議論を要する．次章参照）をもっていて，その分だけ波のまわりに平均流があらわれるということである．しかし，上のような状況の下で，底板から流体におよぼされる力を，波はどのような機構を通して自分の中に運動量として保有するか，あるいは「運動量」E/C ないし「運動量流束」C_gE/C が波のどんな性質によってもたらされるか——こうした問題は個々の波に応じて解かなくてはならない．次章では，内部重力波とプラネタリー波の場合を分けて論じるが，いずれの場合にも，方程式（2-3）がえられる．

さて，方程式（2-3）の右辺は，波の振幅が高さと共に変化するときにのみ0ではない．したがって，上に考えたような伝播途中の波（transient wave）の場合には，その先端部付近で振幅が変化するから平均流加速がおこるけれど，波が無限遠にとどいてしまっているときには，（2-3）の右辺は0となる（証明するまでもなく）から，平均流の変化は波の振幅の2次のオーダーまでおこらない．この後者の場合はちょっと奇妙な結論である．なぜなら，波が維持されていて，それに伴ってエネルギーは無限遠にぬけているから，底板は造波抵抗を感じているはずなのに，それに見合った力が流体中にあらわれていないからである．したがって，底板の加えつつある力はすでに無限遠にとどいていて，そこの流体を加速しつつあると解釈すべきであろう．波が無限遠にとどいている状態は，底板と共に動く観測者からみれば定常状態であり，これは波が立ちはじめてから無限の時間の経過ののちに達せられた，もうこれ以上変化のおこりようのない「終状態」である．実は，この解釈が，Eliassen と Palm (1961), Charney と Drazin (1961) その他の人たちによってえられた結論——「定常波（stationary wave）は，その振幅の2次のオーダーまで平均帯状流に変化をもたらさない」——に対する意味づけである．

これまでは，底板の凹凸によって強制されつづける波を頭においてものごとを考えてきたが，もし強制が途中でなくなれば，それ以後は自由な波束として伝わることになる．そうすれば，方程式（2-3）から容易に推察されるように，平均流は波の先端で加速され，後端で減速（逆向き加速）されることになり，波が通過してしまえばきえる．つまり，平均流は波の占めている領域にのみ存在する．その意味で，方程式（2-3）で与えられる平均流 U は波と一体であって，「本当の平均流」——基本流——とはいいがたい．しかし流体に粘性があれば，伝播途中で波のエネルギーの散逸がおこり，U は刻一刻波

からはぎとられていく．かくて，U は「本当の平均流」——基本流——として場にのこる．

さて，「波による平均流の加速」の要である方程式 (2-3) を導いた論理は，すでに明らかなように，「波は運動量 E/C をもっている」というイメージないし考え方に支えられている．そして，その「運動量」が平均流 U として実現するというのである．要するに，波は流れを伴っているということである．「準2年振動」に関する Lindzen-Holton のモデル (1968, 1972) や「突然昇温」に関する松野のモデル (1971) の背後にひそんでいるのは，内部重力波やプラネタリー波に対する，上のような考え方である．「波の運動量」というのは奇妙にひびくが，いかにも運動量 $h\nu/C$ (C は光の速さ，ν は光の振動数，h はプランク定数) をもつフォトンのようなイメージであり，McIntyre (1973) がこれを「フォトン・イメージ」ないし「フォトン・アナロジー」と呼んでいるのは，なかなかうまい名づけ方である．

3. 波とそのまわりの平均流

ここでは前章での直観的な論理を，流体力学方程式に基づいてきちんととりあつかうことにする．内部重力波の場合とプラネタリー波の場合を論じて，波の性質による結果の異同を考えることにする．

3・1 内部重力波の場合

粘性のない，成層した非圧縮性流体の中を内部重力波が鉛直上方に伝わっているところと考える．流体層は波がなければ静止していて，運動は鉛直面内2次元，摩擦なしの断熱運動とする（図1参照）．

座標軸を，東西に x，上下に z ととる．時間と空間の単位として，N^{-1} と gN^{-2} (N は Brunt-Väisälä の周波数，g は重力加速度) を用いれば，運動方程式，連続の式および断熱方程式は，次のような無次元の形で書くことができる（ただし，もともとの静止状態での静力学的平衡を示す項はすでに差しひいてある）．

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (3\text{-}1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}-\rho \qquad (3\text{-}2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}-w=0 \qquad (3\text{-}3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (3\text{-}4)$$

ここで，u, w はそれぞれ x, z 方向の流速成分，p, ρ はそれぞれ圧力，密度を表わしている．(3-3) は，非圧縮性流体の断熱方程式である．

さて，波によってつくりだされる平均流を求めるにあたって，波は次のような形をしているとしよう（以下，波に伴う諸量には，‘ ′ ’をつける）．

$$u'=a\mathrm{R}_e\,[A(Z,\ T)e^{i\chi}]$$
$$\chi=kx+nz+\sigma t \qquad (3\text{-}5)$$

ここで，k, n はそれぞれ x, z 方向の波数，σ は周波数である．考えている流体は，もともと静止した非圧縮性成層流体だから，媒質としての特性は一様と考えてよい．それで，以下の議論では，k, n および σ はすべて一定とみなす．a は，波の振幅を特徴づける小さなパラメタであり，$\mathrm{R_e}[\ \ ]$ はカッコ内の実部を意味している．

Z, T は次のように定義される新しい変数である．

$$Z=\varepsilon z,\quad T=\varepsilon t\ \ (\varepsilon\ll 1) \qquad (3\text{-}6)$$

すなわち，z や t の変化の「はやさ」にくらべて，Z や T はきわめてゆるやかな変化しかしない．その意味で，前者は「はやい変数 (fast variables)」，後者は「ゆっくり変数 (Slow variables)」と呼ばれる．(3-5) は，振幅が $A(Z,\ T)$ で「変調」された波——波束 (wave packet) をあらわしているが，その振幅の変化のぐあいは，波の一周期 ($=2\pi/\sigma$) や2周期（あるいは一波長 ($=2\pi/\sigma$) や2波長）の間ではほとんど一定とみなせるほどにゆっくりしているわけである．それで，u' などは，「はやい変数」に関して平均すれば0となってしまうと考えてよい．これから先の議論では，「平均」といえば，一周期（又は一波長）平均のこととする．(‘$-$’をつけてあらわす)．

そこで，u（その他の量も）を次のように分解しよう．

$$u=u'+U,\quad \overline{u'}=0 \qquad (3\text{-}7)$$

第1項は，(3-5) で与えられる波の部分であり，第2項は平均流の部分である．流体層はもともと静止しているので，U には，いわゆる基本流は含まれていず，波によってひきおこされる（次第にあきらかになるが），振幅 a に関して2次のオーダーの流れである．

以下，すべての量を2つの小さなパラメタ a, ε によって展開する方法を用いる．a-展開は高次になるにつれて非線型項の効果を表現し，ε-展開は振幅変化の効果をあらわすことになる．

(3-7) を方程式 (3-1)～(3-4) に代入して，パラメタ a に関して1次のオーダーまでとり適当にまとめれば，

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u'}{\partial z^2}-k^2u'\right)-k^2u'=0 \qquad (3\text{-}8)$$

がえられる．これは，おなじみの内部重力波の方程式である．

(3-8) に仮定 (3-5) を代入する．そのさいたとえば次のようなことに注意して計算をすすめる．つまり，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[A(Z,\ T)e^{i\chi}\right]=\left(i\sigma A+\varepsilon\frac{\partial A}{\partial T}\right)e^{i\chi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[A(Z,\ T)e^{i\chi}\right]=\left(inA+\varepsilon\frac{\partial A}{\partial Z}\right)e^{i\chi}$$

その結果，少々複雑な式がえられるが，その式において A を次のように展開し，

$$A(Z,\ T)=A^{(0)}+\varepsilon A^{(1)}+\cdots\cdots \tag{3-9}$$

ε の各べきの係数を0とおく．

そうすると，まず，ε の0次で，

$$\sigma^2=\frac{k^2}{k^2+n^2} \tag{3-10}$$

がえられる．これは，とりもなおさず，振幅一定の内部重力波の分散関係式である．

(3-10) によって，水平位相速度 C，鉛直群速度 C_g は，それぞれ次のようになる．

$$C^2\equiv\left(-\frac{\sigma}{k}\right)^2=\frac{1}{k^2+n^2} \tag{3-11}$$

$$C_g=\left(-\frac{\partial\sigma}{\partial n}\right)=\frac{n\sigma}{k^2+n^2} \tag{3-12}$$

次に ε の1次のオーダーで

$$\frac{\partial A^{(0)}}{\partial T}+C_g\frac{\partial A^{(0)}}{\partial Z}=0 \tag{3-13}$$

がえられる．これは，振幅変調の形が，鉛直群速度 C_g で移動していくことを示している．いいかえれば，C_g で動く観測者には，波束はその姿をかえないということである．このことは，エネルギーが同じく C_g で伝達されていくことを暗示している．

ここで，波のエネルギー密度を次のように定義しよう．

$$E=\frac{1}{2}\left(\overline{u'^2}+\overline{v'^2}+\overline{\rho'^2}\right) \tag{3-14}$$

カッコ内のはじめの2項は，運動のエネルギーであり，第3項は位置のエネルギーである．自明のことと思われるかも知れないが，E が波に伴って振動する流体粒子の全エネルギー密度（振幅の2次のオーダーまで正しく）を表わしていることは大切な点である．つまり波に伴っておこる流体粒子の変位の x，z 成分をそれぞれ ξ'，ζ' とすれば，振幅パラメタ a の1次のオーダーで，

$$u'=\partial\xi'/\partial t,\quad w'=\partial\zeta'/\partial t\left(=\frac{\partial\rho'}{\partial t}\right) \tag{3-15}$$

という関係が成り立つからである．

E を求めるには，w'，ρ' に関する知識が必要であるが，それらは ε の1次のオーダーで次のように書くことができる．

$$w'=-\frac{n}{R}a\,\mathrm{Re}\left[\left\{A^{(0)}+\varepsilon\left(\frac{i}{n}\frac{\partial A^{(0)}}{\partial z}+A^{(1)}\right)\right\}e^{i\chi}\right]$$

$$\rho'=a\,\mathrm{Re}\left[\left\{CA^{(0)}+\varepsilon\left(-\frac{i}{k}C_g\frac{\partial A^{(0)}}{\partial z}+CA^{(1)}\right)\right\}e^{i\chi}\right]$$

$$p'=\frac{k}{n\sigma}a\,\mathrm{Re}\left[\left\{iA^{(0)}-\varepsilon\left(\left(\frac{1}{n}-\frac{C_g}{\sigma}\right)\frac{\partial A^{(0)}}{\partial z}-iA^{(1)}\right)\right\}e^{i\chi}\right] \tag{3-16}$$

これらが，a の1次のオーダーの方程式をみたすことは直接代入してみればすぐわかる．

そうすれば，E は，ε の leading order で次のように書けることがすぐわかる．

$$E^{(0)}=\frac{k^2+n^2}{2n^2}a^2|A^{(0)}|^2 \tag{3-17}$$

ここで $E^{(0)}$ はむろん ε-展開の第1項である．

この結果を (3-13) に代入し，k や n が一定であることを考慮すれば，

$$\frac{\partial E^{(0)}}{\partial T}+C_g\frac{\partial E^{(0)}}{\partial Z}=0 \tag{3-18}$$

