

臨 界 層 不 安 定*

— 臨 界 層 概 念 の 拡 張 —

田 中 浩**

1. はじめに

乱流の研究というものは、自分を振り返って考えると、蛇ににらまれた蛙にたとえることができそうである。何かしら強力な磁力で引きつけられているが、征服することは至難の業である。もうすでに10年以上も以前のことになるが、私が乱流の魅力にとりつかれて研究の第1歩を踏みだした時はまだこわいもの知らずであった。最初は乱流の統計理論から出発したのであるが、すぐに大きな壁にぶつかってしまい身動きがとれない状態になってしまった。眼を転じて大気境界層の乱流研究を見渡しても、半経験論的な考察の膨大な積重ねであり、その中のわずかな部分に関しては若干の貢献が可能であるにしても、私の知的好奇心をそそるほどの魅力は感じなかった。

そのような袋小路から脱出するにはどうすれば良いかということが当時の私自身の悩みであった。その悩みから解放されるには目先を変えてみることもっとも有効な手段であると考え、乱流研究の領域の中でもできるだけ統計理論から距離をおいたものにアタックしてみようと考えて不安定性の理論に活路を見出したのである。とは言ってもいざ具体的なテーマとなると皆目見当もつかなかったが、できる限り未知の領域に踏込んでみたいという好奇心から安定成層中の乱流の研究を開始した。

当時、音波レーダ（ソダ）による大気境界層中の観測によって、安定成層中にも乱流がかなり頻繁に発生するという事実に元気づけられて、この方面の理論的研究が将来新しい乱流理論の領域を開拓するのではないかと漠然とした期待をもっていた。

まず最初に私が手をつけた問題は平均場のリチャードソン数が $1/4$ より小さい場合であった。この条件は Miles (1961) 等がすでにシアーをもつ成層流体中の不安定性のための必要条件として求められたものであって、私自身は線型理論、準線型理論、非線型理論の場合に分けて

初期値問題を時間積分することによって、擾乱の発達の状態を考察するのが主たる目的であった (Tanaka, 1975 a 参照)。このような条件で発達する擾乱はケルビン・ヘルムホルツ波 (K-H 波) と呼ばれているが、折りからの各種リモートセンシング技術による大気境界層中の観測の活発化とあいまって、安定成層中の K-H 波の形態学的特性を把握することができた。

しかしいっそう重要な問題はこの段階から始まるのである。それを一言でいえば“安定成層中になぜリチャードソン数が $1/4$ より小さくなる状態が形成されるのか?”ということである。考えられる理由の1つに平均風のシアーが何か外部的要因で大きくなることがあげられる。もちろんこのような現象も可能ではあるが、安定成層中で特にシアーが大きくなるという理由は常識的には考えにくい。何か他の原因で乱れが発生するのではないのか、という疑問が頭から去らなかった。

話は多少脇道にそれるが、私はいつのころからか自然の法則性というものに関して特別の考えをもつようになっていた。自然現象をトータルに考察するということはあまりにも複雑すぎて手に負えない。したがって自然の法則性を発見しようと思うならば、何らかの極限状態を考えることによって逆に極限状態でない場合の理解も可能になるのではないかという考えである。たとえば乱流理論でいえばコロモゴロフの慣性小領域の理論はまさにその典型であるように思える。その他にも偉大な理論には極限の概念を含むものが数多く存在することも発見した。その種の理論の中に Bretherton (1966) や Booker・Bretherton (1967) によって発展させられた内部重力波の臨界層における吸収の問題があった。この理論は気象力学にとどまらず、海洋力学や宇宙物理学にも応用可能な近年まれに見る成果の1つであると考えられる。私は慣性小領域の理論と内部重力波吸収の理論の間に一脈通じるものを感じとっていた。後者は提唱されてから日も浅く、まだまだ研究の余地が残されているのではないかと考えられた。

* Critical layer instability

** H. Tanaka, 郵政省電波研究所。

2. 内部重力波の性質

大気中の波動には大別してロスビー波と重力波が存在するが、ここでは特に重力波をとりあげてそれが臨界層不安定の理論構築に際してどのような重要性をもっているかについて述べてみたい。内部重力波は重力場の中の安定成層中に生じる復元力のために発生し維持される内部波動であるが、対流圏では他の各種擾乱に比較して天気現象に与える影響が相対的に小さいという理由でむしろなおりにされてきた。しかしながら大気密度が小さくかつ強い静的安定度のために各種擾乱の発生が抑制される中層大気（成層圏，中間圏）においては内部重力波はロスビー波と同等以上の影響力を大気運動に及ぼしている。この意味で臨界層不安定の理論は一義的には中層大気に適用されるべきものではあるが、よく調べてみると対流圏にも内部重力波に関連する現象も新しく発見されてきた（田中，1975b 参照）。

内部重力波における復元力の特徴的な振動数を決定するものがプラント振動数 N で、流体の平均密度 $\bar{\rho}$ とその鉛直密度勾配 $\partial\bar{\rho}/\partial z$ から、

$$N^2 = -\frac{g}{\bar{\rho}} \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z} \quad (1)$$

のように与えられる。ここで g は重力定数である。平均場のリチャードソン数 \bar{R}_i はプラント振動数と平均シア $-\bar{u}_z$ から、 $\bar{R}_i = N^2/\bar{u}_z^2$ で与えられる。

内部重力波の鉛直速度成分 w に関する線型化された方程式は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 (w_{xx} + w_{zz}) - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \times (\bar{u}_{zz} w_x) + N^2 w_{xx} = 0 \quad (2)$$

となる（Bretherton, 1966）。ここで添字は微分をあらわしている。いま w が x 方向に正弦波であると仮定して、 $w = \hat{w}(z) \exp[ik(x-ct)]$ と置けば、方程式 (2) は z 方向だけの方程式に変換される。すなわち、

$$\hat{w}_{zz} + n^2 \hat{w} = 0 \quad (3)$$

$$n^2 = \frac{N^2}{(\bar{u}-c)^2} - \frac{\bar{u}_{zz}}{\bar{u}-c} - k^2 \quad (4)$$

となる。 k は波動の水平方向の波数、 n は鉛直方向の波数である。方程式 (3) はスコアラー方程式あるいはテイラー・ゴールドスタイン方程式と呼ばれシアをもつ安定成層流体中の不安定性の問題になじみの深いものである。 c は一般には複素数で、

$$c = c_r + ic_i \quad (5)$$

と置く。実数部 c_r は波動の位相伝播速度を、虚数部 c_i は不安定波の増幅率に関係しているが、ここでは中立波を扱うことにしているので $c_i = 0$ と仮定する。したがって $c = c_r$ であり、以後 c は総て実数であるとする。

平均風速と波動の位相速度が等しくなる、すなわち $\bar{u} = c$ となる場所を臨界層* (critical layer) と呼ぶ。われわれが問題にしているのは何らかの原因で発生した内部重力波が鉛直方向に伝播する過程で、それ自身の位相速度と同じ速さで吹いている風に遭遇したときどのような振舞を示すであろうかということである。このように強制的に内部重力波が与えられ、臨界層という特異点での振舞を数学的に求める問題は強制問題 (forcing problem) と呼ばれ、不安定性問題 (instability problem) における漸近枝の選択とは趣きを異にしている。不安定性問題がレイリーの時代から研究されてきた古典的テーマであるのに比べて、強制問題は10年前まではほとんど空白の状態であった。

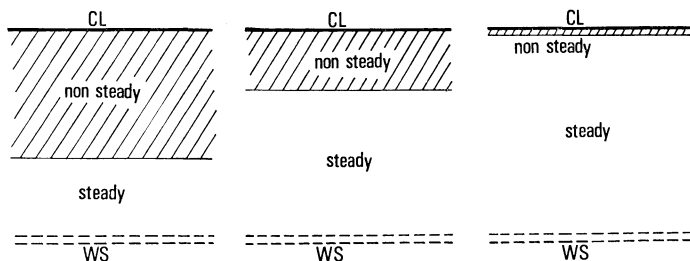
3. 内部重力波と臨界層不安定

シアをもつ安定成層中の不安定性の問題は枚挙にいとまのないほど研究されてきたが、その結論のうちで特筆されるものは、臨界層における平均場のリチャードソン数 \bar{R}_i が $1/4$ より小さい場合に不安定性が生じるための必要条件を与えるというものである。したがって $\bar{R}_i > 1/4$ ならば不安定は絶対に起こり得ない。 $\bar{R}_i < 1/4$ の場合でも不安定が常に起こるとは限らない。実際に不安定が生じるのは多分 \bar{R}_i が0にかかなり近づいてからであろう。

シアをもつ安定成層中を伝播する内部重力波の臨界層近傍における振舞を強制問題として最初に手がけたのは Bretherton (1966) である。彼の考察によれば内部重力波が臨界層に近づくにつれて鉛直波数が無限に大きくなるとともに群速度の鉛直成分が0に近づく。このようにして内部重力波は臨界層で平均場に凍結 (frozen) される。

内部重力波の強制問題の研究が遅れた理由として、線型化された方程式の採用が疑問視されていたことがあげ

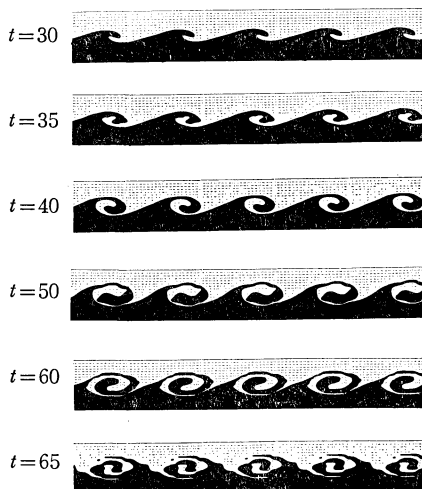
* 臨界層 (critical layer) という呼び方はもっと厳密に定義されている。 $\bar{u} = c$ となる高度をいう場合は臨界高度 (critical level) と呼ぶ方が正確である。臨界層は臨界高度を含む一定の厚さの層を意味し、その中ではレイノルズ応力 \overline{uw} が高さに対してすでに一定ではなく、粘性や非線型性が卓越する。この解説では、臨界層といういい方で両者の意味を含ませている。



第1図 波源を switch on したのち、波源付近から定常性が拡大し、非定常部分を駆逐してゆくありさま。CL および WS はそれぞれ臨界層および波源をあらわす。

