1981年2月　天　気　Vol. 28, No. 2

551. 511. 32

順圧不安定の力学*

新 野　宏**

1. はじめに

大気中の大規模な流れが持つ不安定性の中で，特に重要と思われるものは2つある．第1は傾圧不安定と呼ばれるもので，Charney (1947)・Eady (1949) の理論が登場して以来，日々の天気変化をひきおこす中緯度の高・低気圧の成因としてよく知られている．これに対し，第2の不安定性が，ここで解説を試みようとする順圧不安定である．

順圧不安定 (barotropic instability) という言葉がいつ頃から正式に使われ始めたかは定かでない．筆者の知る限りでは Thompson (1953) がその論文の中で使っているのが一番古い例である．それまでは，Kuo (1949) の先駆的な論文以来，順圧大気（順圧流）の力学的不安定 (dynamic instability in a barotropic atmosphere (barotropic flow)) と呼ぶのが普通であった．

大気中の大規模な運動が準地衡風および準静水圧平衡にあることはよく知られている．地衡風および静水圧の関係は，速度場を $\boldsymbol{v}=(u,\ v,\ w)$ と書くとき，

$$f\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p-g\boldsymbol{k} \qquad (1.1)$$

で与えられる．ここに $u,\ v,\ w$ は東西・南北・鉛直方向の速度成分であり，f はコリオリ係数，g は重力加速度，ρ は密度，p は圧力，そして $\boldsymbol{k}$ は鉛直方向の単位ベクトルである．(1.1) に ∇ をベクトル乗積し，水平成分をとると，温度風の式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_H}{\partial z}=-\frac{1}{f\rho^2}(\nabla\rho\times\nabla p)_H \qquad (1.2)$$

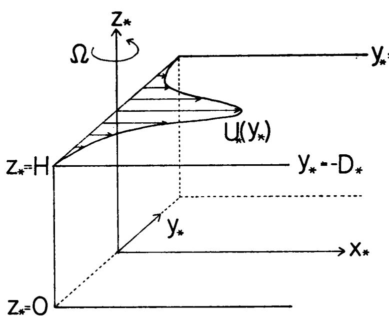
を得る．順圧な場，すなわち ρ が p のみの関数であるような場においては，(1.2) の右辺は0になる．このとき，流れは鉛直方向に変化しない．そこで，しばしば鉛直方向に変化しない流れを順圧流と呼ぶ．順圧不安定は，このように鉛直方向にシアーを持たない流れに存在する不安定である．これに対して，傾圧場においては (1.2) の右辺は0でない．このとき，流れは鉛直方向にシアーを持ち，シアーの強さがある値より大きいならば，傾圧不安定が生ずる．ここで注意を要するのは，傾圧流においても流れが適当な水平シアーの分布を持てば順圧不安定が生ずる可能性があることである．従って，先に述べた順圧不安定の定義は多少不正確であったと言えるかも知れない．厳密には，順圧不安定は，流れの渦度の水平分布の不均一性に根ざした不安定であると言うべきであろう．一般に水平シアーを持った傾圧流においては，鉛直シアーによって変形を受けた順圧不安定擾乱と水平シアーの影響を受けた傾圧不安定擾乱が生ずる可能性がある．

エネルギー収支から見ると，順圧不安定擾乱は基本場の運動エネルギーから擾乱のエネルギーを供給される．これに対して，傾圧不安定擾乱は基本場の有効位置エネルギーからエネルギーを得る．従って，水平シアーを持った傾圧流に生じる不安定が順圧不安定によるものか傾圧不安定によるものかを調べるには，擾乱のエネルギーが基本場の2つの形のエネルギーのうちどちらから多く供給されているかを調べればよいであろう．現実の大気中の不安定擾乱は純粋に順圧的又は傾圧的な過程のみによって生じているということはありえない．そういう意味では，水平シアーを持つような傾圧流の安定性を調べることが最も興味深いと思われる．しかし，上で述べたように，順圧不安定は水平シアー流中の渦度分布の不均一性に起因する不安定であるから，成層の効果等は本質

---

* Dynamics of barotropic instability.