がたやすくえられる．これは，波のエネルギー密度が C_g で伝達されていくこと，いいかえれば，波束のひろがりにわたって積分された全エネルギーが保存されることを示している．

また，次の関係式も心にとめておこう．

$$\overline{p'w'}=-\frac{n}{2k}Ca^2|A^{(0)}|^2=C_gE_0 \tag{3-19}$$

つまり，任意のレベルを横切るエネルギー流束 $\overline{p'w'}$ は，エネルギー密度と鉛直群速度との積に等しい．

なお，レイノルズ応力の成分を計算すれば，ε の2次のオーダーで，

$$\overline{u'w'}=-\frac{n}{2R}a^2|A^{(0)}|=\frac{C_g}{C}E^{(0)}$$

$$\overline{w'^2}=\frac{n^2}{2k^2}a^2|A^{(0)}|=\frac{n}{k}\frac{C_g}{C}E^{(0)} \tag{3-20}$$

となる．

(3-19) や (3-20) の諸量が，$E^{(0)}$ と同じく振幅パラメタ a に関して2次のオーダーであること，そして高さと共に「ゆっくり」変化していることは大事な点である．また，$\overline{u'\rho'}$ や $\overline{w'\rho'}$ は，ε の1次のオーダーまで0である．つまり，波に伴う浮力流束 (buoyancy flux) は，レイノルズ応力にくらべてオーダーが1つ小さい．

これまでの結果をまとめておこう．系におこっている

第1次の運動 (Primary motion) としての内部重力波は，その波数と周波数が分散関係 (3-10) で特徴づけられる波束として伝わり，それに伴ってレイノルズ応力も伝達されていくが浮力流束は0である．

さて，平均流 U, W を求めよう．まず，連続の式(3-4) を平均し，波束から上下にずっとはなれると流体は止っていることを考慮すれば，

$$W=0 \tag{3-21}$$

がえられる．したがって，平均流は存在しているとしても水平的である．

次いで，(3-7) を (3-1) に代入して平均すれば，a に関する2次のオーダーの方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'}=0 \tag{3-22}$$

がえられる．これに (3-20) および U の ε-展開

$$U=U^{(0)}+\varepsilon U^{(1)}+\cdots\cdots$$

を代入すれば，ε の1次のオーダーで

$$\frac{\partial U^{(0)}}{\partial T}+\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{C_g E^{(0)}}{C}\right)=0 \tag{3-23}$$

となる．$E^{(0)}$ が高さと共に「ゆっくり」変化しているので，第2項はでは0ない．つまり，2次の平均流 $U^{(0)}$ が誘導される．しかし，波が一定振幅ならば，第2項は0となって，2次のオーダーまで平均流の加速はおこらない．波が無限遠に到達している場合，つまり定常波の場合がこれに当る (Eliassen-Palm (1960), その他参照).

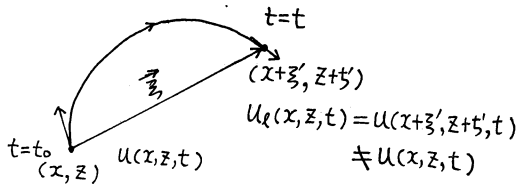
$E^{(0)}$ は保存則 (3-18) に従うから，それと (3-23) を組み合わせれば，ただちに

$$U^{(0)}=E^{(0)}/C \tag{3-24}$$

がえられる．これは，波によってつくられる「平均運動量」$U^{(0)}$ が，「波の運動量」$E^{(0)}/C$ に等しいことを示している．逆に，波束が占めている領域には $E^{(0)}/C$ に相当する「運動量」が存在していて，それは流れ $U^{(0)}$ となって実現するといえる．

しかしながら，このようないい方は必ずしも正確ではない．というのは，$E^{(0)}/C$ が正しく「運動量」と呼ばれるには，それが流体粒子の平均運動量すなわち質量輸送速度 (mass transport velocity) 又はラグランジュ的平均速度 (Lagrangian mean velocity) U_m に等しくなくてはならないからである．しかし，上に求めた $U^{(0)}$ は，空間の任意の一点における平均，つまりオイラー的平均速度 (Enlerian mean velocity) であって，一般に U_m とは同じではない．そこで問題は，今の場合，果して U_m と $U^{(0)}$ が等しいかどうかである．

ラグランジュ的平均速度 (Lagrangian mean velocity)



第2図 流体粒子の速度とオイラー的速度の関係

U_m を求めるには，ラグランジュ形式の方程式から出発する必要は必ずしもなく，これまで求めたオイラー方程式の解を利用して次のように考えていけばよい（図2参照).

今，時刻 $t=t_0$ で点 $(x,\ z)$ にあった流体粒子は，時刻 $t=t$ には，別の位置に移動している．そのとき粒子の速度を $U_l\ (x, z, t)$ と書く．この表現では，座標 $(x,\ z)$ は粒子の名前である．

$t=t_0$ から $t=t$ までの粒子の変位ベクトルを $\vec{\xi}\ (\xi',\ \zeta')$ と書くことにする．そうすれば，$\vec{U_l}\ (x,\ z,\ t)$ は，点 $(x+\xi',\ z+\zeta')$ における速度 $\vec{U}\ (x+\xi',\ z+\zeta',\ t)$ に等しいはずである．なぜなら，任意の時刻・任意の一点における流速は，一意（ラグランジュ的にながめようとオイラー的にみようと）に決まるから．波に伴って，粒子もはじめの位置 $(x,\ z)$ のまわりに振動しており，その変位は，波の振幅が微小ならば，同程度に微小である．そうすれば，振幅の2次のオーダーまでとって，次のような近似式が成り立つ．

$$\vec{u_l}(x,\ z,\ t)\equiv u(x+\xi,\ z+\zeta',\ t)\doteqdot\vec{u}(x,\ z,\ t)+(\vec{\xi}\cdot\nabla)\,\vec{u}\,(x, z, t) \tag{3-25}$$

この式で，右辺第1項の $\vec{u}(x,\ z,\ t)$ はオイラー方程式の解として求められ，$\vec{\xi}$ もすでにのべたように，関係式 (3-15) によって $\vec{u}\ (x,\ z,\ t)$ と結びつけられる．

そこで，(3-25) を波の一周期（又は一波長）にわたって平均すれば，

$$\overline{\vec{u_l}(x,\ z,\ t)}=\overline{\vec{u}(x,\ z,\ t)}+\overline{(\vec{\xi}\cdot\nabla)\,\vec{u}(x,\ z,\ t)} \tag{3-25'}$$

となり，左辺がラグランジュ的平均速度，つまり質量輸送速度 $\vec{U_m}$ である．右辺第1項が，この章で一所懸命求めたオイラー的平均速度 $\vec{U}$ である．第2項が，ストークス速度 (Stokes' drift) と呼ばれる補正項である．$\vec{U_s}$ と書くことにする．かくて

$$\vec{U_m}=\vec{U}+\vec{U_s} \tag{3-26}$$

又は，標語的に

ラグランジュ＝オイラー＋ストークス

と書くことができる．(英国の Longuet-Higgins よれば，$\overrightarrow{U_s}$ は古く1848年 G.G. Stokes が「波の渦なし理論」で示しているそうである．彼は (3-26) に基いて水の波による質量輸送を論じた．まことに残念ながら，筆者はその原論文を手に入れていない)．

(3-26) から明らかなように，ラグランジュ的平均速度は，必ずしもオイラー的平均速度に等しくはなく，ストークス速度が付加されるわけである．因みに，U が0でも U_m は0でないことがある．Stokes (1848) が論じた水面をつたわる重力波の場合がその例である．運動の渦なし性から，流体内の一点での平均速度（オイラー的平均速度）は0であることが帰結されるが，波に伴って平均位置からもち上った部分が前方（波の進行方向）への流れを伴い，下った部分が後方への流れを伴っているために，平均として質量輸送がおこることになる．また次のようにもいいかえられる．波に伴う流速（オイラー的）は自由表面に近い方が大きいので，(3-25′) からわかるように波の山における粒子速度（前方向き）の方が波の谷におけるそれ（後方向き）より大きい．したがって，波に伴って粒子の描く軌道は振幅の1次のオーダーでは閉じるが（ここまではよく知られている），2次のオーダーでは閉じずに粒子は波の進行方向にわずかずつ移動していく．この移動速度がストークス速度であり，その方向に質量輸送がおこる．

さて，(3-26) を今の問題にあてはめよう．$\overrightarrow{U}(U,\ W)$ はすでにわかっているので，求めるのは $\overrightarrow{U_s}$ である．その x，z 成分をそれぞれ U_s，W_s と書く．変位 $\overrightarrow{\xi}(\xi',\ \zeta')$ は，(3-15) で与えられるので，非発散性(方程式(3-4))を考慮すれば，

$$U_s=\overline{\xi'\frac{\partial u}{\partial x}+\zeta'\frac{\partial u}{\partial z}}=\frac{\partial}{\partial z}\overline{u'\zeta'}=0\ \ (\varepsilon^2)$$

$$W_s=\overline{\xi\frac{\partial w'}{\partial x}+\zeta'\frac{\partial w'}{\partial z}}=\frac{\partial}{\partial z}\overline{w'\zeta'}=0\ \ (\varepsilon^2)$$

すなわち，ストークス速度は，ε の1次のオーダーまで0である．ゆえに，ラグランジュ的平均速度は，その x，z 成分をそれぞれ U_m，W_m と書けば，ε の最低次で

$$U_m=U+U_s=U^{(0)} \qquad (3\text{-}27)$$

$$W_m=W+W_s=0 \qquad (\because W=0),\ (3\text{-}21)$$

となる．この結果は重要である．

まず，(3-23) や (3-24) における $U^{(0)}$ は，質量輸送速度とみなしてよいということ，したがって，$E^{(0)}/C$ はたしかに運動量と解してよいことが結論された．

さて，波によって平均流が加速されるといえば，概してすぐに，「波のエネルギーが平均流のエネルギーに転嫁する結果，$U^{(0)}$ が生じる」と考えやすい．しかし，今の場合，方程式 (3-18) から明らかなように「波のエネルギー」$E^{(0)}$ は保存される．それゆえ，「平均流のエネルギー」に「転換」されると解釈するのは正しくない．(3-19) からわかるように，エネルギー流速密度 $\overline{p'w'}$ $(=C_gE^{(0)})$ によって波は上に伝播する．そのとき波は必ず $\overline{u'w'}$ という平均運動量流束を伴っているため，流体は平均流に流されることになる．いいかえれば，波は必ず平均流を伴っていて，それらの間にエネルギー的な区別はつけられないということである．第5章においてくわしくのべるが，今の場合，「系」のエネルギー保存則を a^2 のオーダーまで正しくつくると，それには「平均流のエネルギー」$U^{(0)2}/2$ は含まれない (a^4 のオーダーだから)．それゆえ，「波のエネルギー」$E^{(0)}$ の保存則となり，他方「系」の運動量保存則は，a^2 のオーダーで (3-23) となる．したがって，$U^{(0)}$ の誘導は「系の運動量が保存される結果，波に伴う過剰な運動量 $E^{(0)}/C$ の分だけ流体は平均的に流れる」と解釈すべきである．なお，これまでわたしたちは，波に関するオイラー方程式を解くことによって議論をすすめてきたために，形式の整合性が必ずしも明白ではないきらいがあったが，逆に，初めから「系」のエネルギー保存則と運動量保存則をきちんと構成・連立させることによっても全く同じ結論が得られることはいうまでもないし，その方が整合性があらわにわかって気持がいいかも知れない．