られる。Booker・Bretherton (1967) の論文に示されているように、この問題を解析的に扱おうとすれば、一定振幅をもつ波源をある瞬間に与えなければならない。この場合内部重力波の鉛直伝播中に波動としての時間的定常性が保証される証拠は確認するすべもない。したがって波源の突然の出現のため非線型性が卓越して乱流化してしまうのではないかという危惧があった。しかし波源の振幅を十分小さくすれば線型方程式系を使用しても基本的には不都合は起こらないだろうというのが Bretherton 等の考え方である。その場合は第1図に示されるように波源を switch on してからしだいに波源近傍から定常になり、非定常な部分はしだいに薄くなってゆく。一定振幅の波源が無限に続くとこの非定常部分は臨界層の近傍で無限に薄くなってゆく。このような経過をたどって臨界層がビルドアップされる。Switch on した波源の振幅が大きすぎると、この過程を経ずに波源から乱流化されて臨界層をも飲込んでしまう。

波源の振幅が十分小さくて、大体において線型理論が成立つと考えられる場合でも、臨界層の極く近傍ではやはり不安定が起こると考えるのはもっともらしい推論である。鉛直方向の波長は臨界層近傍では非常に小さくなるが、波動の振幅はほぼ一定に保存されるため、サンドイッチのように薄い層の中で相対的に大きな振幅をもつようになり、大きなシアが生じることになる。いま流体は非粘性であると仮定すれば、粘性による抑制がないために必然的に不安定化することになる。つぎに粘性が存在する場合を考えてみよう。この場合は波動の鉛直方向の波長が粘性の影響する厚さより薄くなると抑制効果が働いて不安定化しない。粘性の影響が現われる以前にすでに不安定化が起きている可能性がある。このことは不安定化現象が粘性によって大きく左右されることを意味する。Bretherton 等は不安定化の発生よりも粘性の抑制効果の方が大きいと期待していたように考えられる



第2図 発達する K-H 波に伴う温度のパターンの時間変化 ($\bar{R}_i=0.1$) (Tanaka, 1975 a)。

が、それでも乱流化を完全に否定したわけではなかった。

流体に粘性がわずかでも存在すれば臨界層で内部重力波の運動量は吸収されて平均流を加速することになる。ここで生じる大きな疑問は、はたして分子粘性だけで波動の運動量を平均場に有効に輸送できるかどうかである。この疑問に答えるべき確たる証拠は何もなく、やはり具体的に計算を実行してみなければならないということになった。

4. 線型定常問題による臨界層不安定

安定成層中といえども \bar{R}_i がその臨界値 $1/4$ より十分小さくなれば K-H 波のような不安定波が成長して乱れを発生することは頻繁に起こる現象である。Tanaka (1975 a) は $\bar{R}_i=0.1$ の場合について K-H 波の増幅過程を数値実験によって再現した(第2図参照)。しかし大気や海洋の安定成層中では \bar{R}_i が臨界値よりも大きい場合

がむしろ普通であるにもかかわらず、強い乱れが存在することが多い。そのような乱れの主な原因は内部重力波であり、発生のメカニズムとしてはつぎの2つが考えられる。

- (1) 大振幅内部重力波の砕波によるもの。
- (2) 小振幅内部重力波の臨界層近傍での砕波によるもの。

(1) のメカニズムの場合は必ずしも臨界層の存在を必要としない。もちろん臨界層が存在すればいっそう乱流化は効果的に進行するだろう。この問題は非線型性が大きく影響するために理論的に取扱うのが困難である。当面の興味の焦点は(2)のメカニズムであり、この解説の表題である“臨界層不安定”も、このような乱流発生機構を意味している。

ふたたび私事にわたるが、私が1973年秋から1年間米国のイリノイ大学に留学する機会に恵まれた時に、当大学の準教授をしていたゲラーさんや大学院生のフリッツさんとともにこの研究を開始したのである。彼等は主に線型定常問題の立場から、私は非線型初期値問題の立場からこのテーマに取組み、最終的には両者を総合して一般的な法則化を旨としたのである。この成果は Geller *et al.* (1975) および Tanaka (1975b) を参照されたい。

線型定常問題の場合、基本方程式は(3)、(4)そのものであり、もう1度まとめて書くと、

$$\hat{w}_{zz} + \left[\frac{N^2}{(\bar{u}-c)^2} - \frac{\bar{u}_{zz}}{\bar{u}-c} - k^2 \right] \hat{w} = 0 \quad (6)$$

となる。 N^2 は全域で一定とし、平均風速は、

$$\bar{u}(z) = \begin{cases} U_1 & -z_B \leq z < -l \quad (\text{region 1}) \\ mz + c & -l \leq z < l \quad (\text{region 2}) \\ U_3 & z \geq l \quad (\text{region 3}) \end{cases} \quad (7)$$

のように設定されている(第3図参照)。内部重力波の位相速度は $c = (U_3 + U_1)/2$ であり、 m は region 2 におけるシアで $(U_3 - U_1)/2l$ である。したがって $z=0$ が臨界層になる。 $z \rightarrow \infty$ での境界条件は放射条件 (radiation condition) を使う。各領域の境界である $z=l, -l$ では接続条件として、

$$\hat{w}_1 = \hat{w}_2, \quad \left. \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial z} \right|_{z=-l} - \left. \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial z} \right|_{z=-l} = -\hat{w}(-l) \quad (8)$$

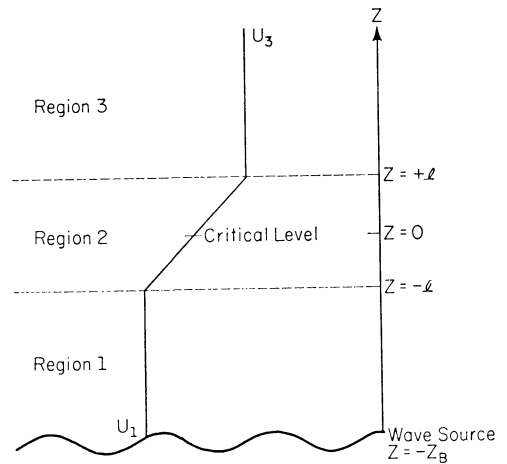
$z = -l$ において

$$\hat{w}_2 = \hat{w}_3, \quad \left. \frac{\partial \hat{w}_3}{\partial z} \right|_{z=l} - \left. \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial z} \right|_{z=l} = -\hat{w}(l) \quad (9)$$

$z = l$ において

が使われた。下端には c の速さで水平に動いている波状

$$N^2 = g \frac{\partial \ell n \bar{\theta}}{\partial z} = \text{Constant}$$



第3図 線型定常問題における平均場の状態 (Geller *et al.*, 1975)。

の固体境界面を、

$$z = -z_B - H \sin k(x-ct) \quad (10)$$

のように与える。これを鉛直速度成分に直すと、

$$w(-z_B) = lmkH \cos k(x-ct) \quad (11)$$

となる。

region 1 と region 3 では方程式(6)は、

$$\hat{w}_{zz} + \left(\frac{N^2}{l^2 m^2} - k^2 \right) \hat{w} = 0 \quad (12)$$

となり、この解は、

$$\hat{w}_1 = A_1 e^{inz} + B_1 e^{-inz} \quad \text{region 1} \quad (13)$$

$$\hat{w}_3 = A_3 e^{inz} + B_3 e^{-inz} \quad \text{region 2} \quad (14)$$

となる。ただし、

$$m^2 = \frac{N^2}{l^2 m^2} - k^2 \quad (15)$$

解(13)、(14)の第1項は上方に、第2項は下方にそれぞれ伝播する波動である。Region 2 では、方程式(6)は、

$$\hat{w}_{zz} + \left(\frac{N^2}{m^2 z^2} - k^2 \right) \hat{w} = 0 \quad (16)$$

となる。フロベニウスの方法によってこの方程式を解くと、

$$\hat{w}_2 = A_2 \sum_{\nu} a_{\nu} z^{\nu+1/2+i\mu} + B_2 \sum_{\nu} b_{\nu} z^{\nu+1/2-i\mu} \quad (17)$$

のように展開できる。ここで $\mu = (\bar{R}_i - 1/4)^{1/2}$ である。(17)で ν は自然数であるが、実際には0および偶数し

かとらない (Geller *et al.*, 1975 参照). Region 3 では $z \rightarrow \infty$ で放射条件を採用している. 放射条件というのは下向きに伝播する波動が存在しないということであり, (14) において \hat{w}_3 の第 2 項目を省略することができる. 方程式 (6) の一般解をまとめて書くと,

$$\hat{w} = \begin{cases} A_1 e^{inz} + B_1 e^{-inz} & -z_B \leq z < -l \\ A_2 \sum_{\nu} a_{\nu} z^{\nu+1/2+i\mu} + B_2 \sum_{\nu} b_{\nu} z^{\nu+1/2-i\mu} & -l \leq z < l \\ A_3 e^{inz} & z \geq l \end{cases} \quad (18)$$

となる. これらの一般解に下端の境界条件 (11) および接続条件 (8), (9) を使って定数を求めると特解が得られる. Region 2 における解に関しては $\nu=4$ までを採用し, あとは数値計算を行なった.

このようにして求められた \hat{w} から w も求め, 連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (19)$$

と, 熱力学方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} w = 0 \quad (20)$$

を使って, u および ρ を求めることができる.

臨界層における平均場のリチャードソン数を \bar{R}_i と書いたが, 実際には波動による場の歪みをも加えた形のリチャードソン数を求めなければならない. これを R_i とすれば,

$$R_i = - \frac{\left(\frac{g}{\bar{\rho} + \rho} \right) \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2} \quad (21)$$

と書ける. ただしここで使われている u や ρ は z と x の関数であり, R_i も z と x の関数になる.

この計算を実行するにあたって, いくつかのパラメータの値を設定しておかねばならない. パラメータとしては基本的には, $\bar{u}_z = 0.024028 \text{ s}^{-1}$ (臨界層における平均場のシア), $N^2 = 1.202 \times 10^{-3} \text{ s}^{-2}$ (臨界層における平均場のプラント振動数の 2 乗), $k = 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ (内部重力波の波数でこれを波長にすると $2\pi \times 10^3 \text{ m}$) を与えた. ただし \bar{u}_z と N^2 は場合によってはこれら基本値の整数倍, 整数分の 1 を採用している. 他のパラメータとして $W_0 = lmkH$ (波源における w の振幅) および \bar{R}_i を適宜変更して計算が実行された. 第 4 図 (a) には $W_0 = 10 \text{ cm s}^{-1}$ に固定して, \bar{R}_i を 2.0819, 20.819, 62.46 と 3 通りに変えた場合の $R_i < 1/4$ となる領域がそれぞれ 5 波数にわたって黒く示されている. $\bar{R}_i = 2.0819$ の場

合, 最大約 60 m の厚さの不安定領域が現われている. \bar{R}_i の値を大きくすると不安定領域は多重層を形成するが, それぞれの不安定領域は薄くなる.