** Hiroshi Niino, 東京大学海洋研究所大学院生



第1図　モデルの模式図

的でない．従って，順圧不安定に備わった基本的性質を調べたい時には傾圧性の存在はかえって問題を複雑にするのみであろう．この小稿の目的は，順圧不安定の基本的性質を解説することにあるので，ここでは本質的でない効果はすべて除いた最も簡単なモデルに生ずる順圧不安定の性質を調べることにする．

2. 問題設定

第1図に示したような深さ H の非粘性・非圧縮・密度一様の流体層を考える．系全体は鉛直軸（z_* 軸）のまわりに角速度 Ω で回転している．慣例に従って x_* 軸を東向き，y_* 軸を北向きにとり，コリオリ係数 $f(=2\Omega)$ は $f=f_0+\beta_* y_*$ で与えられるとする（β-平面近似）．流体層は $z_*=0$, H にある水平な面によって仕切られ，y_* 方向には $y_*=\pm D_*$ にある鉛直壁によって仕切られるか或いは無限に流体層が続いているかのどちらかであるとする．このような系において，y_* 方向にのみシアーを持つ東西流 $U_*(y_*)$ の安定性を調べるのが目的である．

今，時間変化のゆっくりとした水平スケールの大きい運動に着目するとすれば運動はほとんど水平的になり，現象は準地衡風の渦度方程式，

$$\frac{\partial}{\partial t^*}\nabla^2{}_*\psi^*+\frac{\partial\psi^*}{\partial y^*}\cdot\frac{\partial}{\partial x^*}\nabla^2{}_*\psi^*-\frac{\partial\psi^*}{\partial x^*}\frac{\partial}{\partial y^*}\nabla_*{}^2\psi^*+\beta_*\frac{\partial\psi_*}{\partial x_*}=0 \tag{2.1}$$

で記述される．ここに ψ^* は水平面内における流線関数で，速度成分 u_*, v_* は，

$$u_*=\frac{\partial\psi_*}{\partial y_*},\quad v_*=-\frac{\partial\psi_*}{\partial x_*}$$

で与えられる．基本場の東西流と，その上に重なった擾乱を表わす流線関数をそれぞれ $\psi_{0*}(y)$, $\psi_*'(x,y,t)$ と書くことにする．基本場の東西流の代表的な速度を V, シアー・ゾーンの幅を L とし，長さを L, 時間を L/V, 流線関数を VL で無次元化すると，(2.1) は，

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi'+\frac{d\psi_0}{dy}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\psi'+\left(\beta-\frac{d^3\psi_0}{dy^3}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial x}=-\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\psi'+\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\psi'\cdot\frac{\partial\psi'}{\partial x} \tag{2.2}$$

と書ける．ここで，無次元の β は，

$$\beta=\frac{\beta^*L^2}{V} \tag{2.3}$$

で与えられる．

(2.2) は適当な境界条件と初期条件が与えられたとき，基本流の上に重なった擾乱の振舞を記述する．もしも，この擾乱の振幅が時間と共に0に近づくならば，この基本流は安定である．逆に，その振幅が時間と共に増大したり，いくら時間がたっても0にならずに有限の値にとどまる場合には，基本流は不安定である．従って，基本流の安定性を調べるには，(2.2) で記述されるような擾乱が時間的にどのように振舞うかを調べれば良い．

3. 線形不安定論

与えられた流れが安定かどうかを判定する際に，最も多く使われる手法は線形不安定論と呼ばれる手法である．この手法は次のような考えに基づいている．自然界の流れの中には，基本場の流速にくらべてはるかに小さな振幅のノイズ（以下では擾乱と呼ぶ）が必ず存在している．このような非常に小さな振幅の擾乱が時間的に増幅してくるならば，流れは不安定であろう．

擾乱の振幅の大きさを ε で表わすと，(2.2) の右辺は $O(\varepsilon^2)$ となる．従って，$\varepsilon\ll 1$ の仮定の成り立つ範囲で，非線形であった (2.2) 式は線形の方程式，

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi'+U\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\psi'+\left(\beta-\frac{d^2U}{dy^2}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial x}=0 \tag{3.1}$$

で近似できることがわかる．ここで $U(y)$ は無次元化された基本流で，$U(y)=U_*(y_*)/V$ である．(3.1) は ψ' に関して線形なので，ψ' を，

$$\psi'(x,y,t)=Re\left[\int_{-\infty}^{\infty}\phi_k(y,t)e^{ikx}\,dk\right] \tag{3.2}$$

のように x 方向のフーリエ成分 ϕ_k の和（積分）として表わすとき，任意の ψ' に対する解は $\phi_k(y,t)e^{ikx}$ に

対する解の重ね合わせとして表現できる．(3.2)を(3.1)に代入すると ϕ_k は，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+ikU\right)\left(\frac{\partial^2\phi_k}{\partial y^2}-k^2\phi_k\right)+ik\left(\beta-\frac{d^2U}{dy^2}\right)\phi_k$$
$$=0 \qquad (3.3)$$

を満たす．(3.3) は適当な境界条件，

$$y=\pm D\left(\equiv\frac{D^*}{L}\right) \text{ で } v_k=ik\phi_k=0$$

又は， (3.4)

$$y\longrightarrow\pm\infty \text{ で } \phi_k\longrightarrow 0$$

を与えるとき，初期値問題として解くことができる．すなわち，ある時刻 $t=0$ に擾乱 $\phi_k(y,0)$ を与えたとき，この擾乱が (3.3) に従ってどのように振舞うかを調べるわけである．もし，擾乱 ϕ_k が時間と共に増幅するような波数 k が1つでも存在すれば，流れは不安定である．