(3-27) にもどって，それが示す他の重要なことがらを検討しよう．(3-27) によれば，オイラー的平均速度のみならずラグランジュ的平均速度も，その鉛直成分は0である．つまり波によって誘起される平均流は水平的である．$W_m=0$ は，流体粒子が平均としてその高さを変えないことを意味している．つまり，流体粒子で構成される等エントロピー面（ここでは非圧縮性流体だから等密度面とみなしてよく，もともと水平である）は波打つだけであり，粒子は平均的な高さを変えず，ただその上を水平に動くだけである．そうすると，方程式(3-23) で $U^{(0)}$ を U_m（正しい運動量密度）と解してよかったことに対応して $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{C_gE_0}{C}\right)$ は，波立つ物質面 (material surface) を通して，一方の側の粒子が他の側の粒子におよぼす「力」と解釈できるはずである．実際

$$\frac{C_gE^{(0)}}{C}=\overline{u'w'}=\overline{u'\frac{\partial\rho'}{\partial t}}=\overline{u'\frac{\partial\zeta'}{\partial t}}=-\overline{\zeta'\frac{\partial p'}{\partial x}}=-\overline{p'\frac{\partial\zeta'}{\partial x}}$$

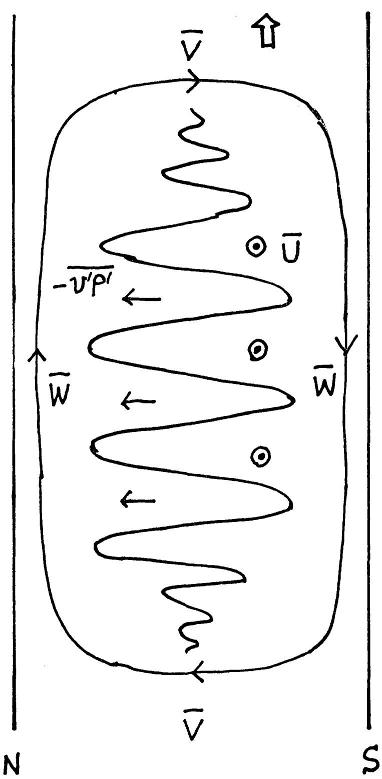
という関係が成り立つ．ζ' は，粒子の鉛直変位だから，

これをオイラー的にみれば，等エントロピー面の凹凸と考えてよい．右辺の最後の形は，まさしく凹凸する物質面を介して働く pressure drag である．注意すべきは，$W_m=0$，すなわち物質面を横切る流れがないから，その面に垂直な0次のストレス——もともとの平衡状態で存在している圧力——があらわれないことである．この事実が，上のような解釈をゆるすといってもよい．こうして，「波による平均流の加速」ということの物理的イメージがわりあいすっきりしたと思われる．

なお，平均流の鉛直構造は，(3-2) の平均からわかるように，$\overline{w'^2}$ の分だけ静水圧が増加するだけの静的なつりあいを示すことになる．

3・2 プラネタリー波の場合

前節と同じように成層した非圧縮性流体中を，鉛直上方にプラネタリー波が伝わっているところを考えるが，今度は2次元でとりあつかうわけにはいかない．南北の



第3図 南北の2つの壁にはさまれた流体層をプラネタリー波束が上方へ伝わっているところ．波束のまわりにこのような子午面循環がつくられる．

運動が東西の運動と同じように卓越するからである．そこで，流体層は，南北にはDの距離でへだたった2つの固体壁ではさまれているとしよう．準地衡風的・準静力学的近似を仮定する．

ここで予め，プラネタリー波による平均流加速のからくりを絵どってみよう．よく知られているように，上方に伝わるプラネタリー波は，南向きの浮力流束 $\overline{v'\rho'}$ (ρ' は密度擾乱，v' は流速擾乱の南北成分）を伴っている (Elassen-Palm, 1961；その他参照)．それゆえ，波の伝播に伴って，子午面内に2次的な浮力源が生じ，南側が重く北側が軽くなって，子午面循環が生じる（図3参照)．これにコリオリカが作用して，波の先端部で東風，しっぽで西風が生じる．以上が，プラネタリー波による平均帯状流加速のあらましであり，松野 (1971) の突然昇温のモデルにとり入れられた基本的なからくりである．以下に示すように，この過程は，見方をかえれば，プラネタリー波による西向き運動量の伝達過程であるから，そのような観点から定式化すれば，前節の (3-23) と同じ形の方程式にたどりつく（南北に平均されてはいるが)．他方，断熱過程であることりに対応して，ラグランジュ的平均速度の鉛直成分が，再び0であることが証明される．これら2つの結果によって，プラネタリー波による平均流加速の機構も，波立つ物質面を介して働く pressure drag による流体の加速と解釈できることになる．オイラー的にみると平均子午面循環があらわれるが，ラグランジュ的な子午面循環はない．

さて，出発点にもどって上述のことがらを逐一明らかにしていこう．成層した非圧縮性流体の準地衡風運動は，次のようなポテンシャル渦度の方程式として書ける（y を南北の座標とする)．

$$\frac{\partial}{\partial t}q-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}q+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}q+\beta\frac{\partial p}{\partial x}=0$$

$$q=\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \qquad (3\text{-}28)$$

$$\beta=\beta_0 D/f_0$$

f_0：流体層の中心緯度におけるコリオリ因数

β_0：ロスビー因数

ただし，この方程式は，時間の単位および空間の水平，垂直の単位として，それぞれ f_0^{-1}，D および f_0D/N を用いて，無次元化されている．

圧力 p を次のように分解する．

$$p=P_{00}+p'+P \qquad (3\text{-}29)$$

第1項は，もともとの静止状態での圧力であり，z だけ

の函数である．以下の議論では除外して考えても一向にさしつかえない．p' は波の項，P は波によってひきおこされる２次の流れの場に対応する圧力分布であり，これがわれわれの興味の中心である．

波としては，

$$p' = a \sin \pi y \ \mathrm{Re}\ [P(Z,\ T)e^{i\chi}]$$
$$\chi = kx + nz + \sigma t \qquad (3\text{-}30)$$

を仮定する．使われた文字の意味は，すべて前節と同じである．ただし y 方向の構造 $\sin \pi y$ は，地衡流速が南北の固体壁上で０となるという条件を考慮して，そのように仮定した．p' の「はやい変数」に関する平均が０，つまり，$\overline{p'}=0$，はいうまでもない．

(3-29) を (3-28) に代入して，a の１次のオーダーの方程式をつくると，次のようなよく知られた線型のポテンシャル渦度方程式がえられる．

$$\frac{\partial}{\partial t} q' + \beta \frac{\partial p'}{\partial x} = 0$$
$$q' \equiv \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} \qquad (3\text{-}31)$$

この方程式に (3-30) を代入して，前節と同様に，たとえば

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = a \sin \pi y \ \mathrm{Re}\left[\left(inP + \varepsilon \frac{\partial P}{\partial Z}\right)e^{i\chi}\right]$$

などに注意して計算し，その後 P の ε-展開

$$P = P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \cdots\cdots$$

を代入すれば，ε の０次のオーダーで，

$$\sigma = \frac{\beta k}{k^2 + \pi^2 + n^2} \qquad (3\text{-}32)$$

がえられる．これは，振幅一定の自由ロスビー波の分散関係である．水平位相速度 C，鉛直群速度 C_g は，次のようになる．

$$C = -\frac{\beta}{k^2 + \pi^2 + n^2}$$
$$C_g = \frac{2\sigma n}{k^2 + \pi^2 + n^2} \qquad (3\text{-}33)$$

ε の１次のオーダーでは，振幅 $P(Z,\ T)$ の方程式

$$\frac{\partial P^{(0)}}{\partial T} + C_g \frac{\partial P^{(0)}}{\partial Z} = 0 \qquad (3\text{-}34)$$

がえられる．これはむろん，波束がその形を変えずに C_g の速さで伝わっていくことを示している．内部重力波の場合と同じように，この式は，波の全エネルギーの保存と完全に対応している．

波のエネルギー密度 E を次のように定義しよう．

$$E = \frac{1}{2}\int_0^1 (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{\rho'^2})dy \qquad (3\text{-}35)$$

被積分函数のはじめの２項は運動のエネルギー，第３項は位置のエネルギーである．むろん，E は波に伴って振動する流体粒子のエネルギー密度を，振幅の２次のオーダーまで正しく表わしている．それは，粒子の変位 ξ'，η' および ζ' が，振幅の１次のオーダーで

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} = u',\ \ \frac{\partial \eta'}{\partial t} = v',\ \ \zeta' = \rho' \qquad (3\text{-}36)$$

という関係をもっていることからただちに了解できる．

a に関する１次のオーダーの方程式をみたす関係式

$$u' = -a\pi \cos \pi y \ \mathrm{Re}[(P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)})e^{i\chi}]$$
$$v' = ak \sin \pi y \ \mathrm{Re}[i(P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)})e^{i\chi}] \qquad (3\text{-}37)$$
$$w' = -a \sin \pi y \ \mathrm{Re}\left[\left\{-\sigma n P^{(0)} + \varepsilon\left(-\sigma n P^{(1)} + i\sigma \frac{\partial P^{(0)}}{\partial Z} + in \frac{\partial P^{(0)}}{\partial T}\right)\right\}e^{i\chi}\right]$$
$$\rho' = -a \sin \pi y \ \mathrm{Re}\left[\left\{in\ P^{(0)} + \varepsilon\left(in\ P^{(1)} + \frac{\partial P^{(0)}}{\partial Z}\right)\right\}e^{i\chi}\right]$$

を利用して，E を計算すれば，ε-展開の leading order で

$$E^{(0)} = \frac{1}{8}(k^2 + \pi^2 + n^2)a^2 |P^{(0)}|^2 \qquad (3\text{-}38)$$

となる．ゆえに，(3-34) は

$$\frac{\partial E^{(0)}}{\partial T} + C_g \frac{\partial E^{(0)}}{\partial Z} = 0 \qquad (3\text{-}39)$$

というエネルギー保存則に書きかえられる．なお，次のような関係式も心にとめておこう．

$$\overline{u'v'} = 0$$
$$\int_0^1 \overline{v'\rho'}\ dy = C_g E_0 / C \qquad (3\text{-}40)$$
$$\int_0^1 \overline{p'w'}\ dy = C_g E_0$$