いま方程式 (6) において臨界層に極く近いところを考えると, $\bar{u}-c$ が 0 に近づくので, この方程式の [] 中の第 1 項が他の項に比べて大きくなり, 近似的に

$$\hat{w}_{zz} + \frac{N^2}{\bar{u}^2} \hat{w} = 0 \quad (22)$$

となる. \bar{u} は直線であるとすれば, 方程式 (22) は,

$$\hat{w}_{zz} + \frac{\bar{R}_i}{z^2} \hat{w} = 0 \quad (23)$$

と書変えられる. この方程式の一般解は,

$$w \propto z^{1/2 \pm i\mu} = |z|^{1/2} [\cos(\mu \ln|z|) \pm i \sin(\mu \ln|z|)] \quad (24)$$

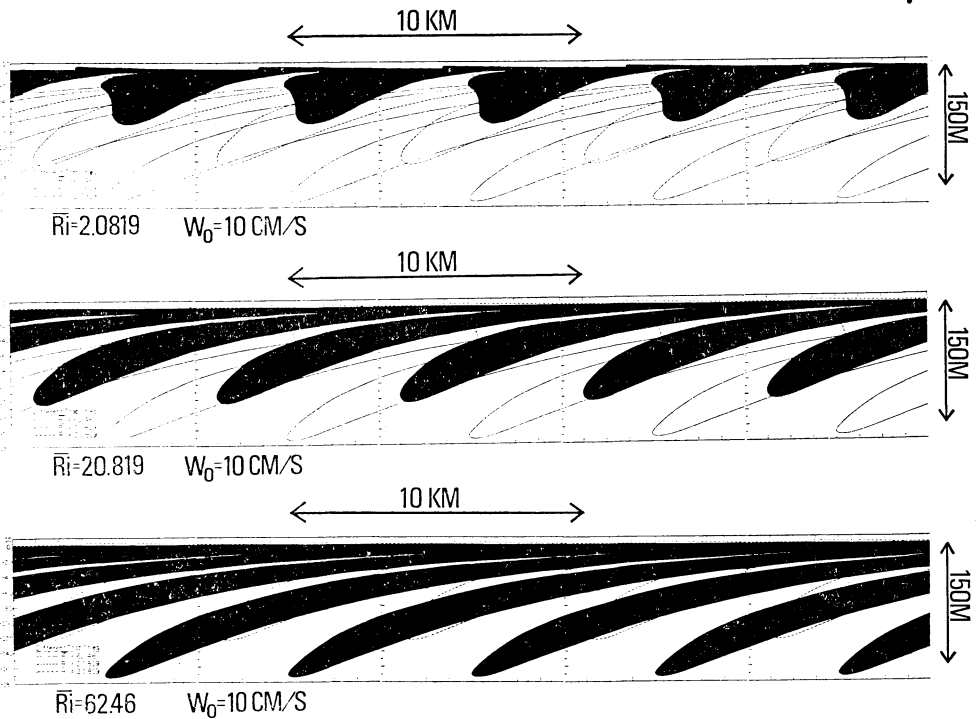
となり, \bar{R}_i が大きくなると μ も大きくなって鉛直方向に激しく振動する. これが不安定領域が多重化する理由である. いま個々の不安定領域を包含したエンベロップを考えると, そのエンベロップの厚さは \bar{R}_i が大きくなるほど厚くなっている. 第 4 図 (a) からわかるように, $\bar{R}_i = 62.46$ の場合, 不安定領域のエンベロップの下端は臨界層から 150 m 以上も下にあることがわかる.

私には今もって \bar{R}_i とともに, エンベロップの厚さが増大していることの物理的意味が良くわからない. 第 4 図 (b) は, $\bar{R}_i = 2.0819$ を固定して W_0 を 3 cm s^{-1} , 10 cm s^{-1} , 30 cm s^{-1} と変化させた場合の不安定領域出現のありさまである. 波源の振幅が大きくなれば不安定層も厚くなるのは至極もつともである. $W_0 = 30 \text{ cm s}^{-1}$ の場合は最大 150 m 程度の厚さになっている.

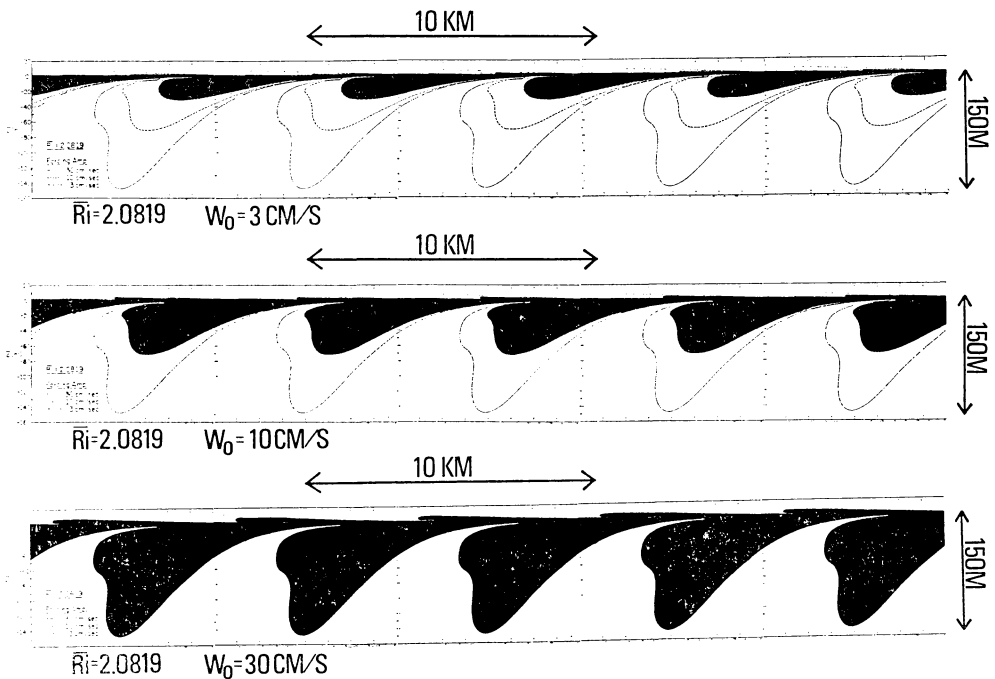
このようにして, 臨界層近傍で \bar{R}_i が $1/4$ より大きくても内部重力波が場を歪めるために不安定領域が出現することが具体的に証明されたのである. 第 4 図 (a), (b) で黒く塗りつぶしてあるのは $R_i < 1/4$ となる領域であるが, この内部には $R_i < 0$ のような対流不安定となる領域も含まれている. したがって乱流発生の可能性は大きい.

5. 非線型初期値問題としての臨界層不安定

臨界層近傍における乱流の発生を数値実験で検証することは非常に興味のあることではあったが, 乱流層が薄いために鉛直方向の分解能を向上させる必要があり, したがって膨大なメモリーが要求され, まず 2 次元グリッドの方式では無理であろうと半ばあきらめていた. しかし水平方向にフーリエ展開し, 鉛直方向だけの関数であるフーリエ係数の連立方程式系を作れば数値実験が可能



(a) 波源振幅を一定 ($W_0 = 10 \text{ cm s}^{-1}$) にして、臨界層における平均場のリチャードソン数を $\bar{R}_i = 2.0819, 20.819, 62.46$ と変えた場合。



(b) 臨界層における平均場のリチャードソン数を一定 ($\bar{R}_i = 2.0819$) にして、波源振幅を $W_0 = 3 \text{ cm s}^{-1}, 10 \text{ cm s}^{-1}, 30 \text{ cm s}^{-1}$ と変えた場合。

第4図 線型定常問題より求められた不安定領域の各種パターン (Geller *et al.*, 1975 の結果に手を加えたもの)。

であることがしだいにわかってきた。臨界層における内部重力波吸収の数値実験はすでに Jones・Houghton (1971) や Breeding (1971) によって行なわれている。後者はリチャードソン数のチェックも行なっているが、1/4 より小さくなることはないと述べている。ただ Breeding の数値モデルのグリッド間隔が大きすぎることや分子粘性をかなり大きくとっていることが気がかりである。後にゲラーさんが Breeding に会ってその点を確かめたところ、彼自身もモデルの不備を認めていたということである。

臨界層不安定の数値実験を Tanaka (1975b) にしたがって少し詳細に述べてみよう。プシネスク流体を仮定し、無次元化された基礎方程式を水平方向に平均した方程式系と摂動方程式とに分離する。まず水平方向に平均化した方程式系はつぎのように書ける。

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} + \overline{J(\zeta, \psi)} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial z^2} \quad (25)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \overline{J(\theta, \psi)} = \frac{1}{Re Pr} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial z^2} = -\bar{\zeta} \quad (27)$$

ここで、 $\bar{\zeta}$, $\bar{\psi}$, $\bar{\theta}$ はそれぞれ渦度、流線関数、温位の水平方向の平均値、 Re および Pr はそれぞれレイノルズ数とプラントル数である。 J はヤコビアンをあらわす。

いっぽう、摂動方程式はつぎのように書ける。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \right) \zeta - \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} - R_{i0} \frac{\partial \theta}{\partial x} + J(\zeta, \psi) - \overline{J(\zeta, \psi)} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right) - K \zeta \quad (28)$$

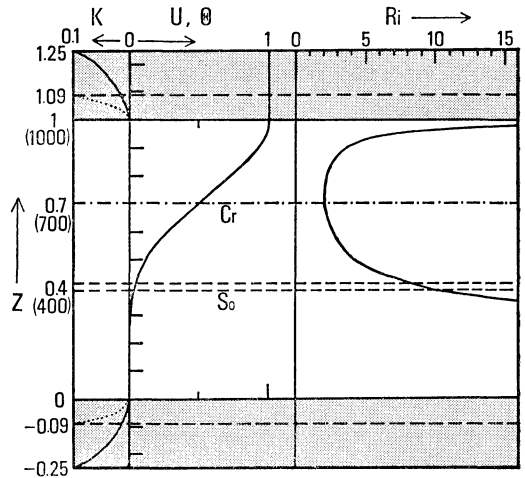
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \right) \theta - \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} + J(\zeta, \psi) - \overline{J(\zeta, \psi)} = \frac{1}{Re Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\zeta \quad (30)$$