上記の初期値問題を一般的に解くことは容易でない場合が多い．そこで，普通は擾乱の時間的な振舞にある仮定を設けて，問題を固有値問題に帰着して解くことが行なわれる．すなわち，(3.3) の解として $\phi_k(y,t)=\phi(y)e^{-i\omega t}$ のように変数分離が可能な解を仮定する．このとき，(3.3) および (3.4) は，

$$(U-C)\left(\frac{d^2\phi}{dy^2}-k^2\phi\right)+\left(\beta-\frac{d^2U}{dy^2}\right)\phi=0 \qquad (3.5)$$

$$y=\pm D \text{ で } \phi=0 \quad \text{または} \quad y\to\pm\infty \text{ で } \phi\to 0 \qquad (3.6)$$

と書ける．ここで，$C=\omega/k$ は複素位相速度である．(3.5)，(3.6) は C に関する固有値問題を構成する．固有値問題の解の集合，すなわち固有関数系がもし完全系をなすならば，任意の初期擾乱 $\phi_k(y,0)$ は固有モードの和として表現できる．従って，その場合には擾乱の時間的な振舞は各固有モードの時間的な振舞の和として表わせる．(以後，1つのモードに対しては〝波〟，モードを重ね合わせて表現されるものに対しては〝擾乱〟という言葉を使うことにする．) 固有値 C は一般には複素数である．C の実部を C_r，虚部を C_i と書くと，各固有モードの時間変化は $e^{-i\omega t}=e^{-ikC_rt}\cdot e^{kC_it}$ となる．従って，C_r は各モードの位相速度，kC_i は成長率を与える．以上のことから，固有値のうちに1つでも $C_i>0$ のものが存在するとき，流れは不安定である．

さて，話がここまで済めば問題は比較的単純なのであるが，実はここにやっかいな問題が存在する．それは，後でわかるように固有値問題の解が有限個しかないという事実である．有限個の関数から成る関数系は完全系を構成することはできないので，結局擾乱の振舞は (3.5)，(3.6) の固有値問題の解としての固有モードだけの重ね合わせでは表現できないことになる．このあたりの事情については第6節で詳しく述べるので，ここでは次のことを指摘しておくにとどめよう．固有値問題を導くには，モードが時間的に $e^{-i\omega t}$ のように振舞うことを仮定した．従って，時間に関して指数関数的に振舞わないようなモードがあったならば，固有値問題の解からはぬけ落ちている可能性がある．Case (1960) は事実そのようなモード (連続モードと呼ばれる) が存在することを示した．しかし，このモードの重ね合わせで表現できる滑らかな形の擾乱は時間に関して $1/t$ で減衰するので，不安定性のみに興味がある場合にはこのモードは重要ではない．従って，以下では特に断わらない限り，固有値問題 (3.5)，(3.6) の解を調べることによって，不安定の特徴を明らかにしていくことにする．

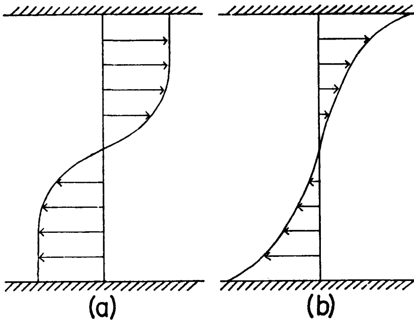
4. 積分定理

固有値問題 (3.5)，(3.6) の固有値や固有解の性質については，(3.5)，(3.6) を実際に解かないでもある程度言及することができる．これらの情報は普通 (3.5) を適当に変形した式を境界から境界まで積分して得られることが多いので積分定理と呼ばれる．ここでは，これらの積分定理のうち特に重要と思われるものをいくつか述べておくことにする．なお，定理の証明はかなり繁雑であるので，証明の方法に興味のある方は引用してある文献を参照して頂きたい．特に Lin (1955)，巽・後藤 (1976)にはほとんどの証明が丁寧に書かれていることを付け加えておく．

4.1. Kuo の定理

「不安定波が存在する為には，速度分布 $U(y)$ が流れの中のどこかで $U''=\beta$ の点を持つことが必要である．」
——Kuo (1949)

この定理は Rayleigh (1880) が非回転系の2次元平行流に対して導いた不安定の為の必要条件「$U(y)$ が $U''=0$ の点 (変曲点) を持たなければならない」の回転系における言い換えである．(ここで，$'=d/dy$.) 回転系の運動を慣性系から見るとき，絶対渦度 Z が $Z=f-U'$ で定義されることに注意すれば，Kuo の必要条件 $U''=\beta$ は $Z'=0$ となり，結局慣性系から見た Rayleigh の条件と同じ内容であることがわかる．この意味で，以下では $U''(y)=\beta$ を満す点 $y=y_s$ を便宜上変曲点と呼ぶこと