はじめの式は，仮定した波が，南北に位相変化しないことから必然的に帰結される．第２の式は，南北の浮力流束 $\overline{v'\rho'}$ が「運動量流束 C_gE_0/C」の担い手（この解釈の正当性はのちに明らかになる）であることを示している．内部重力波の場合，C_gE_0/C はレイノルズ応力 $\overline{u'w'}$ によって担われていた．第３式は，エネルギー流束 $\overline{p'w'}$ が，エネルギー密度 $E^{(0)}$ と鉛直群速度の積で与えられることを意味している．波はこれによって上方へのびていくわけである．

ここまでの結果をまとめると，系におこる第1次の運動としてのプラネタリー波は，その周波数と波数の関係が，自由ロスビー波の分散式（3-32）で与えられる波束として，その姿をかえずに，つまりエネルギーを保存しつつ鉛直上方に伝わっている．それに伴って，南北の浮力輸送がおこる．レイノルズ応力による運動量輸送はない．

さて，平均流を求めよう．(3-29) を基礎方程式（3-28）に代入して，波の一周期（又は一波長）について平均すれば，a に関する2次のオーダーの方程式がえられる．その中で $\bar{P}$ を ε-展開して，1次のオーダーまでとれば，

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial^2 \overline{P^{(0)}}}{\partial y^2}\right)=-\frac{\pi kn}{Z}\sin\ 2\pi y\frac{\partial}{\partial Z}(a^2|P^{(0)}|^2)$$

$$=+2\pi\ \sin\ 2\pi y\frac{C_g}{C}\ \frac{\partial E^{(0)}}{\partial Z} \qquad (3\text{-}41)$$

がえられる．

この方程式は，次の連立方程式と等価である．

$$\frac{\partial U^{(0)}}{\partial T}-V^{(1)}=0$$

$$U^{(0)}=-\frac{\partial \bar{P}^{(0)}}{\partial y}$$

$$0=-\frac{\partial \bar{P}^{(0)}}{\partial Z}-\rho^{(1)} \qquad (3\text{-}42)$$

$$W^{(0)}=2\pi\ \sin\ 2\pi y\frac{C_g E^{(0)}}{C}$$

$$\frac{\partial V^{(1)}}{\partial y}+\frac{\partial W^{(0)}}{\partial Z}=0$$

ここで，諸量の添字(0)，(1)は，それぞれの ε-展開における最初の項を示している．この連立方程式が，ポテンシャル過度方程式（3-28）を導くさいに用いられる．ロスビー数の1次のオーダーで成り立つ方程式系を平均してえられるものであることはいうまでもあるまい．第4式は，ちょっと変って見えるが，平均された断熱方程式である．それがこのように簡略化されるということは大切な点だから，もう少しくわしくみておこう．断熱方程式の原型は，地衡流近似の範囲で，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}-W=0$$

と書ける．これに，$u=u'+U$，$v=v'+V$，$\rho=\rho'+\rho$ を代入して，a の2次のオーダーまでとって平均すれば，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\overline{v'\rho'}-W=0$$

となる．u' と v' には地衡流の関係を利用している．$\overline{v'\rho'}$ を（3-37）によって計算し，ρ，W を ε-展開してみると，この方程式の3つの項のうち，第2，第3項が ε の1次のオーダーまでバランスしていることがわかる．つまり

$$W \doteqdot \frac{\partial}{\partial y}\overline{v'\rho'} \qquad (3\text{-}43)$$

これを，ε の0次までとって書いたものが，(3-42) の第4番目の式である．

連立方程式（3-42）の述べるところを要約すれば，平均上昇，下降流が波に伴う子午面内の浮力流束の収束，発散によってひきおこされ（第4式），したがって連続の関係をみたすべく平均南北流が生じ（第5式），それにコリオリが作用して平均帯状流が生じる（第1式）ということになる．これは，まぎれもなく，はじめに絵どったからくりである．なお $\partial\rho/\partial t$（子午面内での局所的な温度の上昇下降に対応する）が断熱方程式に入らないことは，ここで考えている状況では等密度面（等エントロピー面）は単に凹凸するだけで，平均的には傾かないことを意味している．「突然昇温」のような急激な現象は，この項を媒介としておこる（Matsuno, 1971）．

(3-43) の W を連続の式に入れて，南北の壁で $V=0$ を考慮して積分すれば，

$$V=-\frac{\partial}{\partial z}\overline{v'\rho'} \qquad (3\text{-}44)$$

ゆえに，V は ε-展開では W よりもオーダーが1つさがり，1次のオーダーで

$$V^{(1)}=-(1-\cos\ 2\pi y)\frac{C_g}{C}\ \frac{\partial E^{(0)}}{\partial Z} \qquad (3\text{-}45)$$

がえられる．むろん，(3-42) の第4，第5式からも直接えられる．(3-45) を y で積分すれば

$$\int_0^1 V^{(1)}\,dy \equiv \langle V^{(1)}\rangle=-\frac{C_g}{C}\ \frac{\partial E^{(0)}}{\partial Z} \qquad (3\text{-}46)$$

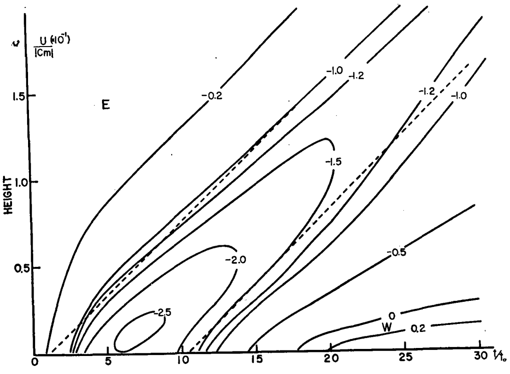
となる．左辺は平均子午面流に働くコリオリ力であるから，それが波に伴う浮力流束の担う「運動量流束 C_gE_0/C」の収束（発散）に等しいことになる．(3-46) については後でまたふれる．(3-45) を (3-42) の第1式に入れれば，

$$\frac{\partial U^{(0)}}{\partial T}=-(1-\cos\ 2\pi y)\frac{C_g}{C}\ \frac{\partial E^{(0)}}{\partial Z} \qquad (3\text{-}47)$$

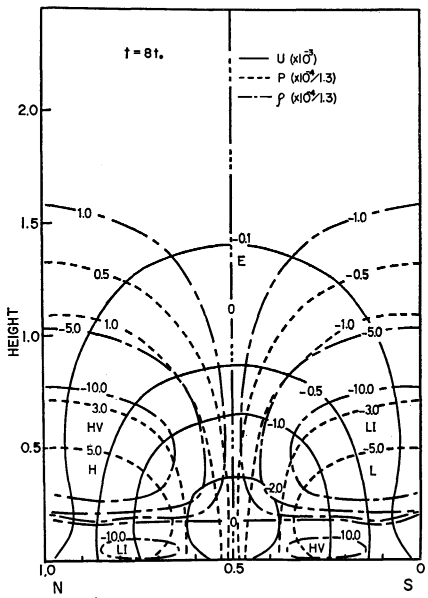
又は y で積分して

$$\frac{\partial}{\partial T}\langle U^{(0)}\rangle=\frac{C_g}{C}\ \frac{\partial E^{(0)}}{\partial Z} \qquad (3\text{-}48)$$

がえられる．エネルギー保存則（3-39）を利用すれば，



第4図　凹凸のある右板でプラネタリー波が励起され，それと共に東風が上方へ伝達されているところ．



第5図　図4に対応する子午面内の東風の分布．波が励起されてあまり時間がたっていない．

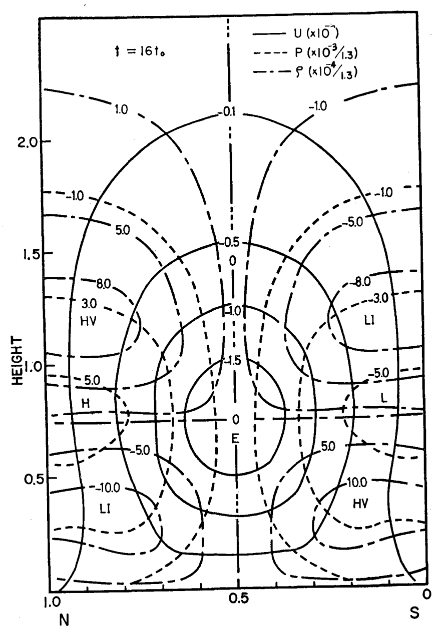
$$U^{(0)}=(1-\cos\ 2\pi y)\frac{E^{(0)}}{C} \tag{3-49}$$

又は

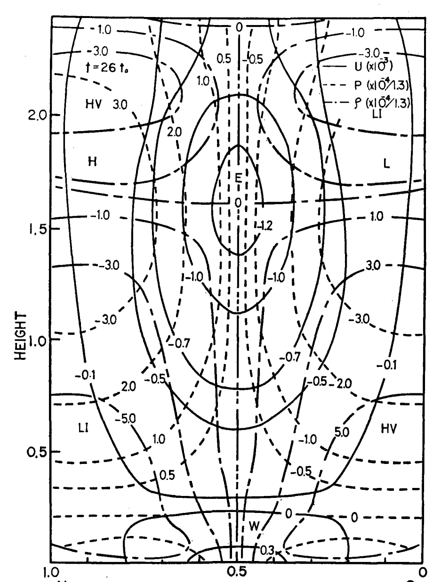
$$<U^{(0)}>=E^{(0)}/C \tag{3-50}$$

となる．

図4は，凹凸のある底板を $t=0$ から西へ動かしはじめ，一定時間後に止め（同時に凹凸もなくす）たときえられた，東風の伝達過程を時間-高度断面で示したものである．東風がほぼ群速度（点線で示してある）で上層



第6図　図5と同じ．但し，図5の時刻よりしばらく後．



第7図　図5と同じ．但し，図5の時刻よりかなり後．

に伝達されていくことがわかる．図5，6，および7は，3つの異なる時刻における子午面内の東風の分布を示している．東風の中心部が次第に上層に動いているのが

はっきりわかる．なお，これらの計算でえられた東風を子午面内で平均した数値は，式（3-50）で与えられるものときわめてよい一致を示すことを付け加えておこう．

こうして，プラネタリー波の場合も，南北に積分して考えれば，平均帯状流 $<U^{(0)}>$ に関しては内部重力波の場合と全く同じ形の方程式が成り立つし，波が占めている領域には，「波の運動量」$E^{(0)}/C$ に等しい大きさの平均帯状流が存在するといえる．波によってひきおこされる２次の平均子午面循環にコリオリ力が作用して，平均帯状流が生じる過程が，波による運動量の伝達過程として集約できるわけである．ただし，$E^{(0)}/C$ を運動量と簡単にいいきれないことを，この段階では留保しておくべきである．ラグランジュ的平均速度を問題にせねばならない．

前節のように，ストークス速度を計算しよう．

（3-36）の関係を利用すれば，地衡流近似の範囲内で，

$$U_s=\overline{\xi'\frac{\partial u'}{\partial x}}+\overline{\eta'\frac{\partial u'}{\partial y}}=\frac{\partial}{\partial y}\overline{\eta' u'} \qquad (3\text{-}51)$$