ここで、 ζ , ψ , θ はそれぞれ波動部分の渦度、流線関数、温位であり、 K はレイリーの吸収係数である。 R_{i0} は全層のリチャードソン数で、

$$R_{i0} = \frac{g}{\Theta_{00}} \frac{z_0 \Theta_0}{U_0^2}$$

で定義される。ただし Θ_{00} は全層一定の基準温位、 z_0 は全層の厚さ、 U_0 および Θ_0 はそれぞれ層の上端と下端の風速差および温位差であり、 $U_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$, $\Theta_0 = 15^\circ \text{C}$



第5図 非線型初期値問題における平均場の初期状態 (Tanaka, 1975b)。

としてある。第5図には初期状態における風速、温位および局所リチャードソン数等が示されている。考えている層の厚さ z_0 は 1 km で、その両側に吸収層が設けられており、ここに侵入してくる波動は全て吸収される。初期状態における $\bar{u}(z, t=0)$ と $\bar{\theta}$ は、

$$\bar{u}(z, t=0) = \frac{\partial \bar{\psi}(z, t=0)}{\partial z} = \sin^6\left(\frac{\pi}{2} z\right) \quad (31)$$

$$\bar{\theta}(z, t=0) = \sin^6\left(\frac{\pi}{2} z\right) \quad (32)$$

のような特殊な形で与えられている。

波動に関する諸量を水平方向にフーリエ展開すると、

$$\begin{pmatrix} \zeta \\ \psi \\ \theta \end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^N \begin{pmatrix} \zeta_{s, \nu} \\ \psi_{c, \nu} \\ \theta_{c, \nu} \end{pmatrix} \cos(\nu k x) - \sum_{\nu=1}^N \begin{pmatrix} \zeta_{s, \nu} \\ \psi_{s, \nu} \\ \theta_{s, \nu} \end{pmatrix} \sin(\nu k x) \quad (33)$$

となり、これを摂動方程式系 (28)~(30) に代入して適当な N で打ち切ってフーリエ係数に関する連立方程式を作ることができる。この場合は $N=3$ としてある。これらの連立方程式を時間積分するのであるが、境界条件としてフーリエ係数は吸収層の外縁で総て 0 にしてある。波源は $z=400 \text{ m}$ の位置に単色波を、

$$w_f = W_0 \sin k(x-ct) f(t) \quad (34)$$

のように与えた。ここで $f(t)$ は波源振幅をなだらかにするために、

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t < t_0 \\ 1 & t_0 \leq t \end{cases}$$

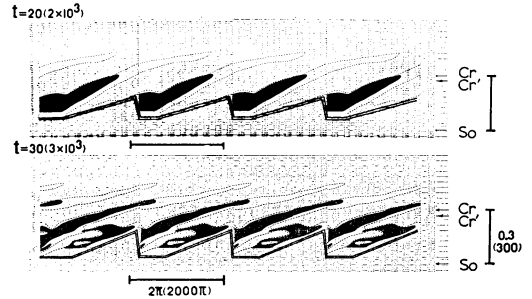
のように与えた。波源の波数 k (あるいは波長) は 10^{-3} m^{-1} (あるいは $2\pi \times 10^3 \text{ m}$)、位相速度 c は 5 m s^{-1} とした。また t_0 は 100 s としてある。レイリーの吸収係数 K は指数型を仮定した。臨界層は $z=700 \text{ m}$ の位置にあり、そこでの初期状態におけるリチャードソン数は 2.0819 となるので、自発的な不安定性は生じ得ない。この方程式系に粘性を導入した目的の1つに計算の安定化がある。そのためレイノルズ数の値は鉛直方向のグリッド間隔と関連する。波源の振幅 W_0 が相対的に大きな場合は不安定領域も厚くなるのでグリッド間隔も大きくてもよいが、 W_0 が小さくなるとグリッド間隔も小さくする必要があり、そのためにレイノルズ数も大きくなる。

このような準備をしてから、連立方程式系を時間積分しながら、局所瞬時的なリチャードソン数、

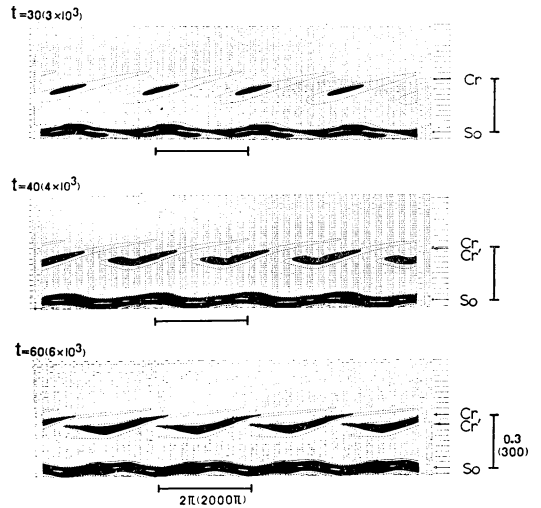
$$R_i = R_{i0} \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) / \left(\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)^2 \quad (35)$$

を逐次計算した。第6図は W_0 を 30 cm s^{-1} としたときの不安定領域の発達状況である。このように比較的大きな振幅を与えると波源近傍は極度に不安定化し、上方に延びる不安定領域も臨界層を突破してしまう。この場合、波源付近の不安定領域と臨界層付近の不安定領域が融合してしまい、前に述べたような波源からの定常状態の形成が行なわれない。このため臨界層が十分ビルドアップされることなく不安定化が先行してしまう。このように波源の振幅が大きすぎると臨界層不安定はそれ特有の意味をもたなくなる。いっぽう、第4図(b)には線型定常問題での $W_0=30 \text{ cm s}^{-1}$ を与えた結果が示されているが、数値実験の場合とかなり異なっている。この原因としては、平均場と波動との相互作用および高次の非線型相互作用が考えられる。

第7図は W_0 を 10 cm s^{-1} とした場合の不安定領域の時間経過である。この程度の振幅になると波源付近の不安定領域と臨界層付近のそれとは截然と分離できる。波源を与えてから1時間も経過すると臨界層の下に小さな不安定領域が出現し、厚さも水平の拡がりもしいだに大きくなって全天を覆尽くすようになる。この図の最後のは波源を与えてから $6 \times 10^3 \text{ s}$ 経過したときの不安定領域の状態であるが、不安定層の厚さは最大 50 m 程度になっており、各不安定領域の1波長分が隣同志で腕を組んだ形状を呈している。この時点での臨界層は初期状態の位置から約 50 m 下降して不安定領域のほぼ中心を水平に横切っている。第8図は W_0 をさらに小さくして 3 cm s^{-1} としたときの不安定領域の発達過程である。こ

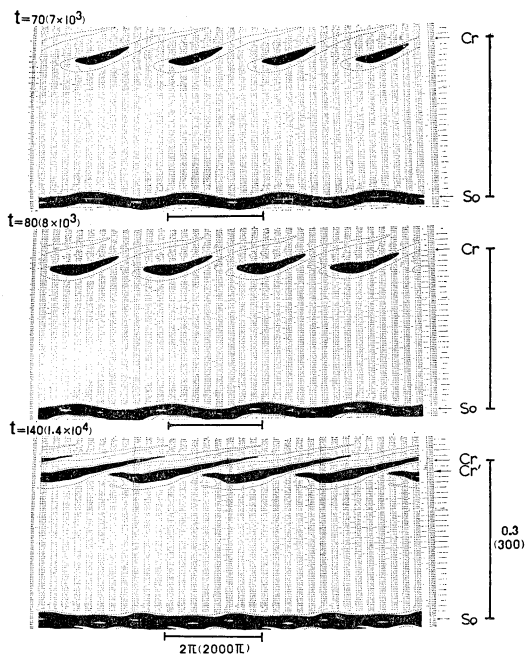


第6図 非線型初期値問題より求められた不安定領域 ($R_i < 1/4$) の時間変化。波源振幅は 30 cm s^{-1} 、グリッド間隔は 10 m である。 C_r は初期状態の臨界層、 C_r' は平均風加速のため下降した臨界層、 S_0 は波源を意味する。また括弧の中の数値の単位は MKS である (Tanaka, 1975 b)。



第7図 第6図と同じであるが、波源振幅だけを 10 cm s^{-1} に変えてある (Tanaka, 1975 b)。

の場合はグリッド間隔をこれまでの $1/3$ (3.33 m) にしてある。第7図の場合とほとんど同様の経過をたどるが、波源振幅が相対的に小さいために不安定領域の発達には時間がかかる。不安定領域の厚さは高々 20 m 程度である。 $1.4 \times 10^4 \text{ s}$ (約4時間) 後には臨界層の位置も 20 m 程度下降し、各不安定領域はその両端で互いに入組んで braid 状を呈し、そのほぼ中心を下降してきた臨界層が横切っている。この数値実験ではフーリエ展開を3次の項で打切っており、またグリッド間隔も 3.33 m とそれほど細かくもないために連結部分での巻込みの状

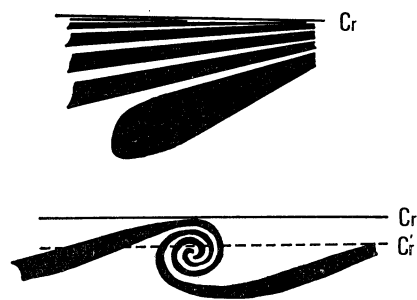


第8図 第6図と同じであるが、波源振幅を 3 cm s^{-1} 、グリッド間隔を 3.33 m としてある (Tanaka, 1975 b).