第２図　変曲点のある２種類の流れ．(a)変曲点でシアーが極大の流れ　(b)変曲点でシアーが極小の流れ

にする．

変曲点が存在することはあくまでも不安定波の存在の為の必要条件であって，この条件を満しているからといって必ずしも不安定波が存在するとは限らない．事実，Fjϕrtoft (1950) と Hϕiland (1953) は，ある種の流れに対して，より厳しい必要条件を導いている．

4.2. Fjϕrtoft の定理

「$U(y)$ が y の単調な関数で変曲点が唯１つしか存在しない流れにおいて不安定波が存在する為には，変曲点において絶対渦度の絶対値が極大にならなければならない」――Fjϕrtoft (1950)

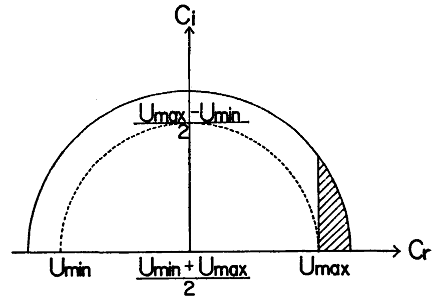
Fjϕrtoft の定理から，第２図に示した２つの流れのうち，(a)は不安定の可能性があるが，(b)は安定であることが結論できる．

4.3. 中立波の存在の条件

「波の位相速度が流れの中のどこかで基本流の流速に等しくなるような中立波が存在する為には，流れは変曲点を持たねばならない．特に，流れが Fjϕrtoft の定理の前提条件を満たす場合には，この中立波の位相速度は変曲点での基本流の流速に等しい．」――Lin (1945)

一般に，波の位相速度が流れの速さに等しくなる位置 $y=y_c$ は臨界点 (critical point)*と呼ばれる．$y=y_c$ は微分方程式 (3.5) の特異点となっているが，Fjϕrtoftの定理の前提条件を満たすような流れにおける中立波に対しては変曲点が臨界点と一致する為に (3.5) に特異点

* 鉛直シアー流中の臨界点は臨界高度 (critical level) と呼ばれる．又，水平シアー流中の臨界点は臨界緯度 (critical latitude) 等と呼ばれることもあるが，水平シアー流に対してはここでは臨界点と呼ぶことにする．



第３図　Pedlosky の半円（実線）．点線は $\beta=0$ の場合の Howard の半円．

は現われない．このような中立波を特異性のない中立モード (non-singular neutral mode, 略して NSNM) 又は正則な中立モード (regular neutral mode) と呼ぶことがある．これに対して，流れが単調でない場合には臨界点と変曲点が一致しないような中立波が可能である．このような中立波は $y=y_c$ に特異点を持つ．一般に臨界点において特異性を持つ中立モードを singular neutral mode (SNM) と呼ぶ．

NSNM は流れの不安定性を調べる上で実用上，非常に役に立つことが多い．それは，以下に見るように多くの流れでは，このモードが存在するときには不安定波も存在し，しかもこのモードの波長が不安定な波数領域と安定な波数領域との境目の波長を与えることが示せるからである．

4.4. 中立波の波数に近い波数を持つ不安定波の存在

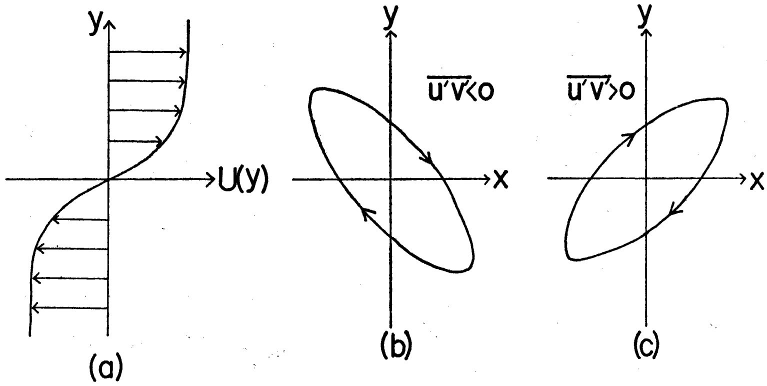
「単調な $U(y)$ において，変曲点 y_s で $U'(y_s)\neq 0$ であり，位相速度 C が $C=U(y_s)$ であるような波数 k_0 の NSNM が存在するとき，k_0 の近傍の波数 $k=k_0+\Delta k$(Δk は $U'(y_s)U'''(y_s)$ と同符号) に対しては不安定波が存在する」――Tollmien (1935) より．