と書ける．そうすればただちに

$$<U_s>=\int_0^1\frac{\partial}{\partial y}\overline{\eta' u'}\ dy=0$$

がえられるから，

$$<U_m>=<U>+<U_s>=<U^{(0)}> \qquad (3\text{-}52)$$

となる．すなわち，（3-48）や（3-50）にあらわれる $<U^{(0)}>$ は，質量輸送速度とみなしてよい．したがって，$E^{(0)}/C$ は正しく運動量と解される．このことは，物質面を介して一方の側の粒子が他の側におよぼす力を計算すれば再び了解できる．

$$\int_0^1\left(\overline{-p'\frac{\partial\zeta'}{\partial x}}\right)dy=\int_0^1\overline{\zeta'\frac{\partial p'}{\partial x}}dy=\int_0^1\overline{\zeta' v'}dy$$

$$=\frac{C_g E^{(0)}}{C} \qquad (3\text{-}53)$$

（3-53）は，内部重力波の場合と同様に，物質面をよこぎる流れ W_m がないことを暗示している．実際，ストークス速度の鉛直成分 W_s は，地衡流近似の範囲内で，

$$W_s=\overline{\xi'\frac{\partial w'}{\partial x}}+\overline{\eta'\frac{\partial w'}{\partial y}}=\frac{\partial}{\partial y}\overline{\eta' w'}$$

$$=-\frac{\partial}{\partial y}\overline{v'\zeta'} \qquad (3\text{-}54)$$

となるから，（3-43）を利用すれば，

$$W_m=W+W_s=0 \qquad (3\text{-}55)$$

がえられる．したがって，流体粒子の子午面循環はおこらない．内部重力波の場合には，W，W_s が共に０であったが，プラネタリー波の場合には，それらはどちらも０ではなく，同じ大きさで互いに逆向きになっていて打ち消し合う．等エントロピー面（もともと水平である）は波打つだけであり，それゆえその上にある流体粒子は平均的に高さを変えない．粒子の平均子午面速度 V_m は，ストークス速度 V_s が地衡流近似の範囲で０だから，

$$<V_m>=<V_1> \qquad (3\text{-}56)$$

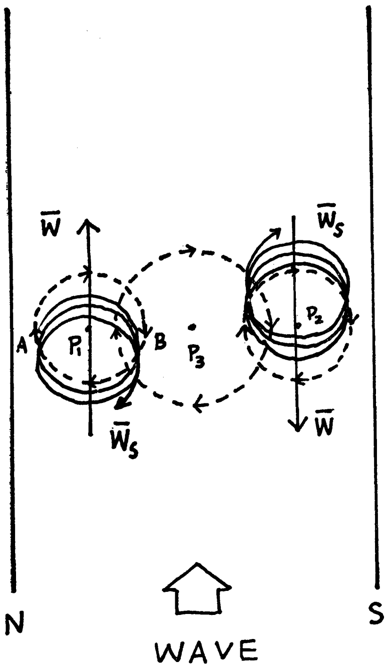
が成り立つ．これと（3-46），（3-53）をくみ合わせて考えると，波立つ等エントロピー面を介して働く応力は流体粒子に働くコリオリ力とバランスしていて，そのバランスに対応する帯状流と南北流をつくりだすといえる．

くりかえすが，オイラー的な平均子午面循環はあるけれど，ラグランジュ的，つまり流体粒子の平均子午面循環はない．この結果はそれら２つの記述の仕方ないしものの見方の特徴をあらわしていてまことにおもしろい．

この節のはじめで，オイラー的平均子午面循環がひきおこされる過程を簡単に絵どったが，ここでもう少しくわしく流体粒子の運動と関係させながら考えてみよう．

よく知られているように，オイラー的な見方では，空間の各点又は各面（物質座標又は物質面ではない）での流れ又は流れ模様に着目するのだから，その点又は面での平均流つまりオイラー的平均流を考えるときには流体粒子の入れ替りがおこることを忘れてはならない．そこで，適当な高さ（波束の中心高度でよい）$Z=H$ をえらべば，その面は波がなければ一つの物質面（等エントロピー面）に一致しているはずである．波がやってくると粒子は振動する，つまりその物質面は凹凸する．そうすると，その凹凸に伴ってできた空席には他の粒子がやってくる．上向きに移動したところへは，下側の重い粒子が，下向きに移動したところへは上側の軽い粒子がやってきて，$Z=H$ 面には色々な粒子（異った密度の）が雑居することになる．ところが今の場合，上（下）向きの変位は南（北）向きの流れと正の相関をもっているから（$\overline{v'\zeta'}>0$），$Z=H$ 面上の重い粒子は南側へ，軽い粒子は北側へ移動する．子午面内でみると，平均として「双極子」的な（２次の）浮力源ができあがる．その結果面 $Z=H$ を，北側では上向きに南側では下向きに横切る子午面循環が生じることになる．

次に，この過程をラグランジュ的に考察しよう．上に述べたことから明らかなように，オイラー的観点では，$Z=H$ 面を出入する粒子の全体を問題にするだけで，はじめにその面上にあった粒子の行方は考えに入ってこな



第８図　プラネタリー波の上方伝播に伴う粒子軌道の子午面上への投影図.

い．ラグランジュ的立場では，その行方を追跡することになる．

$Z=H$ 面にあった粒子は，その上下・南北の変位が90° の位相差をもつので，一つの子午面上に投影された軌道は一般に楕円である．同一位相の粒子は軌道上を同じ方向に動くが，その上昇（下降）速度は，流体層の中心に近いほど大きい．そこで図８で粒子 P_1 の運動をみると，点 A における上昇の速さより点 B における下降の速さの方が大きいので，一周期ののち，軌道はわずかに閉じず，P_1 は下降する．同様に P_2 は上昇する（P_3 はそのままである）．これがストークス速度を意味している．ところが，点 P_1 には上向きのオイラー的平均流が生じるので，そしてそれが上述のストークス速度と同じ大きさとなっているので，結局，子午面内の粒子 P_1 の軌道は，２次のオーダーまで閉じることになる．こうして，流体粒子は，物質面 $Z=H$ を横切ることはできない．このことは，断熱過程――流体粒子の実質的な加熱冷却がおこらない――に見合った結果である．

このように，ものの見方をかえると異った結果がえられることは，必ずしも驚くにあたらない．オイラー的な観点を支える概念（としての物理量）がラグランジュ的なそれとは異っているからである．もし高い塔か何かに流速計をとりつけて観測すれば，平均子午面循環がみえるけれど，一定の圧力高度を漂う風船か何かを追跡しても，それは波の通過と共にもとの位置付近をうろつくだけで，平均高度は変化しない――ということを上述の結果は示しているわけである．現象によっては全く逆の結論がえられることがある．たとえば，前節でちょっとふれたように，水面を走る重力波による質量輸送速度は，水中の一点に流速計をさしこんでいてもみえないが，適当な追跡子を用いればとらえることができる．

McIntyre は，上に述べた平均に午面循環をオイラー的観点がもたらした，「ある意味で artifact（こしらえたものとでも訳すべきか）である」といっている．'artifact' というのは 'nature（本来のもの）' の対立概念である．確かに，上述のオイラー的平均子午面循環は物質粒子の循環ではない．そのことを強調するために，artifact と呼んだのであろう．しかし，流体中の各点での流速を測る方法，つまりオイラー的な観測方法によってとらえることのできる運動であることを忘れてはなるまい．突然昇温などの現象は，そのようにして観測されたのである．その意味で.決してこしらえものではない．物質粒子の運動であろうと各点での流れであろうと，それに応じた観測方法によって観測できることを考えれば，一方を 'こしらえもの'' 他方を '本来のもの' と呼び分ける根拠はない．

ここで，「波の運動量」という概念についてすこし述べておこう．McIntye によれば，この概念は physical reality をもたないと批判されている．彼は，「波による輻射応力（radiation stress)」(光の輻射圧になぞらえてこう呼ばれる．Longuet-Higgins と Stewart (1961) が水の波と流れの相互作用を論じた際もちこんだ.）という概念で十分であるとっている．しかし，前節で問題にしたように，底板からどのようにして流体に力が伝達されるかを考えるときには，「波の運動量」というのは，大変わかりやすい概念であると思う．そして，これが大切な点であるが，波束の周囲に平均流が観測されるのだから，physical reality をもっているといってよい．実際，突然昇温や準２年振動は，「波の運動量」の実現である．ただし，どんな場合にもこの概念でうまくいくとはいえない．たとえば，一定の深さの水の底を，x 方向に有限なひろがりしかもたないような物体が C の速さで動きつつ重力波をつくる場合，その物体の後方の波束がもつ「運動量」を E/C（E は波のエネルギー密度）

で定義しても，それは物体がおよぼした力に等しくはない．表面の変形が，部分的に$\sqrt{gH}$（H は水層の深さ）で物体前方に伝わっていくので，そのことを勘定に入れなくてはつじつまがあわなくなる（この問題は複雑だがおもしろいものを含んでいる．議論は別の機会にゆずる）．

概念というのは，一般性をもっているにこしたことはないが，個別的状況を「うまく」表現し，わかりやすいこともまた有用である．ただし，ことわっておくが，「個別的」といっても，場あたり的にこしらえてよいということではない．概念は，一般的な原理の上にきちんとつくられたものでなくてはならない．そうすれば，それは必ず役立つはずである．

この節をしめくくるにあたって，粘性の効果についてひとことふれておきたい．

これまでの議論からわかるように，波束のまわりに実現する平均流は，全く波束が占めている領域にのみ存在している．すなわち，波束の移動と共に刻々伝達されていくけれど，波が通りすぎればなくなってしまう．それ故，こうした状況では「波の運動量」が「基本場」へ輸送されたとはいいがたい．しかし，粘性があれば，波は次第につぶされていくので，波の運動量は基本場にのこされていく．つまり，平均運動量が波からはぎとられていって，もはや波に付随しない．Bretherton にならって「簿記」として考えれば，波と基本流に仕訳された運動量台帳では粘性による波のエネルギー散逸と共に刻一刻運動量は波の側から基本流の側へ「移算（transfer）」される――といえよう．

3・3　シアー流中の伝播

場にもともと流れがあって，それが高さと共に変化しているとき，前節までの結果は，どのように改変されるだろうか．殊に，波の水平位相速度と基本流速が一致する高さ，いわゆるクリティカル・レベル（critical level）では波が吸収されるといわれているが，それはどういうからくりでおこるのだろうか．ここでは，これらの事柄について大筋を考えてみよう．

問題をあつかいやすくするために，いくつか仮定をおこう．流体は，前節と同様，成層した非圧縮性・非粘性流体とする．基本流 U_0 は，高さ z だけの函数で，水平面内では一様とする．$U_0(z)$ の変化の仕方は，波の特徴的なスケールにくらべてはるかにゆっくりしているとしよう．つまり，‘ゆっくり変数’ Z の函数である．これは，いいかえれば，$U_0(Z)$ は局所的（鉛直に一波長や二波長の間は）には，一様とみなせる程度にゆっくり変化していて，それゆえ波もまた局所的には正弦型をしていると考えてよいとすることを意味している．しかし大切なことは，この場合，鉛直波数 n（したがって周波数σ）はもはや一定ではなく，$U_0(Z)$ と同程度のスケールで変化することである．