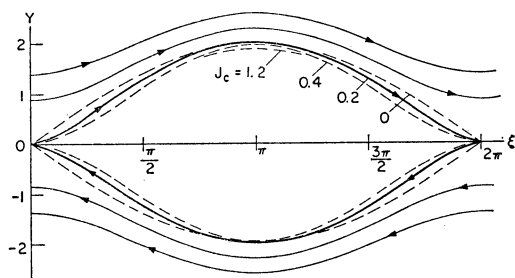
態を十分再現できてはいない。このように強制的に与えられた内部重力波が臨界層で K-H 波に特有な braid を形成するという結果はもちろん線型定常問題からは全く予想のできないことである。線型定常問題では臨界層の位置は不変であり、不安定領域もほとんどそこを突破することはなく、braid 状の巻き込みもあり得ない。

線型定常問題と非線型初期値問題から求められた不安定領域の形態を誇張して書くと第9図のようになる。線型定常問題から得られる不安定領域は程度の差こそあれ無限の多重層であり、非線型初期値問題から得られる不安定領域は braid 状を呈する。どちらが現実に近いかとなるともちろん後者である。Maslowe (1972) は非線型定常問題を解いた結果、臨界層を中心に cat's eye が形成されその周囲に乱流層が発生することを発見した(第10図参照)。この cat's eye とこの数値実験で求められた braid 状の巻き込みとは多分同一のものであろう。しかしながら非線型初期値問題の最終状態が非線型定常問題の結果と完全に一致する保証はどこにもない。両者の関係についてもっと掘下げた検討が必要である。

Jones (1968) は Booker・Bretherton (1967) の研究の余白を埋めるものとして臨界層近傍でリチャードソン



第9図 線型定常問題と非線型初期値問題から得られる不安定領域の各パターンの模式図。上図が線型定常問題、下図が非線型初期値問題 (Tanaka, 1975 b)。



第10図 非線型定常問題から得られた cat's eye 型の流線。 J_c は臨界層におけるリチャードソン数 (Maslowe, 1972)。

数がすでに $1/4$ より小さな場合、下方から内部重力波を強制されると、入射波のエネルギー・フラックスよりも反射波のそれの方が大きいことを発見した。この現象は over-reflexion と呼ばれるもので、反射波のエネルギー・フラックスは全反射のそれに加えて平均場から波動に移されたエネルギーを含むために起こる現象である。臨界層近傍に不安定領域が出現した時点でこの over-reflexion が起こるはずである。不安定領域が拡大するにつれてそこで乱流が発生し始めるので、リチャードソン数は $1/4$ に逆戻りしついに $1/4$ より大きくなる。するとふたたび内部重力波が侵入可能となって不安定領域を作り始めそれとともに over-reflexion も再開される。このような過程を繰返しながら何らかの定常状態に向かっているように考えられる。

6. 不安定領域の厚さ

内部重力波を与えると、その臨界層近傍に不安定領域が発生することを線型定常問題と非線型初期値問題の双方から検証してきた。その結果、不安定領域の形態に関

して両者の結論にかなりの違いがあるにもかかわらず、不安定領域の厚さについてはほとんど一致している。ここでは不安定領域の厚さを理論的近似式で見積もる方法について述べてみたい。非粘性流体の場合、不安定領域の厚さが内部重力波の波長（あるいは波数）、振幅、臨界層における平均場のリチャードソン数等によって決定される。Geller *et al.* (1975) はこの関係を具体的に求めることに成功した。

臨界層の極く近傍で成立つ方程式 (22) の解 (24) を、連続の式 (19) と熱力学方程式 (20) に代入して $\partial u/\partial z$ や $\partial \rho/\partial z$ を求め、リチャードソン数 R_i の定義の式 (21) に代入する。その値が $1/4$ より小さくなるためには、不安定領域のエンベロープの厚さの最大値 $Z_{1/4}$ は、

$$Z_{1/4} \sim W_0^{2/3} \bar{R}_i^{1/3} k^{-2/3} \quad (36)$$

となる。ただしこのためには平均場のリチャードソン数 \bar{R}_i が適当に大きくて $\mu = (\bar{R}_i - 1/4)^{1/2} \approx \bar{R}_i^{1/2}$ となる仮定が必要である。(36) の関係から、内部重力波の波長が一定ならば波源振幅 W_0 と臨界層における平均場のリチャードソン数 \bar{R}_i が大きくなるほど不安定領域のエンベロープは厚くなるのがわかる。しかし W_0 は $2/3$ 乗則であるのに対して \bar{R}_i は $1/3$ 乗則であるために、 \bar{R}_i の増加に対して $Z_{1/4}$ はそれほど急激には増加しない。Fritts・Geller (1976) は (36) の関係を比例定数を含めてもっと正確に求めると、

$$Z_{1/4} = 1.32 \left(\frac{W_0^2 \bar{R}_i}{k^2 Z_f \bar{u}_z^2} \right)^{1/3} \quad (37)$$

となることがわかった。ここで Z_f は波源と臨界層の距離である。このようにして不安定領域のエンベロープの厚さが与えた内部重力波や平均場のいわゆる外部パラメータで決定できるようになった。

7. 粘性による不安定化の抑制

臨界層で分子粘性の影響が十分大きければ不安定領域の出現は抑制される。Hazel (1967) は分子粘性を含めた線型方程式を使って臨界層吸収問題を検討した際、分子粘性による特徴的な厚さとして、

$$Z_v = \left(\frac{\nu}{k \bar{u}_z} \right)^{1/3} \quad (38)$$

を採用した。第1表は米国標準大気から求められた地表から 110 km までの Z_v の値である。Fritts・Geller (1976) は $Z_{1/4}$ と Z_v がいかなる関係にあるとき臨界層不安定が生じるかをスマートな方法で求めている。

動粘性係数 ν と熱伝導係数 κ を含めた線型方程式は

第1表 1966年米国標準大気から求められた波長 100 km の波動に対する Z_v の値 (Geller *et al.*, 1975).

z (km)	ν ($m^2 s^{-1}$)	Z_v (m)
0	1.317×10^{-5}	2.188
10	3.539×10^{-5}	3.042
20	1.642×10^{-4}	5.074
30	8.187×10^{-4}	8.669
40	4.494×10^{-3}	15.29
50	1.972×10^{-2}	25.03
60	6.586×10^{-2}	37.42
70	2.349×10^{-1}	57.17
80	9.411×10^{-1}	71.58
90	4.760	155.9
100	3.004×10	288.1
110	1.700×10^2	513.4

6階の常微分方程式となる。すなわち、

$$\left[ik(\bar{u}-c) - \kappa \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \right] \left\{ \left[-ik(\bar{u}-c) + \nu \left(\frac{d^2}{dz^2} - 2k^2 \right) \right] \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} + ik[\bar{u}_{zz} + k^2(\bar{u}-c)] + \nu k^4 \right\} \hat{w} + k^2 N^2 \hat{w} = 0 \quad (39)$$

と書ける。いま直線的なシアーを考え、 $z=0$ を臨界層にすると、 $\bar{u}-c = \bar{u}_{zz}$ となる。いま z を (38) の Z_v で $z = Z_v \zeta$ のように無次元化すると方程式 (39) は、

$$\left(iP_r^{-1} \frac{d^2}{d\zeta^2} + \zeta \right) \left(i \frac{d^2}{d\zeta^2} + \zeta \right) \frac{d^2 \hat{w}}{d\zeta^2} + \bar{R}_i \hat{w} = 0 \quad (40)$$

と変換される。ただし $P_r = \nu/\kappa$ はプラントル数である。この方程式の漸近解は $\zeta^p \exp(q\zeta^{3/2})$ となることから Koppel (1964) や Hazel (1967) によって示されている。したがって6個の漸近解は、

$$\left. \begin{aligned} \hat{w}_1 &= A_1 \zeta^{1/2+i\mu} \varepsilon \\ \hat{w}_2 &= A_2 \zeta^{1/2-i\mu} \varepsilon \\ \hat{w}_3 &= A_3 \zeta^{-5/4} \exp\left(-\frac{2}{3} i^{1/2} \zeta^{3/2}\right) \varepsilon \\ \hat{w}_4 &= A_4 \zeta^{-5/4} \exp\left(\frac{2}{3} i^{1/2} \zeta^{3/2}\right) \varepsilon \\ \hat{w}_5 &= A_5 \zeta^{-9/4} \exp\left[\frac{2}{3} (iP_r)^{1/2} \zeta^{3/2}\right] \varepsilon \\ \hat{w}_6 &= A_6 \zeta^{-9/4} \exp\left[-\frac{2}{3} (iP_r)^{1/2} \zeta^{3/2}\right] \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

となる。ここで ε は $\varepsilon = 1 + O(\zeta^{-3})$ となる関数である。 \hat{w}_1 と \hat{w}_2 は非粘性解に対応し、 \hat{w}_3 、 \hat{w}_4 、 \hat{w}_5 、 \hat{w}_6 は粘性

解に対応する。 \hat{w}_4 と \hat{w}_6 は $\zeta \rightarrow \infty$ で減衰し、 \hat{w}_3 と \hat{w}_5 は $\zeta \rightarrow -\infty$ で減衰する。 \hat{w}_1 から \hat{w}_6 までの解は $|\zeta|$ が 1 よりも十分大きくないと意味をもたない。したがってこれらの解を外部解という。いま $|\zeta| > 5$ の領域で外部解を採用すると、 $O(\zeta^{-3})$ から 1% 以内の精度で成立っていると考えられる。 $\zeta > 5$ の領域では放射条件を考慮して、

$$\hat{w} = B_1 \zeta^{1/2+i\mu} + B_2 \zeta^{-5/4} \exp\left(-\frac{2}{3} i^{1/2} \zeta^{3/2}\right) + B_3 \zeta^{-9/4} \exp\left[-\frac{2}{3} (iP_r)^{1/2} \zeta^{3/2}\right] \quad (42)$$

なる解が得られる。 いっぽう、 $\zeta < -5$ の領域（波源の領域）では

$$\hat{w} = C_1 \zeta^{1/2+i\mu} + C_2 \zeta^{1/2-i\mu} + C_3 \zeta^{-5/4} \exp\left(\frac{2}{3} i^{1/2} \zeta^{3/2}\right) + C_4 \zeta^{-9/4} \exp\left[\frac{2}{3} (iP_r)^{1/2} \zeta^{3/2}\right] \quad (43)$$

が得られる。

$|\zeta| < 5$ の領域、すなわち臨界層を含む領域では内部解を考えなければならない。内部解として、

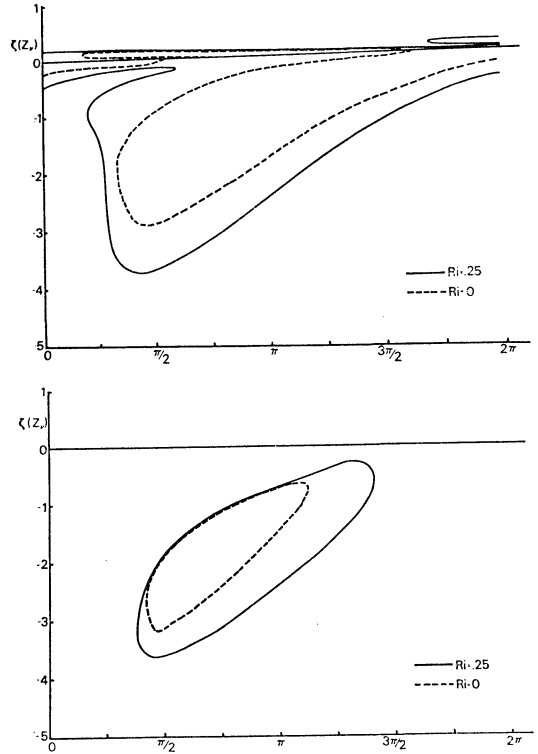
$$\hat{w} = \sum_{\gamma=0}^5 D_\gamma \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu,\gamma} \zeta^{\nu+\gamma} \quad (44)$$