Fjϕrtoft の前提条件が満たされるような流れでは $U'(y_s)U'''(y_s)<0$ なので，もし波数 k_0 の NSNM が存在するならば，この定理によって $k<k_0$ の波数領域においては不安定波が存在することがわかる．

4.5. Pedlosky の半円定理 (Semi-circle theorem)

「基本流の流速の最大値を $U_{\max}$，最小値を $U_{\min}$ とするとき，不安定波の複素位相速度は複素平面上で，$C_i>0$ および，

$$\left(C_r-\frac{U_{\max}+U_{\min}}{2}\right)^2+C_i{}^2\leqq\left(\frac{U_{\max}-U_{\min}}{2}\right)^2+\frac{\beta(U_{\max}-U_{\min})}{2k^2} \qquad (4.1)$$



第4図　(a) $\frac{dU}{dy}$ が正の流れ．(b) $\overline{u'v'}$ が負の渦．(c) $\overline{u'v'}$ が正の渦．

で与えられる半円内の領域になければならない.」―― Pedlosky (1964)

この定理は $\beta=0$ の場合に Howard (1961) が導いた半円定理の $\beta\neq0$ の場合への拡張である．第3図に Pedlosky の半円と Howard の半円がそれぞれ実線と点線で示してある．Pedlosky は更に位相速度 C_r は $U_{\min}-\frac{\beta}{2k^2}<C_r<U_{\max}$ の間になければならないことを示した．このことから，図中で斜線をつけた領域は除かれなければならない．$\beta\neq0$ の場合には，基本流より遅い位相速度を持つ不安定波が存在する可能性があるのは興味深い．

4.6. エネルギー方程式

前節までで，ある種の条件を満たす流れにおいては不安定波が存在しうる可能性があることを見てきた．では，もし不安定波が存在したとすると，この波はどのような形で基本流からエネルギーを得ているのであろうか．このことを見るには，平均流と波に対するエネルギー方程式を導くのが便利である．

流線関数 $\psi(x,y,t)$ を x 方向に平均した場 $\bar{\psi}$ とそれからのずれ $\tilde{\psi}$ に分けて $\psi=\bar{\psi}(y,t)+\tilde{\psi}(x,y,t)$ と表わす．無次元化された(2.1)の両辺に $\bar{\psi}$ をかけて，波の1波長について x 方向に平均し，境界 y_1 から y_2 まで y 方向に積分すると，平均流 $\bar{u}$ に対するエネルギー方程式，

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{y_1}^{y_2}\left(\frac{\bar{u}^2}{2}\right)dy=\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\overline{\tilde{u}\tilde{v}}\,dy \qquad (4.2)$$

を得る．ここで，$\bar{u}=\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}$，$\tilde{u}=\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y}$，$\tilde{v}=-\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y}$である．同様に (2.1) に $\tilde{\psi}$ をかけて積分することにより，波に対するエネルギー方程式，

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{y_1}^{y_2}\frac{\overline{\tilde{u}^2}+\overline{\tilde{v}^2}}{2}dy=-\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\overline{\tilde{u}\tilde{v}}\,dy \qquad (4.3)$$

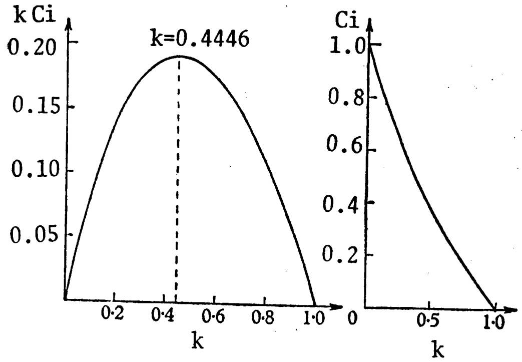
が得られる．(4.2)，(4.3) を見ると明らかなように，波と平均流は $\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\overline{\tilde{u}\tilde{v}}\,dy$ という項を通してエネルギーのやり取りを行なっている．

波による基本流 $\psi_0(y)$ の変形を $\psi_M(y,t)$ で表わすと，平均流 $\bar{\psi}(y,t)$ は $\bar{\psi}(y,t)=\psi_0(y)+\psi_M(y,t)$，波の成分(平均からのずれ) $\tilde{\psi}(x,y,t)$ は $\tilde{\psi}(x,y,t)=\psi'(x,y,t)-\psi_M(y,t)$ で与えられる．線形論においては，ψ_M と $\tilde{\psi}$ は ψ_0 に較べてたかだか $O(\varepsilon)(\varepsilon\ll1)$ であるから，(4.2) の右辺は $O(\varepsilon^2)$ である．これに対して左辺で最も大きい項は ψ_M のオーダーなので，結局 ψ_M は $O(\varepsilon^2)$ でなければならない．従って，ψ_M は $\tilde{\psi}$ に較べて無視できる．このことは線形論を扱う上では，波による基本流の変形 ψ_M は考えなくて良いことを示している．以上のことから，$\bar{u}=U(y)$，$\tilde{\psi}=\psi'$ とおくとき (4.3) は，

