

富士山：「吊し雲」の写真測量*

(1) 計算公式

大沢研究室**

要旨

天体写真法によれば、乾板の中心位置に位置の既知の星を入れて撮影することにより、同時に撮影された星の位置を計算により求めることができる。雲点の位置を決定するためのこの方法は、位置のわかっている2つの点（例えば山頂など）を同一画面に、位置を知りたい雲も同時に2地点で撮影する。それぞれの画面で、まずフィルムを中心の位置を計算によって決定し、そののち、天体写真法の公式を用いて雲点の位置を決定しようとするものである。実際には写真の引き伸しを行っているが、フィルムから印画紙への引き伸し倍率は、計算により決定できる。この方法による位置の精度は、方位角、高度角共に ± 0.2 度程度であるから充分実用に耐えられる。

1. はじめに

雲の位置、高度を知ることは、局地的な気象の状態を知るうえで、大きな手助けとなる。従来の雲の観測は目視が一般的であり、観測者個人の主観が入る恐れが多分にあった。そこでここに、手軽でしかも正確に雲の位置及び高度を測定する方法として、小型 35 mm カメラを使用する方法を紹介する。この方法は天体写真の方法を利用したものである。

2. 方法

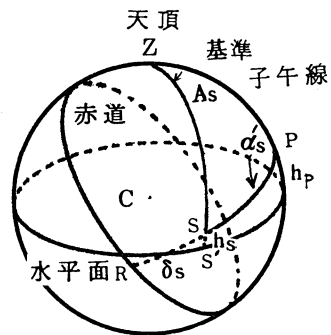
2.1. 赤道座標

初めに、写真上の測定から雲点の方位角及び、高度角を求めるために、赤道座標を導入する。

赤道座標とは天球の赤道面を基準にとった球座標のことであり、この座標の緯度、経度を赤緯、赤経と呼ぶ。

* Photogrammetry of a cloud "TSURUSHIGUMO" observed in the lee of Mt. Fuji—First part: Method of calculation.

** Koichiro Osawa and his collaborators, 東京理科大学理工学部物理学科, 大沢綱一郎, 勝山 税, 石川原節男, 加藤寿一, 加納龍夫, 小坂英之, 佐々木康二, 土肥亮一, 長島 浩, 渡部淳一



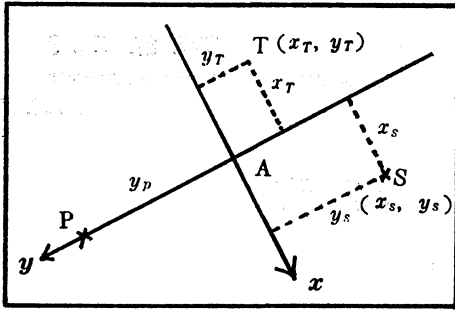
第1図 天球、赤道及び地平座標系。

一般に赤経 0° の基準には春分点をとり東回りに測る。赤緯は北を正、南を負にとることになっている。

以上のように赤道座標とは天球を球座標で表わす方法である。そこで我々は、天球の一点を極P(赤緯 $+90^\circ$)とし、点Pと天頂Zを結んでできる大円を基準子午線(赤経 0°)とし、時計回りに赤経を測ることにする。この様子を第1図に示す。

2.2. 天体写真法

天体写真の解析法は W.M. Smart により示されている。まず画面の中心 A の赤経 α_A 、赤緯 δ_A がわかる



第2図 写真上(印画紙上)にとられた x - y 座標系.

と(実際の天体写真では、赤経、赤緯が既知である星を画面の中心におく)点 A と P 極を結ぶ直線を y 軸 (y 軸の正の方向は、赤緯が増加する方向にとる. 実際の天体写真では、座標の y 軸が、常に天の極を向くように調整されている)とする. y 軸と点 A で直交する直線を x 軸 (x 軸の正の方向は、赤経の増加する方向にとる)とする(第2図参照).

未知の星の赤経 α 、赤緯 δ を求めるには、 x - y 座標でその星の位置 (X , Y) を読みとり、次式を用いる. ここで、 f はカメラの焦点距離、 m は引き伸ばし倍率である.

$$\xi = \frac{X}{mf} \quad (1)$$

$$\eta = \frac{Y}{mf} \quad (2)$$

$$\tan(\alpha - \alpha_A) = \frac{\xi \sec \delta_A}{1 - \eta \tan \delta_A} \quad (3)$$

$$\cot \delta \sin(\alpha - \alpha_A) = \frac{\xi \sec \delta_A}{\eta + \tan \delta_A} \quad (4)$$

2.3. 印画紙の中心の赤経、赤緯

我々が雲の写真を書した場合、印画紙の中心(光軸がこの点に届いていると仮定しての話であるが)の向いている向きは不明のわけである. 従って、計算により、印画紙の中心の赤経 α_A 、赤緯 δ_A を求める工夫をする.