のようなべき級数展開を考えることができる。これを方程式 (40) に代入して ζ の同じべきの係数を 0 と置くことによって $a_{\nu,\gamma}$ の漸化式が求まる。 B, C, D に関する未定係数は合計 13 個で、 $\zeta = 5$ と -5 における \hat{w} と $d\hat{w}/d\zeta$ の連続条件から 12 個が決まる。最後の 1 個は波源の境界条件から求められる。

実際の計算では、 $\nu = 6.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $P_r = 1$, $k = 0.4 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$, $\bar{u}_z = 0.024028 \text{ s}^{-1}$, $N^2 = 0.722 \times 10^{-3} \text{ s}^{-2}$ が使われた。これらのパラメータより $\bar{R}_i = 1.25$, $Z_v = 87.8 \text{ m}$ となる。ここで使われている動粘性係数 ν は高度 90 km と 100 km の中間のものである（第 1 表参照）。第 11 図は波源振幅 W_0 を 2 m s^{-1} としたとき、非粘性の場合と粘性の存在する場合で $R_i < 1/4$ および $R_i < 0$ となる領域がどのように変化するかを 1 波長にわたって示したものである。粘性の存在によって臨界層に近いほど不安定化が抑制されていることがわかる。このような計算の結果、 $Z_{1/4}$ と Z_v との間に、

$$Z_{1/4} \lesssim 2.5 Z_v \quad (45)$$

なる関係があれば不安定領域が出現できないことがわかった。この法則は一般性もっているので大気や海洋ばかりでなく室内実験にも適用できる。ただこれは線型定常問題に基づいているので、実際の現象とは正確には一



第11図 線型定常問題から求められた不安定領域 ($R_i < 1/4$ および $R_i < 0$) の比較。上図が非粘性の場合、下図が粘性の存在する場合。 $\zeta(Z_v) = 0$ が臨界層であり、縦軸の 1 目盛は 87.8 m である。各種パラメータの値については本文参照 (Fritts・Geller, 1976)。

致しないが、目安をつける意味では重要な法則である。

8. 臨界層不安定と実際の現象

イリノイ大学で私達がこの問題に着手した時には、ともかくも不安定領域が出現すればという期待が先走っていたことはまぎれもない事実である。いざ不安定領域が出現してみるとやはり何らかの法則化を望むのが人情である。私達の努力は最終的には (45) という形で法則化されたわけである。もちろん私達も最初から単なる理論的興味だけで始めたわけではないことをおことわりしておかねばならない。現実の大気や海洋中に存在する安定成層中の乱流を何とかして理論の光に照らしてみたいという大なる期待も潜んでいた。私自身は惑星境界層や下部成層圏に発生する薄い乱流層について興味もっていたし、ゲラーさんやフリッツさんはむしろ中間圏や下部熱圏の乱流層に興味もっていた。しかしながら得ら

れた理論的成果の一般性のため、個人の興味は止揚されたのである。以下、現実の気や海洋中の乱流層を素材にして、臨界層不安定の適用性を議論してみたい。

(1) 臨界層に関する室内実験

臨界層に関する室内実験は Bretherton *et al.* (1967) と Thorpe (1973) によって報告されている。前者は \bar{R}_i とし 1.2 と 16.4, 後者は $5 < \bar{R}_i < 15$ の範囲で実験が行なわれた。前者の実験に使われたパラメータは, $\bar{R}_i = 1.2(16.4)$, $N^2 = 12.19 \text{ s}^{-2}(0.8918 \text{ s}^{-2})$, $\bar{u}_z = 3.187 \text{ s}^{-1}(0.2332 \text{ s}^{-1})$, $W_0 = 3.044 \text{ cm s}^{-1}(0.223 \text{ cm s}^{-1})$, $Z_v = 0.126 \text{ cm}(0.301 \text{ cm})$, $Z_f = 5 \text{ cm}(5 \text{ cm})$, $k = 1.571 \text{ cm}^{-1}(1.571 \text{ cm}^{-1})$ であり, これらを使って (37) より $Z_{1/4}$ を求めると, $Z_{1/4} = 0.018 \text{ cm}(0.223 \text{ cm})$ となる。後者の実験では $\bar{R}_i = 5(15)$, $N^2 = 2.926 \text{ s}^{-2}(0.9753 \text{ s}^{-2})$, $\bar{u}_z = 0.765 \text{ s}^{-1}(0.255 \text{ s}^{-1})$, $W_0 = 2.338 \text{ cm s}^{-1}(0.779 \text{ cm s}^{-1})$, $Z_v = 0.203 \text{ cm}(0.292 \text{ cm})$, $Z_f = 8 \text{ cm}(8 \text{ cm})$, $k = 1.571 \text{ cm}^{-1}(1.571 \text{ cm}^{-1})$ が使われ, $Z_{1/4}$ は 0.08 cm (0.08 cm) 以下となる。したがってどちらの実験でも (45) の関係が成立し理論的には乱流の存在はあり得ない。事実, 双方の実験から乱れが発生したという報告はない。この種の実験では水を使っているため粘性が大きく, 乱れを発生させることは容易でないだろう。空気を使った実験が切望される。

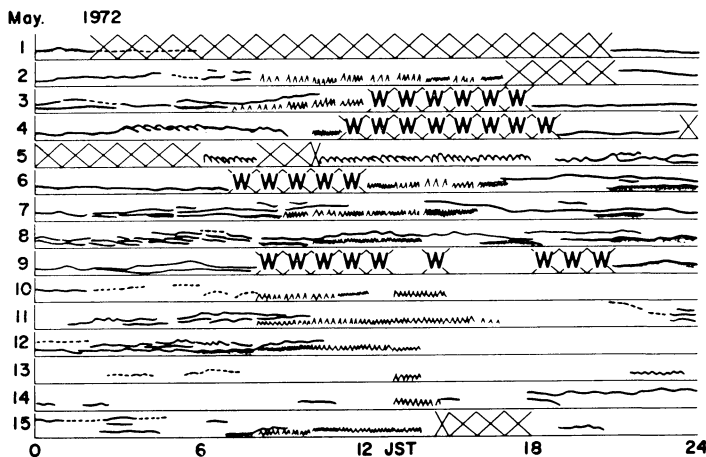
(2) 惑星境界層の乱流

Geller *et al.* (1975) と Tanaka (1975b) によって惑星境界層における薄い乱流層を解明するため使われたパラメータは, $\bar{R}_i = 2.0819$, $k = 10^{-3} \text{ m}^{-1}$, $\bar{u}_z = 0.024028$

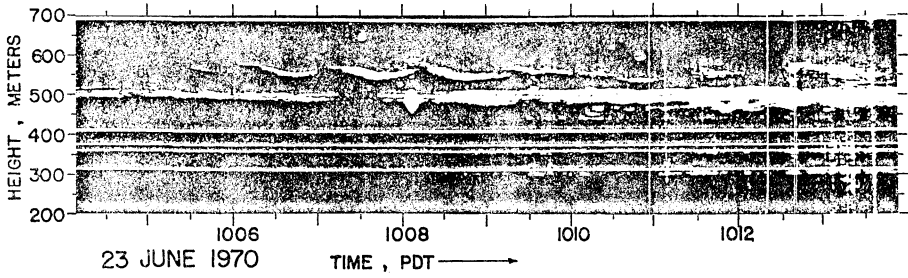
s^{-1} , $W_0 = 3 \text{ cm s}^{-1}$ である。いま $Z_f = 500 \text{ m}$ を仮定すると $Z_{1/4} = 24.6 \text{ m}$ となる。(45) の関係から動粘性係数が $2.28 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ 以上ならば不安定領域の出現はあり得ない。この値はこの領域の動粘性係数より 1,700 倍以上も大きいので、夜間の静穏時には不安定領域の発生は十分可能性がある。Fukushima *et al.* (1974) はソーダ観測から夜間の惑星境界層に薄い乱流層が頻繁に発生することを確認している(第12図参照)。また Fukushima *et al.* (1975) によって、その平均的な厚さが約 25 m であることも確認された。惑星境界層の観測はソーダや FM-CW レーダ等のリモートセンサーによって以前より格段に進歩した。第13図(a)には FM-CW レーダによって観測された乱流層の発達過程が示されており(Metcalf, 1974), 私の数値実験によって求められた不安定領域と形態的に類似している。第13図(b)には乱流層出現の少し前に観測された平均場の状態が示されている。乱流層の出現高度は強い安定成層の中であり、かつ風速の最大値とも一致している。これだけの情報からこの乱流層が強制型の臨界層不安定現象だといえることはできないが、少なくとも必要条件は満足している。夜間には低層ジェットが惑星境界層中に発達するので、臨界層の存在確率も大きい。

(3) 成層圏の乱流

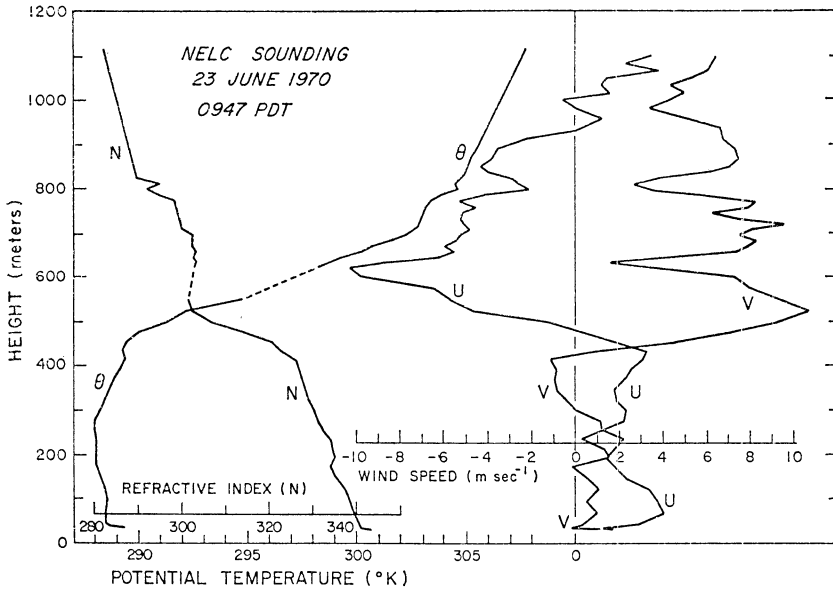
成層圏の乱流観測は米国西部の山岳地帯を中心に行なわれた HICAT (High Altitude Clear Air Turbulence) 計画によるものを始めとして今日までかなり蓄積されている。成層圏でも特に下部に乱流が頻繁に発生する。成



第12図 1972年5月前半にわたってソーダで観測された惑星境界層中の乱流層。1,000 m の高度まで示してある (Fukushima *et al.*, 1974)。



(a)



(b)

第13図 (a) FM-CW レーダで観測された乱流層の発達. 550~600 m に出現している乱流層に注目すること.
 (b) 乱流層出現の少し前に観測された平均場 (風速成分, 温位および屈折率) のプロフィール (Metcalf, 1974).