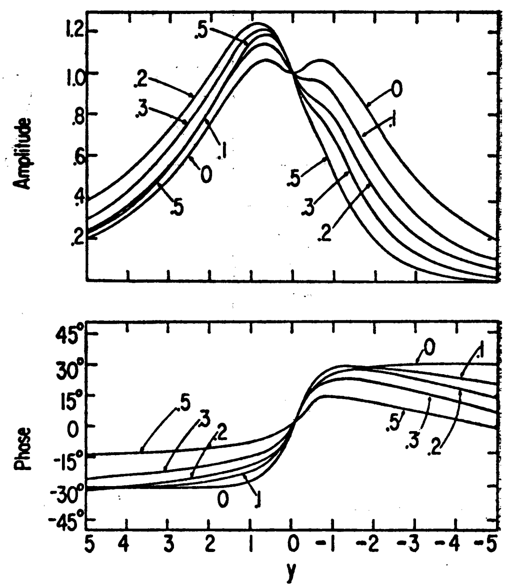
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{y_1}^{y_2}\frac{\overline{u'^2}+\overline{v'^2}}{2}dy=-\int_{y_1}^{y_2}\frac{dU}{dy}\overline{u'v'}\,dy \qquad (4.4)$$

と書ける．

波が増幅する為には (4.4) の右辺が正でなければならない．第4図(a)に示したような $\frac{dU}{dy}$ が正の流れでは $\overline{u'v'}$ がおおむね負であることが必要である．後に見るようにこのような流れに生ずる波は，渦状の形態をとる．渦の軸が第4図(b)のように傾いている時は $\overline{u'v'}<0$ であり，第4図(c)のように傾いている時には $\overline{u'v'}>0$ であるので，固有値問題の結果得られる不安定波は(b)の



第5図　$U(y)=\tanh y$ の流れに生ずる波数 k の不安定波の増幅率 kC_i と複素位相速度の虚部 Ci (Michalke 1964より).



第6図　$U(y)=\tanh y$ の流れに生ずる不安定波の固有関数の振幅と位相の構造．図中の数字は β の値を示し，各 β についてほぼ最大の増幅率を与える波数の不安定波の構造を示してある ($\beta=0$ のとき $k=0.4446$, $\beta=0.1$ は $k=0.5$, $\beta=0.2$ は $k=0.5$, $\beta=0.3$ は $k=0.6$, $\beta=0.5$ は $k=0.6$)．振幅と位相は $y=0$ でそれぞれ1と0になるように規格化してある (Kuo, 1978).

ような軸の傾きを持っているはずである．

5. 不安定波の性質

以上で，順圧不安定の一般的特性については一通り述べてきた．この節では (3.5), (3.6) の固有値問題を実際に解いた結果をいくつか紹介する．基本流としては最も詳しく研究されている $U(y)=\tanh y$ と $\mathrm{sech}^2\, y$ の2つを考える．$U(y)=\tanh y$ は自由シアー層 (free shear layer), $\mathrm{sech}^2\, y$ はジェットの代表的な例である．

(3.5), (3.6) の固有値問題を解析的に解くのは一般に困難である．従って，普通は微分方程式 (3.5) を差分で近似して数値的に解くということが行われる．ここでは，その際に使われる数値解法については立ち入らない．これらの手法について詳しく知りたい方は，Haltiner・Song (1962), Yanai・Nitta (1968), Michalke (1964), Kuo (1978) 等を参照して頂きたい．

5.1. 自由シアー層　$U(y)=\tanh y(-\infty<y<\infty)$

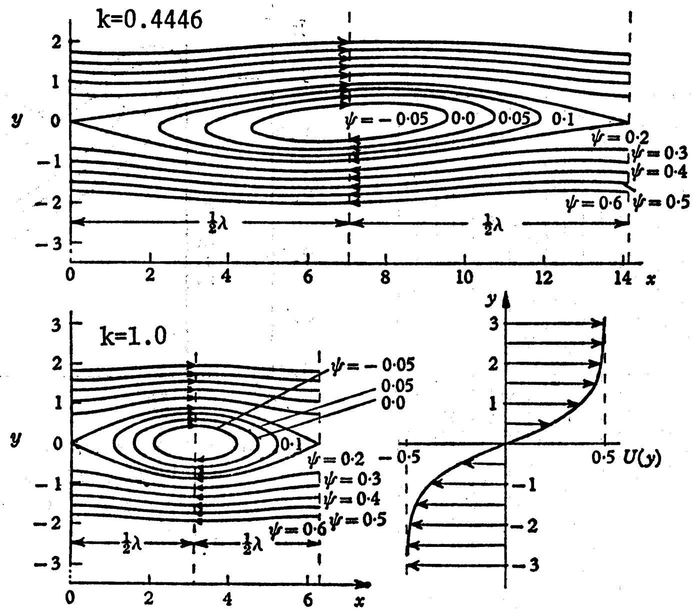
$U(y)=\tanh y$ は第4節で述べた不安定の為の必要条件，中立波の存在の為の必要条件をすべて満たしている．従って，もし特異的でない中立モード (NSNM) が見つかれば，4.4. によって不安定波が存在することがわかる．