さて，前節でおこなったような，系統的な逐次近似をしていけば，パラメタ ε の0次で分散関係式が，1次のオーダーで振幅変化を与える式がえられるわけであるが，ここでは少々粗っぽいけれどわかりやすい方法で，必要な方程式を導くことにする．

まず，$U_0(Z)$ は局所的には一様とみなしてよいという仮定に基いて，波が正弦型をしているとすれば，地上の観測者には，静止流体中でえられた周波数が局所的な $U_0(Z)$ によってドップラー・シフトしたものが感知されるはずである．つまり

$$\text{内部重力波：}\sigma=-kU_0\pm\frac{k}{\sqrt{k^2+n^2}} \tag{3-57}$$

$$\text{プラネタリー波：}\sigma=-kU_0+\beta k/(k^2+\pi^2+n^2) \tag{3-57$'$}$$

しかし，大局的にみたとき，U_0 が Z の函数となっていることを忘れてはならない．鉛直群速度 C_g も局所的に次のように定義される．

$$\text{内部重力波：}C_g=\frac{n(\sigma+kU_0)}{k^2+n^2} \tag{3-58}$$

$$\text{プラネタリー波：}C_g=\frac{2n(\sigma+kU_0)}{k^2+\pi^2+n^2} \tag{3-58$'$}$$

さて，σ，n は波の伝播過程でゆっくり変化するが，その変化具合をしらべてみよう．そのために，「波の数（山や谷の数）は，伝播途中で一定に保たれる」という仮定をおこう．そこで，高さ Z で周波数 σ であった波が，δT 時間後に $Z+\delta Z$ に移動するとすれば，その間に間隔 δz 中に流れこんだ波の数は

$$\left[\sigma-\left(\sigma+\frac{\partial\sigma}{\partial z}\delta z\right)\right]\delta T=-\frac{\partial\sigma}{\partial z}\delta z\ \delta T$$

である．他方，δT の間に δZ の中で増加する波の数は，

$$\left[\left(n+\frac{\partial n}{\partial T}\delta T\right)-n\right]\delta Z=\frac{\partial n}{\partial T}\delta T\ \delta Z$$

で与えられるから，結局，次の関係が成り立つ．

$$\frac{\partial n}{\partial T}+\frac{\partial\sigma}{\partial Z}=0 \tag{3-59}$$

局所的分散式（3-57，57′）を

$$\sigma=\Omega(k,\ n,\ Z),\ \left(C_g=\frac{\partial\Omega}{\partial n}\right)$$

と書くと，これは時間 T を陽には含んでいない．それゆえ，

$$\frac{\partial\sigma}{\partial T}=\frac{\partial\Omega}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial T}=-\frac{\partial\Omega}{\partial n}\frac{\partial\sigma}{\partial Z}$$

$$\therefore\ \frac{\partial\sigma}{\partial T}+C_g\frac{\partial\sigma}{\partial Z}=0 \qquad (3\text{-}60)^{(*)}$$

がえられる．つまり，周波数 σ は，局所的群速度 C^G で動く観測者には保存されるわけである．もし Ω が T を陽に含むと，σ は保存しなくなる．それはたとえば基本流 U_0 が時間の函数でもある場合である．

(3-60) は，(3-59) という一般的だけれど全く kinematic な保存則によって導かれたものだから，波の振幅変化については何ごとも物語らない．

振幅変化の方程式を得るには，運動方程式にたちかえって考えねばならないが，前節でみたように，その方程式は結局エネルギー方程式に帰着された．それで，ここでは直接エネルギー方程式から出発しよう．波の運動方程式，断熱方程式，連続の式をたて，それらを組み合わせれば，よく知られた次のようなエネルギー方程式がえられる．

$$\text{内部重力波}:\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\overline{p'w'}+\overline{u'w'}\frac{\partial U_0}{\partial z}=0 \qquad (3\text{-}61)$$

$$\text{プラネタリー波}:\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}<p'w'>+<v'\rho'>\frac{\partial U_0}{\partial z}=0 \qquad (3\text{-}61')$$

ただし，E は内部重力波では (3-14)，プラネタリー波では (3-35) で定義されたエネルギー密度である．ところで，U_0 (Z) の変化の仕方が波のスケールにくらべてはるかにゆっくりしているという仮定によって，$\overline{p'w'}$ などを求めるときには，波の運動方程式の中では，U_0 はあたかも一様流であるかのようにとりあつかうことができる．そうすれば，前節の静止流体中でえられた結果において σ を $\sigma+kU_0$ とおきかえればよいことになる．すなわち，

$$\text{内部重力波}:\overline{u'w'}=-\frac{k}{\sigma+kU_0}\overline{p'w'} \qquad (3\text{-}62)$$

$$\overline{p'w'}=C_gE^{(0)}$$

$$\text{プラネタリー波}:<\overline{v'\rho'}>=-\frac{k}{\sigma+kU_0}<\overline{p'w'}>$$

$$<\overline{p'w'}>=C_gE^{(0)} \qquad (3\text{-}63)$$

が，たちどころにえられる．したがって，エネルギー方程式 (3-61) と (3-61′) は共に

$$\frac{\partial E^{(0)}}{\partial T}+\frac{\partial}{\partial Z}C_gE^{(0)}-\frac{k}{\sigma+kU_0}C_gE^{(0)}\frac{dU_0}{dZ}=0 \qquad (3\text{-}64)$$

となる．一様流又は静止流体中とはちがって，波のエネルギー $E^{(0)}$ は保存しない．第3項は，通常，基本流 U_0 と波とのエネルギー交換を示す項として解釈されている．だが，おもしろいのは，この項は，基本流の勾配 dU_0/dZ にさからう，波の運動量 $kE^{(0)}/(\sigma+kU_0)$ (又は $E^{(0)}/(U_0-C)$) の輸送を示していることである．

(3-64) を，(3-60) を利用して変形すれば，

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{E^{(0)}}{\sigma+kU_0}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{C_gE^{(0)}}{\sigma+kU_0}\right)=0 \qquad (3\text{-}65)$$

がえられる．

かくして，基本流が高さと共に変化している流体中を，プラネタリー波や内部重力波が鉛直に伝わるときには，波のエネルギー $E^{(0)}$ は保存せず，$E^{(0)}/\sigma+kU$ 又は $E^{(0)}(U_0-C)$ (k は一定だから) が保存される．$\sigma+kU_0(\equiv\sigma)$ は，流体に相対的な周波数であるが，σ が伝播途中で保存されるのと異なって，σ' はゆっくり変化する．同時に $E^{(0)}$ もゆっくり変化して，$E^{(0)}/\sigma'$ が全体として保存されることになる．逆にいえば，$E^{(0)}/\sigma'$ が保存されるように $E^{(0)}$ も σ' も共に変化するわけである．

$E^{(0)}/\sigma'$ は「作用」の次元をもっている．一般に，固有振動している系の運動の条件が変化するとき，系のエネルギーと周波数の比（作用）が保存されることは解析力学でよく知られている．つまり，作用変数はその系の断熱不変量である．具体的には，単振り子のひもの長さがゆっくりと（周期にくらべてはるかに大きな時間スケールで）変化するとき，あるいは荷電粒子のラーマー運動で磁場がゆっくり変化するときなどは，しばしばひきあいに出される例である．今の問題では，「運動の条件」の変化は U_0 の分布の仕方できまる．なぜなら，波束が群速度で伝わりながら次々異なる大きさの U_0 に出会うということは，波束からみると，まわりの流れ（運動の条件）が刻一刻変化していることを意味しているから．仮定は，その変化がゆっくりしているとするわけである．それゆえ，$E^{(0)}/\sigma'$ は上に掲げた例におけるのと同

(*) n については，

$$\frac{\partial\sigma}{\partial z}=\frac{\partial\Omega}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial Z}+\frac{\partial\Omega}{\partial Z}=C_g\frac{\partial n}{\partial Z}+\frac{\partial\Omega}{\partial Z}$$

$$\therefore\frac{\partial n}{\partial T}=C_g\frac{\partial n}{\partial Z}=-\frac{\partial\Omega}{\partial Z}$$

となって，n は保存しない．

じ意味で断熱不変量とよんでよい．これを「波の作用」(wave action)」とよんでおこう．

クリティカル・レベルは，$\sigma'=\sigma+kU_0=0$（又は $U_0-C=0$）となる高さであるが，そこでは（3-62）が成り立たないことは明らかである．このことは，運動の条件が変化するとき，位相空間内で周期が無限大となる点を通過するような場合，断熱不変量が存在しないということに対応している．つまり，クリティカル・レベルでは，流体に相対的な波の周期 $2\pi/\sigma'$ が無限大となって，「基本流の変化の仕方が波にくらべてはるかにゆっくりしている」という仮定がもはや成り立たなくなる．

分散関係（3-57, 57′）によれば，クリティカル・レベルに近づくにつれて，$\sigma+kU_0\to0$ となるから，$n\to\infty$ となることがわかる．ゆえに，クリティカル・レベルの近くでは鉛直波長に無限に小さくなってきて，波面は次第に水平になってくる．また，$Z=Z_c$ で $\sigma+kU_0=0$ となるとすれば，その近くでは

$$\text{内部重力波}：n^2=\frac{k^2}{(\sigma+kU_0)^2}-k^2\sim(Z-Z_c)^{-2}$$

$$\text{プラネタリー波}：n^2=\frac{\beta k}{\sigma+kU_0}-(k^2+\pi^2)\sim(Z-Z_c)^{-1}$$

となり，鉛直群速度 C_g は，

$$\text{内部重力波}：C_g=\frac{n(\sigma+kU_0)}{k^2+n^2}\sim(Z-Z_c)^2$$

$$\text{プラネタリー波}：C_g=\frac{2n(\sigma+kU_0)}{(k^2+\pi^2+n^2)}\sim(Z-Z_c)^{+3/2}$$

である．したがって，波束がクリティカル・レベルに到達するには無限大の時間を要する．いいかえれば，波束はクリティカル・レベルに無限に長く滞在することになる．かくて，波束はそこで反射もされないし通過もしない．その意味で「吸収」される．これは，エネルギー散逸による本来の吸収とは全く異る．しかし，流体がどんなに小さくとも粘性をもっていれば，クリティカル・レベルでその効果が大きくあらわれる．なぜならそこでは波の滞在時間が無限に長くしたがって波は次第につぶされていくからである．それゆえに，クリティカル・レベルでの「吸収」は粘性散逸による吸収と区別がつかなくなる．

さて，2次の平均流 U を求めよう．すでに述べたように，基本流 U_0 は局所的には一様と考えてよいから，U を求めるに必要な2次のオーダーの量は，一様流の場合の解を用いて計算すればよい．すなわち，静止流体で得られた結果で周波数に kU_0 をつけ加えておけばよろしい．したがって，（3-48）の代りに，

$$\frac{\partial}{\partial T}\langle U^{(0)}\rangle=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{C_gkE^{(0)}}{\sigma+kU_0}\right)=\frac{\sigma}{\partial Z}\left(\frac{C_gE^{(0)}}{U_0-C}\right)\qquad(3-66)$$