層圏下部の高度 20~30 km では東西方向の平均風速が 0 に近づいているので, 位相速度 0 の山越波動 (lee wave) が上方に伝播するとそのあたりの高度範囲のどこかで臨界層ができる. 特に夏期には中緯度以北では山越波動に対する臨界層が 20 km あたりの高度に確実に存在する. いっぽう, 熱帯地方の下部成層圏には大気ケルビン波の存在がたしかめられている. この波動は位相速度約 30 m s^{-1} で東進する. 熱帯地方の下部成層圏の東西方向の平均風速は 20 m s^{-1} 程度であって厳密な意味では臨界層は存在し得ない. しかしながらこの高度での平均シアは大きく, 1 km の高度差でも 10 m s^{-1} 程度

の風速差が存在する. 大気ケルビン波が有限振幅波動ならば, たとえ厳密な意味での臨界層でなくても何らかの影響を受ける. この結論を確実なものにするには大振幅波源の臨界層問題を掘下げる必要がある. 準 2 年周期振動 (QBO) の原因として大気ケルビン波と平均風との相互作用に重大な関係があるからである. 第 2 表は, 山越波動と大気ケルビン波によって下部成層圏に生成される不安定領域の厚さの見積もりである. この高度での Z_p は 10 m 以下であるから, 粘性による影響はほとんど考慮する必要がない.

第2表 山越波動と大気ケルビン波によって下部成層圏に生成される不安定領域の厚さ (田中, 1976 a).

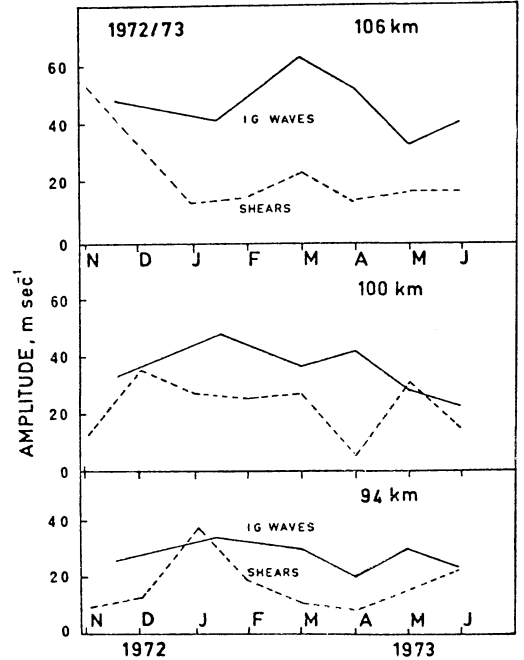
	山越波動	大気ケルビン波
波長	100 km	40,000 km
W_0	0.3 m s^{-1}	0.1 cm s^{-1}
Z_f	10 km	10 km
\bar{u}_z	0.02 s^{-1}	0.01 s^{-1}
\bar{R}_i	2	8
$Z_{1/4}$	300m	900m

第3表 内部重力波によって下部熱圏に生成される不安定領域の厚さ (田中, 1976 a).

下部熱圏内部重力波	
波長	100 km
W_0	3 m s^{-1}
Z_f	10 km = scale height
\bar{u}_z	0.02 s^{-1}
\bar{R}_i	2
$Z_{1/4}$	1,400m

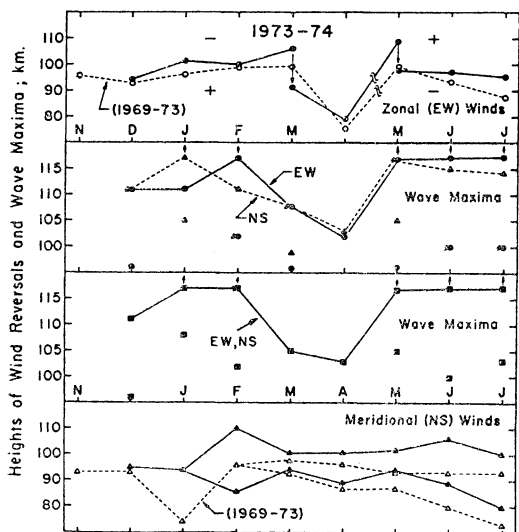
(4) 中間圏・下部熱圏の乱流

Justus (1973) によると内部重力波と考えられる水平風の振幅 U_0 は $20 \sim 45 \text{ m s}^{-1}$ であり, その水平および鉛直波長はそれぞれ $\lambda_x = 100 \sim 200 \text{ km}$, $\lambda_z = 10 \sim 20 \text{ km}$ の範囲にある. したがって鉛直方向の振幅は $W_0 \approx \frac{\lambda_z}{\lambda_x} U_0$ を使って $2 \sim 4.5 \text{ m s}^{-1}$ となる. いま $W_0 = 3 \text{ m s}^{-1}$ とし, 他のパラメータを第3表のように決めると (Rosenberg, 1968 参照), $Z_{1/4} = 1,400 \text{ m}$ となる. いっぽう, Z_f の値は 100 km の高度で 288 m , 110 km の高度で 513 m にもなるので, 110 km を少し越えると (45) の関係が成立って不安定化が抑制される. これが乱流圏界面の成因である. 上部中間圏から下部熱圏では, 内部重力波の役割が惑星波動のそれよりもむしろ大きくなる. この高度まで達すると内部重力波の振幅も桁違いに大きくなり (松野, 1976; 1977 参照), 大振幅波動となる. したがって線型理論の枠内での取扱いには無理がでてくる. 大振幅波動の場合, $c + U_0 > \bar{u} > c - U_0$ の全領域が臨界層と考えられる. したがって臨界層が最初から幅をもっており, それは $2U_0/\bar{u}_z$ となる. いま $U_0 = 30 \text{ m s}^{-1}$, $\bar{u}_z = 0.02 \text{ s}^{-1}$ と仮定すればこの幅は 3 km にもなる. この値は不安定領域の厚さ $Z_{1/4} = 1,400 \text{ m}$ よりもずっと厚い. 最近 Manson *et al.* (1975) や Manson・



第14図 下部熱圏における3つの高度 (106 km, 100 km, 94 km) で観測された平均風のシアーおよび内部重力波の振幅の変化 (Manson・Meek, 1976).

Meek (1976) は電波の分反射法による観測から, 内部重力波と平均場の相互作用に関して臨界層不安定の理論を部分的に実証した論文を出している. シアーをもつ安定成層中の乱流層が自発的な不安定性によるものでなくて, 内部重力波の強制によるものであるという事実が第14図に示されている. この図には下部熱圏の3つのレベルにおいて, 平均風のシアーと内部重力波の振幅が比較されているが, 両者の間には明確な関連が見当たらない. 第15図には平均風向が逆転する高度と内部重力波によって生ずる不規則風が最大振幅をとる高度の比較が示されている. 平均風向が逆転する高度は内部重力波にとって臨界層が確率的にもっとも存在しやすいことが期待できる. 中間圏では冬半球に偏西風 (極夜ジェット), 夏半球に偏東風が存在する. この主たる原因は夏と冬の中間圏の温度分布に基づく温度風である. しかし Lindzen (1968) も指摘しているように, 上部中間圏から下部熱圏にかけて乱流が存在しないと, 強風域が無限の高度まで続いてしまう. このような不合理をなくすには, 乱流による渦粘性が必要である. 下部熱圏では中間圏と風向が逆になっている場合が多いが, これは内部重



第15図 平均風向が逆転する高度と不規則風の振幅が最大となる高度 (Manson et al., 1975).

力波の臨界層吸収の結果としての平均風変化とその際に生成される乱流による減速機構の両方の原因によるものと推定される。

(5) 海洋中の乱流

サーモクライン中には内部重力波が常時存在し、薄い乱流層が存在していることは Woods・Wiley (1972) 等によって報告されている。Garrett・Munk (1975) によるとサーモクライン中には周期1時間程度の波動が卓越しており、鉛直方向の変位振幅は約3m、鉛直速度振幅は0.1 cm s⁻¹程度である。また波長は1.8 km以下である。したがってこの波動の位相速度は50 cm s⁻¹となる。他のパラメータとして、 $\bar{u}_z = 1.6 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ 、 $\bar{R}_i = 10$ 、 $Z_f = 500 \text{ m}$ 、 $\nu = 0.01 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ を使うと、 $Z_v = 56.3 \text{ cm}$ 、 $Z_{1/4} = 11.4 \text{ m}$ となり、 $Z_{1/4}$ が $2.5 Z_v$ (1~2m) よりずっと大きく1~10mの厚さの乱流層の存在は十分可能である。サーモクライン中で見かけられる厚さ1m程度のK-H波の成因はこの臨界層不安定であろう。

9. 臨界層不安定の数学的・物理的意味

数学的観点から見れば臨界層不安定の問題は微分方程式の特異点問題に帰着する。特異点の内部まで立ってほじくり返すことはスマートさを尊ぶ人々からは歓迎されないかも知れない。特異点はブラックボックスとして、そこへのインプットとそこからのアウトプットを考え、特異点の機能を抽出する理論の方がはるかにスマートであろう。Bretherton (1966) や Booker・Bretherton

(1967) の理論はその種の考え方に基づいている。いわばバランスシートの帳尻があてればよいのである。私達の理論は小切手で支払われたのかあるいは現金で支払われたのかまで問題にしている。

特異点の問題を扱う場合には、それを避けるように理論を修正するか、逆にそれをあばくことによって新しい法則を求めるかの2つの方法がある。私達は後者を選んだ。そのことによって乱流層の発生という新しい現象を発見することができた。さらに臨界層という概念を乱流層を含めたものまで拡大することもできた。乱流層の発生は渦粘性を生じることによって運動量を平均場にいっそう効果的に移すための必然的な結果と考えている。内部重力波のレイノルズ応力の鉛直方向の勾配によって平均風加速が起こる。いっぽう、レイノルズ応力は鉛直方向の渦粘性係数 K_z と、

$$\overline{uw} = K_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \tag{46}$$