a）$\beta=0$ の場合

Garcia (1956) は $\beta=0$ のときの NSNM が，$k=1$, $\phi=\mathrm{sech}\, y$, $C=0$ で与えられることを示した．このことから，4.4. より $k<1$ に対して不安定波が存在することが予想できる．基本流の対称性から期待できるように，波の位相速度 C_r はすべての波数に対して0である (Gotoh・Tatsumi, 1960). Howard (1964) は更に，この基本流においては，1つの波数 k に対して不安定波はたかだか1つしか存在しないことを示した．

Michalke (1964) は $U(y)=0.5\tanh y$ に対する固有値問題を数値的に極めて精度良く解いた．第5図は不安定波の増幅率 kC_i と複素位相速度の虚部 C_i の波数依存性を示したものである．予想された通り，$0<k<1$ の波数に対して，不安定波が存在することがわかる．増幅率最大の波数は 0.4446 である．

第6図は最も不安定な波の振幅と位相の構造 (Kuo, 1978) を示したものである．ここでは図中0で示された曲線に注目してほしい．波の振幅は基本流のシアーの強い領域$(-1<y<1)$で大きくなっていて，この領域から離れるにつれて指数関数的に小さくなっている．(3.5) において $y\to\pm\infty$ と共に $U''\to 0$ であることを考慮すると，$y\to\pm\infty$ での解の形は $e^{\mp ky}$ で与えられる．従って，波の y 方向のスケールは大体 x 方向のスケールに等しいと言って良い．なお，波の振幅が $y=0$ で最大にならずに，むしろ極小になっているのは興味深い．位



第7図　$U(y)=0.5\tanh y$ の流れにおいて，最も不安定な波 ($k=0.4446$) と中立な波 ($k=1$) が振幅0.1で存在したとしたときの基本場も含めた流線 (Michalke, 1964).

相は $-1<y<1$ で急激に変動している他は，ほとんど一定である．$-1<y<1$ での位相の変化の様子は波の軸が第4図(b)のように傾いていることを示している．

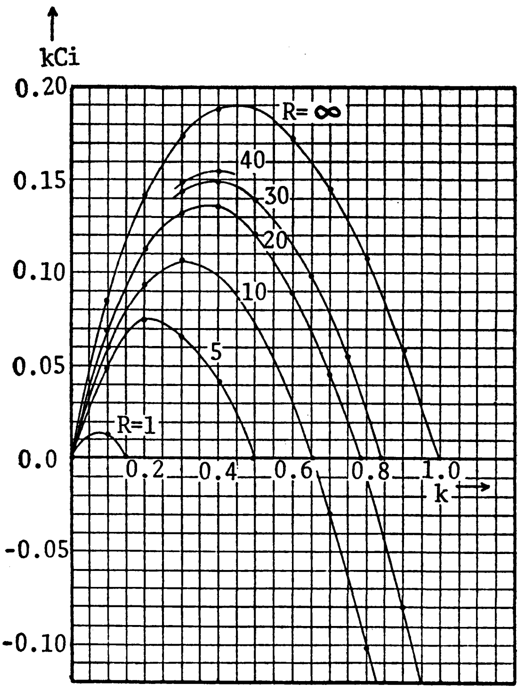
第7図は基本流に振幅0.1の波が重なっているとしたときの流線を描いたものである．上は最も不安定な波，下は中立波である．どちらも右まわりの循環を持った渦状擾乱であるが，中立波ではその長軸が完全に x 方向を向いているのに対し，不安定波では左下から右上に傾いている．

以上，$U(y)=\tanh y$ で与えられる流れの非粘性での安定性を見てきたが，次に内部粘性の存在する時の安定性について簡単に述べる．内部粘性が存在する時，擾乱を支配する式 (3.5) は，