まず印画紙の画面内に2つの基準点を設定する(第2図参照). 1つは極 P (赤緯 $+90^\circ$ の点)とし、他の1つを第2の基準点ということと S とする. S 点は赤経 α_s 赤緯 δ_s とする. 第1図より、 P の高度角を h_p 、 S の高度角を h_s 、 P と S の水平面での方位角を A_s とすると、 α_s 、 δ_s は次式によって求められる.

$$\delta_s = \sin^{-1}(\sin h_p \sin h_s + \cos h_p \cos h_s \cos A_s) \quad (5)$$

$$\alpha_s = \sin^{-1}\left(\frac{\cos h_s \sin A_s}{\cos \delta_s}\right) \quad (6)$$

印画紙の中心の赤経と赤緯を求めるには、印画紙上で S 点の位置を測定し、(3)式、(4)式において未知の点を S 点におき換える. 印画紙上の S 点の x 座標及び y 座標の値を x_s 、 y_s とすると、(1)式、(2)式から、

$$\xi_s = \frac{x_s}{mf}$$

$$\eta_s = \frac{y_s}{mf}$$

を得る.(3)式、(4)式に代入すると、

$$\tan(\alpha_s - \alpha_A) = \frac{\xi_s \sec \delta_A}{1 - \eta_s \tan \delta_A} \quad (7)$$

$$\cot \delta_s = \frac{\xi_s \sec \delta_A}{(\eta_s + \tan \delta_A) \sin(\alpha_s - \alpha_A)} \quad (8)$$

となる. この2式中 α_A と δ_A 以外はすべて既知量であるので、この2式を連立させて解くことにより、 α_A と δ_A を決定できる. 整理すると、

$$\delta_A = \tan^{-1}\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \quad (9)$$

$$\alpha_A = \alpha_s - \tan^{-1}\left(\frac{\xi_s \sec \delta_A}{1 - \eta_s \tan \delta_A}\right) \quad (10)$$

ここで、 a 、 b 、 c は、

$$\left. \begin{aligned} a &= -\cot^2 \delta_s + \xi_s^2 + \eta_s^2 \\ b &= -2\eta_s(1 + \cot^2 \delta_s) \\ c &= -\eta_s^2 \cot^2 \delta_s + \xi_s^2 + 1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

で表される諸量である. 又、(9)式における複号は、 a の値が正のときに+符号、負のとき-符号をとる. これは写真内に、赤緯 90° の点が写るとすると、画面内の点の赤緯は 0° から 90° の間にあることになる. すると、(9)式の括弧内は正でなければならない. 従って、 a が正の時には括弧内の分子が正でなければならない. そのため、複号は+でなければならない. a が負の時には括弧内の分子は負でなければならない. 複号は-符号を選ぶことになる.

ここで写真を写す時の注意であるが、第1基準点が画面の中心 A に近いと、画面上で測定の基となる y 軸が描けなくなるので、第1基準点 P は画面の中心から適当にはなれていることが必要である. 第2基準点 S が中心 A に対し第1基準点 P の反対側にある時、一般に、(11)式の a は負となるので、(9)式ではマイナス符号をとる.

2.3. 引き伸し倍率

測定をする為には写したネガフィルムを適当な大きさの印画紙に引き伸ばさねばならない。その時の引き伸し倍率を計算によって求める。引き伸し倍率は収差のために、印画紙の縦横の長さを測定しても正確には計算できない。従って、画面内で測定した値を用いて、引き伸し倍率を求める工夫をする。

引き伸し倍率を求めるには、画面の中心のA点の赤緯 δ_A が2通りの表わし方ができることを利用する。中心の赤緯 δ_A は、

$$\delta_A = 90^\circ - \widehat{PA}$$

ここで \widehat{PA} は、

$$\widehat{PA} = \tan^{-1} \left(\frac{\overline{PA}}{mf} \right)$$

で表わされるので、印画紙上の \overline{PA} の長さを y_p とすると、

$$\delta_A = 90^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{y_p}{mf} \right)$$

である。これを变形して、

$$\tan \delta_A = \frac{mf}{y_p} \tag{12}$$

(12)式と(9)式、(11)式より (mf) について整理すると、

$$\begin{aligned} \cot^2 \delta_s (mf)^4 - (x_s^2 + y_s^2 + y_p^2 \\ - 2y_s y_p (1 + \cot^2 \delta_s)) (mf)^2 \\ - (x_s^2 - y_s^2 \cot^2 \delta_s) y_p^2 = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