がえられる．

（3-65）および（3-66）はクリティカル・レベルでは成り立たないけれど，その付近での定性的な議論には役に立つ．クリティカル・レベルでの平均流の加速は，その付近に波束が無限に長く滞在するために，そこで「波の運動量」の集積がおこることの結果であるといえる．すでに述べたように，波はクリティカル・レベルを横切ることも，そこで反射されることもなく，そこにただじっとしているから，流体にどんなに小さくとも粘性があれば，次第につぶされていくので，「波の運動量」は非可逆的に基本流の方へ輸送されることになる．

4. エネルギー論へのコメント

前章でもちょっとふれたように，「波による平均流の加速」といえば，系のエネルギーを「波のエネルギー」と「平均流のエネルギー」に分けて，それらの間のやりとりによって説明しようという立場がありうる．その種のエネルギー論はよく見かけるし馴じまれているようにみえる．確に，「波」と「平均流」が一定の平均操作によって分離されるのに基いて，エネルギーも分けて考えようというのはなりゆきであるし，わかりやすく思われないこともない．しかし，ほんとうのところ，2次のオーダーの量をきちんと勘定に入れてつくったエネルギー方程式の各項について，これは「波」に属する，あれは「平均流」に属するというような「仕訳」がうまくいくものだろうか．前章で明らかになったように，波は自分のまわりに2次の平均流を伴いながら伝わっていく．このことはすでに「波」と「平均流」をエネルギー的に分けて考えることがうまくないことを示している．ここではもう少し詳しく上のようなエネルギー論のもつ問題点を検討しよう．問題は，系のエネルギーを「波」と「平均流」に仕訳する，いわば「簿記」である．

「波」と「平均流」のエネルギー貸借対照表をきちんとつくるには，「波のエネルギー」や「平均流のエネルギー」がどのように構成される概念であるかをはっきりさせておかねばならない．繰り返しをおそれず，「波のエネルギー」から検討する（なお，内部重力波の場合に限って話をすすめる）．

「波」は「基本状態」からの「ずれ」として定義され，

「ずれ」の大きさ（振幅）に関して1次のオーダー（線型）の方程式系で記述できると仮定される．また「ずれ」それ自身は「平均値」（一周期又は一波長にわたる）は0とされる．そうすれば，「波のエネルギー」E は，1次の量の自乗平均（それゆえ2次のオーダー）として一意に定義できて，E の従う方程式（波のエネルギー方程式）は0次の量としての「基本状態」のパラメタを係数とする，2次のオーダーの方程式となる．それが（3-61）である．再記すれば，

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\overline{p'w'}+\overline{u'w'}\frac{\partial U_0}{\partial z}=0 \qquad (4\text{-}1)$$

$\overline{p'w'}$ は通常「波のエネルギー流束」と呼ばれ，第3項は「基本流」ないし「平均流」との相互作用を表わしている．ここまでは普通おこなわれていることで問題はないかにみえる．しかし，方程式（4-1）には見逃せない特徴が2つある．1つは単独な2次の量（の平均値）が含まれていないことである．具体的にいえば，前章で一所懸命論じてきた「波に伴う2次の平均流」U は，波の振幅つまり「波のエネルギー」E によって全面的に規定されるにもかかわらず，（4-1）には含まれていない．このような量は，波を記述する1次のオーダーの方程式系には初めから含まれていないからである．もう1つの特徴は，（4-1）が地面に対して一様な速さで動く座標系からみても同じ形をとる，つまりガリレイ変換に対して不変ということである．これら2つの特徴は，後で述べるように，系のエネルギーを考えるさいに重要になる．

さて，（4-1）をみると「波のエネルギー」は $\overline{u'w'}\cdot\partial U_0/\partial z$ を通して「平均流」の方へ流れているわけであるが，そうすると「波のエネルギー流束」としては $\overline{p'w'}$ だけでは不十分ではないかという疑問が生じる（U_0 がないときはむろんこれでよかった）．実際，次のような考え方が成り立ちうる．定常状態を考えよう．そのとき，（4-1）は

$$\frac{\partial\overline{p'w'}}{\partial z}+\overline{u'w'}\frac{\partial U_0}{\partial z}=0 \qquad (4\text{-}1')$$

となる．第2項は一般に0ではないから，「波のエネルギー流束」$\overline{p'w'}$ の発散が0ではなくなり，「平均流」にエネルギーの流入があることになる．それは「平均流」になんらかの変化がおこることを意味しているが，定常状態ではそういうことがあってはならない．このみかけ上の矛盾を避けるには，次のように考えるとよい．定常状態では

$$\frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'}=0$$

が正確に証明できる（Eliassen & Palm, 1961, その他）から，エネルギー方程式を変形して

$$\frac{\partial}{\partial z}(\overline{p'w'}+U_0\overline{u'w'})=U_0\frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z}$$

としておけば右辺は0である．左辺

$$F=\overline{p'w'}+U_0\overline{u'w'} \qquad (4\text{-}2)$$

をみると，これは波に伴う圧力変動による仕事と運動エネルギーの波による垂直輸送（$1/2\overline{(U_0+u')^2w'}\doteqdot U_0\overline{u'w'}$）の和になっている(*)．そこで，$E$ を「波の（全）エネルギー流束」と解釈すれば，その発散が0であるから，「平均流」にも何らの影響はないことになって合理的である．

こうしてみると，「波のエネルギー流束」としては $\overline{p'w'}$ ではなく F をとる方がよいようにみえる．だが果してそうか．F は明らかに鉛直方向のエネルギー流束だから，これを「波」によるものとみなすならば，波の励起源が下層にある場合には正，上層にある場合には負とならなくてはならない．今，水平位相速度 C（>0）の内部重力波が鉛直に伝わるときを考えよう．そうすると，（3-62）と（3-63）とから

$$\overline{p'w'}=C_gE=-(U_0-C)\,\overline{u'w'} \qquad (4\text{-}3)$$

$$F\equiv\overline{p'w'}+U_0\overline{u'w'}=-\frac{C}{U_0-C}\overline{p'w'}$$

$$=-\frac{CE}{U_0-C}C_g \qquad (4\text{-}4)$$

がえられる．

（4-4）の示すところは，$\overline{p'w'}$ は鉛直群速度 C_g とつねに同じ向きである．下層に波源があれば $C_g>0$，すなわち $\overline{p'w'}>0$．上層ならば，$\overline{p'w'}<0$．ところが，下層で波が励起された（$C_g>0$）としても，F の符号は正となるとはかぎらず，U_0-C の符号によって変る．すなわち，波の位相が「基本流」U_0 に相対的に西向き（$C<U_0$）ならば $F<0$，U_0 に相対的に東向き（$C>U_0$）ならば $F>0$．したがって，F の向きは，$\overline{p'w'}$ のそれとは異って波束の向きと一意な対応をもたず，見かけ上因果律に反する結果をもたらすことがある．いいかえれば，F 向きだけでは波源が下にあるか上にあるかは決められない．

また，上に述べたことと本質的に同じことだが，F の符号は座標系に依存する．たとえば，地面に固定した座

(*) 波によるポテンシャル・エネルギーの輸送 $\overline{(H+\zeta')w'}\doteqdot\overline{w'\zeta'}$ は内部重力波では0である（H は粒子のもとの高さ，ζ' はずれ）．

標系で $F<0$ であっても，地面に対して波の位相速度 C より大きい速さで東へ動く座標系にうつれば，分母 U_0-C は符号を変えないが，分子 C はその座標系に対しては負となって F の符号は逆転する．

以上のようなわけで，Fを「波のエネルギー流束」と解釈すると，まことにやっかいなことになる．むろん，個人の好みの問題だから，そういう解釈の正否をいうことはできないが，Fを「波」の側に記帳するときには，よく考えた上でないと誤った結論に至る可能性がある．その点，$\overline{p'w'}$ は鉛直群速度と同じ向きであるから，「波」の側につけるのはこれの方がよいように思われる．では，定常状態では $\overline{p'w'}$ の発散が0でなくて，F の発散が0ということは，どのように考えればよいだろうか．また，U_0 と C の大小関係や座標系のえらび方で F の向きが変ることはどのように理解したらよいだろうか．

そこで，「系のエネルギー」方程式をつくることにしよう．「平均流」U_0 がある．これの（運動）エネルギーは $1/2\ U_0^2$ であるが，これに「波のエネルギー」E を加えれば「系のエネルギー」になるかといえばそうはならない（ここでは，基本場のポテンシャル・エネルギーは考えなくてよい）．なぜなら，「波に伴う2次の平均流」U が勘定に入っていないからである．すなわち，「系のエネルギー」を2次のオーダーまで正しく表わすには，「平均流のエネルギー」は $1/2(U_0+U)^2$ としなくてはならない．ここで留意すべきは，「平均流のエネルギー」は，動く座標からみれば大きさが変るということである．今，U_0 を一様とすれば，U_0 で動く座標系の観測者には，2次のオーダーでは「平均流のエネルギー」はなく，「系のエネルギー」は E になってしまう．このあいまいさが，エネルギー論にはつきまとってはなれない．

次に，鉛直エネルギー流束を求めよう．それは上向きの圧力による仕事と力学的エネルギーの上向き輸送の和である．そうすると2次のオーダーまでとれば

$$\text{エネルギー流束}=\overline{p'w'}+U_0\overline{u'w'}\equiv F \qquad (4\text{-}5)$$

となる（ここでは，2次の平均上昇流 $W=0$，w' と流体粒子の鉛直変位 ζ' が 90° の位相差をもつことなどが考慮されている）．そうすると，「系のエネルギー保存則」として

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}(U_0+U)^2+E\right]+\frac{\partial}{\partial z}[\overline{p'w'}+U_0\overline{u'w'}]=0 \qquad (4\text{-}6)$$

がえられる（内部重力波の場合，平均場のポテンシャル・エネルギーはエネルギー方程式に入ってこない）．

こうしてみると，Fは「波」の効果も含めた「系のエネルギー流束」と考えた方がよい．そうすれば，$F<0$ は「系のエネルギー流束」が下向きということになり，上層がエネルギーを失って下層がその分だけもらうことになる．しかしすでにみたように，Fの向きは「原因」のありかを示してはいない．$F<0$ は，上層大気が下層大気に仕事をしていることを意味しているだけで，それが何によってもたらされているかはこのままではわからない．この曖昧さの源は，要するに，エネルギー流束 F あるいは方程式（4-6）がガリレイ変換に対して不変な形をしていないところにある．

そこで，方程式（4-6）から「波のエネルギー」方程式（4-1）を差しひけば，

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}=0 \qquad (4\text{-}7)$$

がえられる．これはとりもなおさず「平均運動（量）方程式」であり，むろんガリレイ変換に対して不変である．(4-7) を得るにはあるいは次のように考えてもよい．(4-6) にはガリレイ変換に対して不変な部分とそうでない部分が含まれている．それゆえ，可変ないくつかの項はそれらの間でバランスしていなくてはならない．それを示すのが（4-7）である．いずれにしても，「基本流」がある系でたてられたエネルギー方程式は，運動量方程式を含んでいるということである．このことは，2つの球の衝突過程を動く座標系でみたときのエネルギー保存則のことを思い出せばただち納得できる．