のように結びつけられている。したがって平均風加速は、

$$-\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \tag{47}$$

で与えられる。渦粘性係数 K_z は動粘性係数 ν より桁違いに大きく、そのため平均風加速も大きい。

渦粘性係数 K_z に対して、動粘性係数 ν に対する特徴的厚さが (38) で求められたように、

$$Z_K = \left(\frac{K_z}{k \bar{u}_z} \right)^{1/3} \tag{48}$$

のようにその特徴的厚さが求められる。この厚さと不安定領域のエンベロップの厚さ $Z_{1/4}$ とがだいたい等しいと考えて、

$$Z_K = \alpha Z_{1/4} \tag{49}$$

と置く。ただし α は1に近い定数であると考えられる。これから K_z を求めると、

$$K_z = \beta \frac{\bar{R}_i W_0^2}{k Z_f \bar{u}_z} \tag{50}$$

となる。ただし β もやはり1に近い定数である。1例として惑星境界層中で、 $\bar{R}_i = 2.0819$ 、 $k = 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ 、 $\bar{u}_z = 0.024028 \text{ s}^{-1}$ 、 $W_0 = 3 \text{ cm s}^{-1}$ 、 $Z_f = 500 \text{ m}$ を与えると、 $K_z \approx 0.156 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ となる。このようにして渦粘性係数の大雑把な見積りまで可能となった。

10. おわりに

内部重力波を強制されたとき、その臨界層近傍で乱流層が発生する問題について研究のいきさつを含め理論的

内容および地球物理学的現象への適用について詳細に述べてきた。今後に残された課題としては、

- (1) 臨界層不安定のため乱流が発生した後の厳密な取扱いを、over-reflexion の問題を含めていかにするか？
- (2) 大振幅内部重力波の臨界層不安定理論をいかに確立するか？
- (3) 孤立波源に対する臨界層不安定理論をいかに確立するか？

等に関してであろう。どれひとつとっても気の遠くなりそうな問題ばかりである。

臨界層不安定の理論がある程度完成をした段階で、私自身かなり積極的にプロパガンダに努力してきたつもりである。それらの概略の内容は田中(1975a)、田中(1976a)および田中(1976b)に掲載されている。しかしながらこの理論をいっそう確実なものにするべく、依然として各種情報を心待ちにしているしだいである。臨界層不安定の議論にも因果関係を逆にしたものも散見されるからである。この解説は私達の研究成果を軸にしているため、参考文献もできるだけしぼって選択してある。

この解説を書くにあたり、東大海洋研の木村竜治さんにはいろいろお世話になったことを感謝する。

文 献

Booker, J.R. and F.P. Bretherton, 1967: The critical layer for internal gravity waves in a shear flow, *J. Fluid Mech.*, **27**, 513-539.

Breeding, R.J., 1971: A non-linear investigation of critical levels for internal gravity waves, *J. Fluid Mech.*, **50**, 545-563.

Bretherton, F.P., 1966: The propagation of groups of internal gravity waves in a shear flow, *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **92**, 466-480.

—, P. Hazel, S.A. Thorpe and I.R. Wood, 1967: (Appendix to a paper by P. Hazel), *J. Fluid Mech.*, **30**, 781-784.

Fritts, D.C. and M.A. Geller, 1976: Viscous stabilization of gravity wave critical level flows, *J. Atmos. Sci.*, **33**, 2276-2284.

Fukushima, M., K. Akita and H. Tanaka, 1974: Sodar-probing of small-scale ordered motions appeared in the atmospheric planetary boundary layer, *J. Met. Soc. Japan*, **52**, 428-439.

—, — and —, 1975: Night time profiles of temperature fluctuations deduced from two-year sodar observation, *J. Met. Soc. Japan*, **53**,

487-491.

Garrett, C. and W. Munk, 1975: Space-time scales of internal waves: A progress report, *J. Geophys. Res.*, **80**, 291-297.

Geller, M.A., H. Tanaka and D.C. Fritts, 1975: Production of turbulence in the vicinity of critical levels for internal gravity waves, *J. Atmos. Sci.*, **32**, 2125-2135.

Hazel, P., 1967: The effect of viscosity and heat conduction on internal gravity waves at a critical level, *J. Fluid Mech.*, **30**, 775-784.

Jones, W.L., 1968: Reflexion and stability of waves in stably stratified fluids with shear flow: A numerical study, *J. Fluid Mech.*, **34**, 609-624.

— and D.D. Houghton, 1971: The coupling between internal gravity waves, and mean flow: A numerical study, *J. Atmos. Sci.*, **28**, 604-608.

Justus, C.G., 1973: Upper atmospheric mixing by gravity waves, AIAA Paper No. 73-495, presented at the Conference on Environmental Impact of Aerospace Operations in the High Atmosphere, June 1973, Denver.

Koppel, D., 1964: On the stability of flow of a thermally stratified fluid under the action of gravity, *J. Math. Phys.*, **5**, 963-982.

Lindzen, R.S., 1968: Lower atmospheric energy sources for the upper atmosphere, *Met. Monogr.*, **9(31)**, 37-46.

Manson, A.H., J.B. Gregory and D.G. Stephenson, 1975: Winds and wave motions to 110 km at mid-latitudes, IV, Coupling between internal gravity waves and the mean flow, *J. Atmos. Sci.*, **32**, 1682-1688.

— and C.E. Meek, 1976: Internal gravity waves in the mesosphere and lower thermosphere at mid-latitudes, *J. Atmos. Sci.*, **33**, 1650-1656.

Maslowe, S.A., 1972: The generation of clear air turbulence by nonlinear waves, *Stud. Appl. Math.*, **51**, 1-16.

松野太郎, 1976: 中層大気循環の数値モデリング, MAP 計画会議および特別シンポジウム報告書, 244-258.

—, 1977: 成層圏の気象——突然昇温を中心として——, *科学*, **47**, 2-10.

Metcalf, J.I., 1974: On the origin of structure of radar echo layers in the clear atmosphere, *Tech. Rept. No. 34*, Laboratory for Atmospheric Probing, The University of Chicago.

Miles, J.W., 1961: On the stability of heterogeneous shear flow, *J. Fluid Mech.*, **10**, 496-508.

Rosenberg, N.W., 1968: Statistical analysis of ionospheric winds-II, *J. Atmos. Terr. Phys.*, **30**, 907-917.

Tanaka, H., 1975a: Quasi-linear and non-linear interactions of finite amplitude perturbations in a stably stratified fluid with hyperbolic tangent shear, *J. Met. Soc. Japan*, **53**, 1-32
 —, 1975 b: Turbulent layers associated with a critical level in the planetary boundary layer, *J. Met. Soc. Japan*, **53**, 425-439.
 田中 浩, 1975 a: 安定成層流体中の波動伝播と一般場との相互作用, 第7回乱流シンポジウム報告書, 33-38.
 —, 1975 b: 内部重力波の理論, 気象研究ノート, **126**, 245-289.

—, 1976 a: 成層圏・中間圏(熱圏下部を含む)の乱流生成機構, IS レーダシンポジウム報告書, 総合研究(B), 90-103.
 —, 1976 b: 成層圏・中間圏の乱流, MAP 計画会議および特別シンポジウム報告書, 291-294.
 Thorpe, S.A., 1973: Turbulence in stably stratified fluids: A review of laboratory experiments, *Boundary Layer Met.*, **5**, 95-119.
 Woods, J.D. and R.L. Wiley, 1972: Billow turbulence and ocean microstructure, *Deep-Sea Res.*, **19**, 87-121.

第19期第6回常任理事会議事録

日 時 昭和52年4月27日(木) 14.00~17.00

場 所 気象庁海洋気象部会議室

出席者 岸保, 小平, 浅井, 朝倉, 内田, 奥田, 門脇, 神山, 杉本, 立平, 股野

報 告

〔庶務〕 1. 3月30日, トヨタ財団昭和52年度事業助成の案内がきた(昭52.11.1~53.10.31に開催される国際的学術研究集会 〆切5月31日).

2. 4月2日, 松永記念科学振興財団から松永賞贈呈候補者推薦依頼がきた(〆切6月30日).

3. 4月4日, 文化庁から新漢字表試案が送られてきた(意見があれば5月末日まで提出のこと).

4. 4月25日, 第19期選挙管理委員長から委員長就任承諾と学術会議会員候補者推薦選挙告示について報告があった.

5. 第24回風に関するシンポジウムの運営委員に花房静男会員を推薦した.

〔長期計画〕 気象学第3次長期計画(1965年2月)への反省について報告.

〔天気〕 論壇の新設について, 気象学ないしその関連分野の学問上の方法論, 大気科学全般の研究問題, 学会活動をより充実させ, 発展させてゆくための提案, 気象学の将来についての長期的展望と基礎的考察に立ったコメントなどについて, 「会員のひろば」よりもう少しつつこんだ議論を展開したり, 広く会員の建設的意見などを発表しあう場として, 論壇の欄を新設したい. 長さは印刷2頁以内とする. 原則として会員の投稿を主体とする.

〔奨励金, 各賞〕 トヨタ財団の研究助成については学会として申請したい. また, 松永賞は, 理事会で候補者を出すようにしたい.

〔会計〕 3月分収支および昭和51年度決算書について報告. 監事の要望により, 各委員会へ渡した51年度の経費について3月末の決算書を提出していただくようお願いしたい.

〔気象集誌〕 投稿を要望する.

〔気象研究ノート〕 131号「スペクトル解析」は印刷中. 132号「都市気候一人間活動による気象・気候の変化」は, 浅井, 朝倉両会員に翻訳・編集して貰っている.

〔講演企画〕 3会場ともスライドおよびオーバーヘッドプロジェクターを準備する.

〔南極〕 POLEX-SOUTHについてのインフォーマルミーティングの開催について.

1. 5月の春季大会期間中にやりたい.

2. 話題提供は, 川口氏(極地研), 田中氏(東北大)他に2~3名.

3. 観測計画についての意見を聞く.

4. “まとめ”を天気に投稿.

〔学術会議〕 有権者登録, 地球物理関係240名. 大部分が気象関係である. 総会の報告(詳細は天気に掲載)があった.

議 題 1. 春季大会の準備について.

理事長あいさつ, 事業経過報告, 事業計画等について原案承認.