の4次式となる。この4次式は偶数次の項と定数項しかないので、簡単に解くことができる。 (mf) の値は正である。

2.4. 雲のポイントの赤経、赤緯

(3)式、(4)式から雲のポイントの赤経 α_T 、赤緯 δ_T を求める。

$$\alpha_T = \alpha_A + \tan^{-1} \left(\frac{\xi_T \sec \delta_A}{1 - \eta_T \tan \delta_A} \right) \tag{14}$$

$$\delta_T = \cot^{-1} \left\{ \frac{\xi_T \sec \delta_A}{(\eta_T + \tan \delta_A) \sin(\alpha_T - \alpha_A)} \right\} \tag{15}$$

ここで、 ξ_T 、 η_T は T 点の座標を (x_T, y_T) として、

$$\xi_T = \frac{x_T}{mf}, \quad \eta_T = \frac{y_T}{mf}$$

であらわされている。

2.5. 赤道座標と地平座標

T 点の赤経 α_T 、赤緯 δ_T から、T 点の P 点からの方位角 A_T 、高度角 h_T を求める。球面三角形 ZPT にお

いて、

$$\begin{aligned} \cos \widehat{TZ} &= \cos \widehat{PZ} \cos \widehat{PT} + \sin \widehat{PZ} \sin \widehat{PT} \cos \angle TPZ \\ \therefore h_T &= \sin^{-1} (\sin h_P \sin \delta_T + \cos h_P \cos \delta_T \cos \alpha_T) \end{aligned} \tag{16}$$

$$\frac{\sin \widehat{PT}}{\sin \angle PZT} = \frac{\sin \widehat{ZT}}{\sin \angle ZPT}$$

$$\therefore A_T = \sin^{-1} \left(\frac{\sin \alpha_T \cos \delta_T}{\cos h_T} \right) \tag{17}$$

により求めることができる。

2.6. 三角測量

以上の操作により、相互の間の距離が既知である2つの観測地点からそれぞれ方位角 A_T と高度角 h_T を求め、三角測量の方法で雲のポイントの位置、高度が決定される。

3. 結果の精度

この写真測量による測量の結果生じる誤差の原因を考えてみたい。

3.1. 誤差を生ずる諸原因

誤差を生ずる諸原因として考えられるものを列記すると、

- ①カメラレンズの光軸がフィルムの中心に達しているかどうか。
- ②フィルムが光軸に対し直角であるかどうか。
- ③フィルムの平面性はどうか。
- ④印画紙上の x 軸、 y 軸が直交しているかどうか。
- ⑤フィルム、印画紙に水洗はつきものであるが、この水洗による伸縮の具合はどうか。
- ⑥光学レンズ(カメラ、引き伸し機)の歪曲収差の影響はどの程度か。

等が考えられる。

3.2. 誤差の程度

①に対する誤差の程度は、カメラメーカーに問い合わせたところ、次のような意見を得た。「レンズを設計する段階では、光軸が画面の中心にくる様設計してある。が、レンズ、ボディの生産後には、この値を実験によって求めてはいない。」とのことであった。今仮りに、光軸が画面の中心に対し 0.01 mm のズレを生じているとすると、焦点距離 24 mm の広角レンズの場合、その影響は画面上の角度で表わして 0.02 度程になる。従って光軸が画面の中央に達しているとみなしてさしつかえない。

②に対しては、カメラは光軸とフィルム面が直角にな

様に設計されている。この誤差も微小であると考えられる。

③のフィルムの平面性について考えてみる。一般的な写真測量用のカメラは乾板を使うなどしてこの影響を避けている。今回使用した 35 mm カメラでは、フィルムを固定する等の方法を施すことができない。そこでフィルムを装着する際には注意を怠らないようにすること。また、フィルムの巻き始めはフィルムが安定していないので、4～5枚カラ撮りをしてから写真測量用の撮影をした方がよい。

④に対しては、明らかに両軸が直交していないのがわかるというのでは論外であるが、わずか程度の非直交であるなら、誤差が線型に表われてくるので測定値を補正することができる。

⑤について考える。フィルムや印画紙の伸縮の原因としては、湿度、気温、経年変化、現像処理等がある。これ等は慎重にとり扱うことによって、フィルムに対しては 0.1% 以内の伸縮でおさめることができる。印画紙は中厚手の光沢紙で画面にビニール防水加工を施したものをを用いることにより 0.3% 以内の伸縮でおさめることができる。

⑥に対して考えてみる。私達が用いたニッコールレンズ焦点距離 24 mm, 明るさ F2.8 の歪曲収差は通産省工業技術機械技術研究所の実験により最大 -2.7% のタル型の特性を持っていることがわかっている。又、我々が使用した引き伸し機のレンズの歪曲収差は正式な測定は行っていないが概算で 1～2% の糸巻き型の収差をもっていた。

以上のように種々な原因があるので、これ等を一つ一つ解析するのではなく、トランシット測量による実測値と写真測量による計算値とを比較することにより誤差の程度を求めてみた。