さて，$C_g>0$ であっても，$U_0>C$（波の位相が U_0 に相対的に西に動く）ときには $F<0$ となることは，(4-7) に基づけばただちに理解できる．波が上方に伝わるとき（$\overline{p'w'}>0$），それに伴う運動量流束 $\overline{u'w'}$ は，(4-3) からわかるように，$U_0>C$ ならば負となっていて，エネルギー流束 $U_0\overline{u'w'}$ が $\overline{p'w'}$ を上まわって負となっているわけである．すなわち，波の先端部では振幅が減少しており，その結果 $\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}>0$ となってその付近の平均流は減速される．同時にしっぽの付近では逆に $\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}<0$ となっていて，平均流は加速される．この過程をエネルギーでみるならば，2通りのいい方ができよう．Fを「系のエネルギー流束」とみなすとすれば，波はその先端部付近の流体層に向って $\overline{p'w'}$ によって投入するエネルギーよりも大きいものを．$U_0\overline{u'w'}$ によってしっぽ付近の流体層に向ってひきずりおろす．結果として系のエネルギー流束は下向きとなり，上層は平均的にエネルギーを失い下層はその分だけエネルギーを得る．また，「波

のエネルギー」と「平均流のエネルギー」という分け方にこだわるならば，今の場合，波はそのひがりがの全域にわたって平均流からエネルギーをもらっており，それゆえ平均流は波のないときにくらべて遅くなっていて，波の上方への移動と共に先端部付近では「平均流のエネルギー」は失われ，しっぽ付近では「波のエネルギー」が平均流の側へ流れていく——といえる．

こうして，結果的には上層と下層のエネルギー交換に介在するのが $U_0\overline{u'w'}$ というエネルギー流束であるが，これによって担われたエネルギーは散逸に寄与することはありえない．なぜならこれは座標に依存する量だから．たとえば，ある粘性散逸層に波が下から入射するとき，その層は (4-7) によって加速ないし減速されるが，それに応じた平均流のエネルギー変化は下層の減速ないし加速としてあらわれることになる．これをエネルギーで考えれば，$U_0\overline{u'w'}$ の形のエネルギー流束による上・下層のエネルギー交換である．要するに，本質的には運動量の輸送過程なのである．

クリティカル・レベルにおける「平均流の加速」も，これまで述べてきた波の先端部における加速がより激しくあらわれると思えばよい．そのレベルに波が下から入射するとき，$\overline{p'w'}$ はどこでも正だけれど，(4-3)からわかるように，$\overline{u'w'}$ は $U_0=C$ を境にして符号を変えるので，運動量がクリティカル・レベルに集中することになる．エネルギーでみると，$\overline{p'w'}+U_0\overline{u'w'}$ は $U_0=C$ をはさんで下では上向き，上では下向きとなって，クリティカル・レベルの上下の流体層はそのレベルに向って仕事をする（上層では波の振幅は事実上0となってしまうが）．それで下層の流体は平均的に減速される．また，「波のエネルギー」方程式を波束のひろがりにわたって積分してみるとわかるように，波束につめこまれた波のエネルギーはクリティカル・レベルに近づくにつれて減少していく．その分だけ，「平均流のエネルギー」が増加することになる．

しかしここでことわっておかねばならないのは，波が「基本流」U_0 の中を伝わるとき2次の平均流 U をつくり出す過程は「可逆的」であって，波の通過と共には消えうせるから，ほんとうのところ「波のエネルギー」が「平均流のエネルギー」に「輸送」又は「転化」されたとはいいがたいということである．U はあくまでも波と一体なのである．

なお，定常状態では $F=\overline{p'w'}+U_0\overline{u'w'}$ の発散が0ということは，F を「系のエネルギー流束」とみなせば，どのレベルをとってもその発散が0となっていて，エネルギー交換がおこらないわけでつじつまはあっている．そのさい，$U_0\overline{u'w'}$ はいわば平均流の「反作用」のようなもので，$\overline{p'w'}$ によるエネルギーの投入を $U_0\overline{u'w'}$ がたちどころに打ち消して，「定常」という拘束条件をみたしているわけである．F を「波のエネルギー流束」と考えるならば，それはそれでよい—transient wave の場合におこってくる混乱をちゃんと勘定に入れておれば．

以上，エネルギー論をあれこれ考えてきたが，その過程でわかったことは，エネルギー論というものが，結局，あまり生産的ではないということである．エネルギーを「波のエネルギー」と「平均流のエネルギー」とに分けて考えるとき，エネルギー流束として $\overline{p'w'}$ 以外に $U_0\overline{u'w'}$ があらわれて，何を波の側に記帳し，何を平均流の側に書き込むかが問題である．$F=\overline{p'w'}+U_0\overline{u'w'}$ を「波のエネルギー流束」とみなすときには，$C_g>0$ のときにも $F<0$ となることがあって注意を要する．F を「系のエネルギー流束」とみなしても，$F<0$ を理解するには，運動量の輸送過程に基いて考えねばならなかった．いいかえれば，運動量輸送に伴う平均流の変化が，エネルギーでみてもつじつまがあっていることを示したにすぎない．また，群速度と同じ向きをもつ $\overline{p'w'}$ を「波のエネルギー流束」と考える立場をとっても，2次の平均流 U が波ときりはなして考えられないために——そしてこれがちゃんとわかるには，運動量方程式 (4-7) たちかえって考えねばならない——「エネルギー簿記」の問題としてはやはり困ってしまう．

エネルギー保存はいうまでもなく第一義的な拘束条件であるが，「エネルギー論」それ自身は必ずしも問題をときほぐす導きの糸にはなりえない——ことがある．

最後に蛇足ながら，シアー流中で「波の作用」$E/(\sigma+kU_0)$ が保存することをエネルギーで考えると次のようにいえよう．U_0 という流れの中では，流れがないときの「波のエネルギー」E に，「波の運動量」(又は「平均運動量」) $E/(C-U_0)$ が U_0 で流されるものが加算されて，地上の観測者には感知される．

$$E'=E+\frac{E}{C-U_0}U_0=\frac{C}{C-U_0}E=\frac{\sigma}{\sigma+kU_0}E$$

U_0 が時間の函数でなければ σ は一定だから，E' は保存される．E' を「波のエネルギー」と呼んでもよいが，これに対応するエネルギー流束はいうまでもなく F だから，すでに述べたように色々と注意を要することになる．

5. おわりに

これまで,「波による平均流の加速」というたったひとつのことをめぐってあれこれ論じてきたが,いささか冗長になってしまった.問題がトリッキーなため混乱することがしばしばで,冗長さはその悪戦苦斗の結果として御寛容願いたい.

第3章は筆者の「気象集誌」掲載の論文と同じ形式になってしまったが,最初のもくろみではもっと違ったものにするはずであった.決して難しいことではないのだが,沖縄(AMTEX)から帰って健康を害してしまい,その気力がなくなってしまった.また,ここで論じたことを固体にも適用すれば,いろいろおもしろいことがあるにちがいない.そんなことも考えてみたかったが,力不足・勉強不足に加えて健康上の理由があって果せなかった.身体の不調子とはおそろしいものである.

なお,McIntyre からの手紙によれば,彼と Andrews は「波による平均流の加速」に関する一般論をやっているとのことであるが,今のところ未完成のようである(1975年10月26日現在).

＜謝辞＞

筆者の愚問にいつも快く応じて下さり,楽しい議論の中で沢山のことを教えて頂く,東大・松野太郎先生に心から感謝致します.殊に,第4章は先生の勧めで書き加えたものです.「準2年振動」や「突然昇温」の理論が,通常の気象力学の教科書にみられるような「エネルギー論」を表面に押しださずに組みたてられているところは,気づいていられる方も多いと思いますが,わたしには大変おもしろく感ぜられます.

また,わたしの議論を聞いては親切な助言と批判を下さる,九大・沢田竜吉先生に心からお礼申し上げます.さらに,いつも楽しく議論の相手をして頂いている,九大・宮原三郎氏に深く感謝致します.

この原稿は福岡での学会の折開かれた若手会で喋ったことをもとにしていますが,完成が遅れてしまい,若手会幹事の東大の中村さんやすでに早く原稿を完成されていた東大海洋研究所の木村さんに多大の御迷惑をおかけ致しました.両氏にお詫び申し上げると共に気長に待って頂いたことへ深く感謝する次第です.また,このいささか非常識にさえみえるほどに長い原稿の掲載を許可して頂いた「天気」編集部の方々へお礼申し上げます.

参考文献

Booker, J.R., and F.P. Bretherton, 1967: The critical layer for internal gravity waves in a shear flow, J. Fluid Mech., 27, 513-529.

Bretherton, F.P., 1967: The propagation of groups of internal gravity waves in a shear flow. Quart. J. Roy, Meteor. Soc., 92, 466-480.

Bretherton, F.P., 1969 (a): Momentum transport by gravity waves. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 95, 213-243.

Bretherton, F.P, 1969(b): On the mean motion induced by internal gravity waves. J. Fluid Mech., 36, 785-802.

Charney, J.G. and P.G. Drazin, 1961: Propagation of planetary-scale disturbances from the lower into the upper atmosphere. J. Geophys. Res., 66, 83-110.

Eliassen, A. and E. Palm, 1961: On the transfer of energy in stationary mountation wares. Geotys. Publikajoner, 3, 1-23.

Gilman, P., 1972: Nonlinear Boussinesq of convective model for large-scale solar circulations. Solar Phys., 27, 3-26.

Holton, J.R., 1974: Forcing of mean flows by stationary waves. J. Atmos. Sci., 31, 942-945.

Lindzen, R.S. and J.R. Holton, 1968: A theory of the quasi-biennial oscillation. J. Atmos. Sci., 25, 1095-1107.

Longuet-Higgins, M.S. and R.W. Stewart, 1961: On the changes in amplitudes of short gravity waves on steady non-uniform currents. J. Fluid Mech., 10, 529-549.

McIntyre, M.E., 1973: Mean motions and impulse of guided internal gravity wave packet. J. Fluid Mech., 60, 801-811.

McIntyre, M.E., 1974: Proceeding of IAMAP Internationae Conference.

Matsuno, T., 1971: A dynamical model of the stratospheric sudden warming. J. Atmos. Sci., 28, 1479-1494.

Uryu, M., 1973: On the transport of energy and momentum in stationary waves in a rotating stratified fluid. J. Meteor. Soc. Japan., 51, 86-92.

Uryu, M, 1974: Induction and transmission of mean zonal flow by quasi-geostrophic disturbances. J. Meteor. Soc., Japan., 52, 341-364.

Uryu, M., 1974: Mean zonal flows induced by a vertically propagating Rossby wave packet. J. Meteor. Soc. Japan., 52, 481-490.

Uryu, M., 1975: On the mean motions induced around a planetary wave packet on a rotating sphere. J. Meteor. Soc. Jpan, 53, 45-54.