3.3. トランシット測量

測量に用いた場所は、東京電力東部変電所傍の東京理科大学校地である（注 現在は東京電力株式会社所有地となっている）。そこには写真を見てわかるように北から北東の方向にかけて大小の送電鉄塔が立ち並んでいる。その中の鉄塔の数点をポイントとみためて、トランシット測量を試みた。

測定に用いたトランシットは水平角度の最小の読みとり目盛が 1 分、高度角の最小読みとり目盛が 5 分のものである。測定に際しては、6 回繰り返して（反復法を使用）行い、平均と平均自乗誤差を計算した。その結果

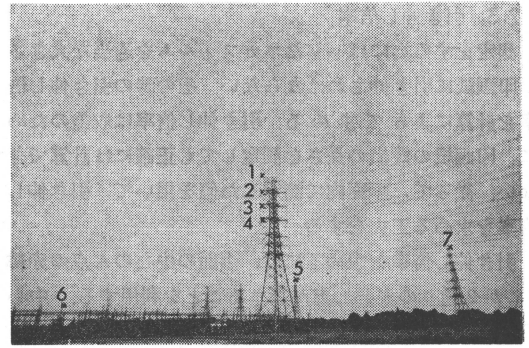


写真 測量を行った場所

第 1 表 トランシット測量の結果

ポイント番号	方位角 (単位度)	高度角 (単位度)
1	29.28 ± 0.02	23.63 ± 0.05
2	28.51 ± 0.01	20.68 ± 0.04
3	28.50 ± 0.02	18.51 ± 0.07
4	28.51 ± 0.02	16.33 ± 0.00
5	33.75 ± 0.06	7.18 ± 0.04
6	0	3.58 ± 0.00
7	57.57 ± 0.01	9.85 ± 0.01

を第 1 表に示したが、平均自乗誤差の値が水平角で 2～3 分、高度角でトランシットの最小読みとり角度の 5 分以内となったので、このトランシット測量の結果は十分に信頼できるものである。

3.4. 写真測量

写真測量に用いた機材は、カメラボディがニコン F、レンズがニッコールレンズ焦点距離 24 mm, 明るさ F2.8, それに三脚を使用し、トランシット測定的位置とカメラの撮影位置とが違わないよう注意した。

写真測量の計算には 2 つのポイントが必要である。そこで第 1 基準点としてポイント番号 6 を、第 2 基準点としてポイント番号 7 を使用した。計算の際にはこれ等の方位角、高度角が必要であるので、トランシット測量の結果を使用した。

3.5. 両測定の違い

写真測量による結果を第 2 表に示した。第 1 表と第 2 表を較べたところ、写真測量によって方位角、高度角ともに ±0.2 度の精度で写真測量によって得られていることがわかった。我々が富士山で吊し雲の写真測量を行った際には、観測点の基線距離が 10 km であったので、

第2表 写真測量の結果 (ポイント番号6, 7は基準点として使用したため, 表より除外した).

ポイント番号	方位角 (単位度)	高度角 (単位度)
1	29.3	23.7
2	28.6	20.6
3	28.5	18.5
4	28.5	16.3
5	33.8	7.0

両観測点から 20 km で高さ 10 km の雲が, 水平距離で ± 200 m, 高度で ± 200 m の精度を持つことがわかった.

4. まとめ

この写真測量法の最も良い所は, 手軽であるということである. この方法で私達は富士山の吊し雲について観測したわけだが, 吊し雲の全容をなるべく正確にとらえるのに都合の良い観測点を富士山周辺の山々に求めたわけである. その為観測の装備は最小限度にとどめた. 写真経緯儀の方法では, 光軸の向いている方向を記録しな

ければならない. これは現場で写真撮影の際に非常な負担となるし, 後日の整理の際に誤りを犯しやすい. その点, ここで紹介した方法は2つの基準点が写真中に写っていさえすれば光軸の向いている方向が計算できるので, 雲の動きや, 作画に専念できる利点があり, 精度も十分に実用に耐えられる.

最後に, 観測にあたっては, 河口湖測候所長の軽部久夫氏をはじめ所員のみなさん, 足和田村役場の方々, それに三ツ峠山荘の中村璋氏, 河口湖の基地としてお世話になった湖帆荘の宮下昭夫氏, 御協力ありがとうございました. また学内にあっては, 測量学のことで土木工学科の丸安隆和教授, 大林成行助教授, 土木工学科の学生の皆さん, 電算機の使用にあたっては経営工学科の三浦義一氏に大変御世話になりました. 心からお礼申し上げます.

文 献

- 渡邊正之, 石丸雄吉, 吉成邦雄共編, 1930: 測雲報告, pp. 65, 中央気象台.
 Smart, W. M., 1965: *Astronomical Photography*, Chap. XII, *Spherical Astronomy*, Cambridge Univ. Press, 278-313.
 丸安隆和, 1978: 測量学, 上・下, コロナ社.