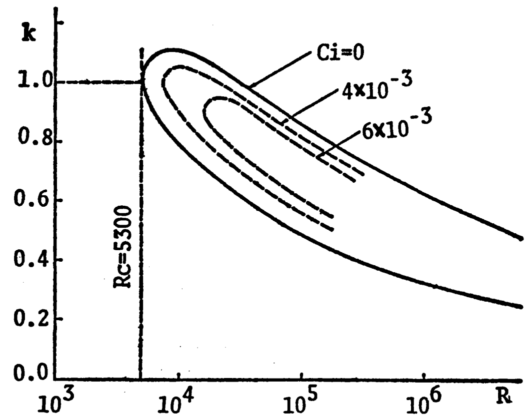
$$(U-C)(\phi''-k^2\phi)-U''\phi = \frac{1}{ikR}(\phi^{iv}-2k^2\phi''+k^4\phi) \qquad (5.1)$$

になる．ここで，$R=VL/\nu$ はレイノルズ数，ν は動粘性係数である．(5.1) は Orr-Sommerfeld の式と呼ばれ，管の中のポアズイユ流や壁に沿った境界層流の安定性を調べるときに重要な式である．Betchov・Szewczyk (1963) は (5.1) を解くことにより，いろいろなレイノルズ数に対する $U(y)=\tanh y$ の安定性を調べた．第8図は波の増幅率の波数依存性をいろいろなレイノルズ数に対して示したものである．非粘性の極限($R=\infty$)では結果は Michalke (1964) のそれと一致している（第5図参照)．レイノルズ数が小さくなるにつれて，中立波の波数，最大の増幅率を持つ波の波数は小さくなる．これは，内部粘性が波数の大きな波においてより有効に働く為である．増幅率もすべての波数にわたって小さくなってくるが，注目されるのはどんなにレイノルズ数を小さくしても流れが安定にならないことである．これは，波数がほとんど0に近い擾乱にはほとんど粘性がきかないことによっている．

これに対して，ポアズイユ流や平板境界層流は変曲点を持たないので，このような流れの速度分布を基本流として考えると非粘性では不安定は存在しない．第9図は2次元ポアズイユ流の安定性をレイノルズ数と波数との関数として示したものである．ある波数 k に着目するとき，レイノルズ数 R を大きくするとやがて不安定波が可能になる．ところが，更に R 大きくし続けると再び安定領域に達し，以後は安定にとどまる．このことは粘性が不安定化と安定化の2つの役割を担っていることを示している．粘性が流れを不安定化させるというと少し奇異に聞こえるかも知れない．しかし，波の構造が「粘



第8図 粘性のある $U(y)=\tanh y$ の流れにおける波数 k の波の増幅率 kC_i. 図中の数字はレイノルズ数 $R\left(\equiv\frac{VL^2}{\nu}\right)$ (Betchov・Szewczyk, 1963).

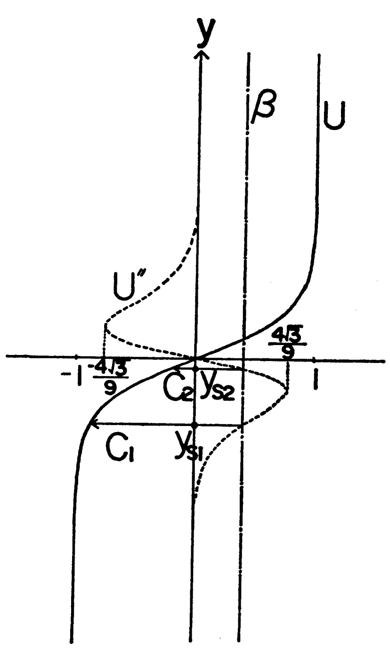


第9図 2次元ポアズイユ流の安定特性（巽・後藤, 1976より）. 実線は中立曲線（Lin, 1945), 点線は C_i 一定の曲線（Shen, 1954).

性項を含んだ」Orr-Sommerfeld 方程式と境界条件で決められることを考えると，粘性の効果で波の構造が基本流からエネルギーをもらいやすいように変えられ，そのエネルギーの供給が同じ粘性によるエネルギー散逸より大きくなるようなことがあっても良いことがわかる．しかし，粘性の効果が擾乱の構造を上述のように変えられるのは，流れが滑りのない固体壁で仕切られている時に限るように思われる．大気中の大規模な流れにおいては滑らない壁の存在が重要であるような不安定には興味がないので，順圧不安定では普通この種の不安定は扱わない．従って，順圧不安定においては，粘性は常に安定化効果を持つ．

b）$\beta\neq 0$ の場合

流れの対称性から $U(y)=\tanh y$ と $-\tanh y$ に対する安定性は全く同じことが予想できる（Lipps, 1965）ので，ここでは $U(y)=\tanh y$ かつ $\beta>0$ の場合だけを考える．Kuo の定理から，この流れは $\beta>\frac{4\sqrt{3}}{9}$ に対し



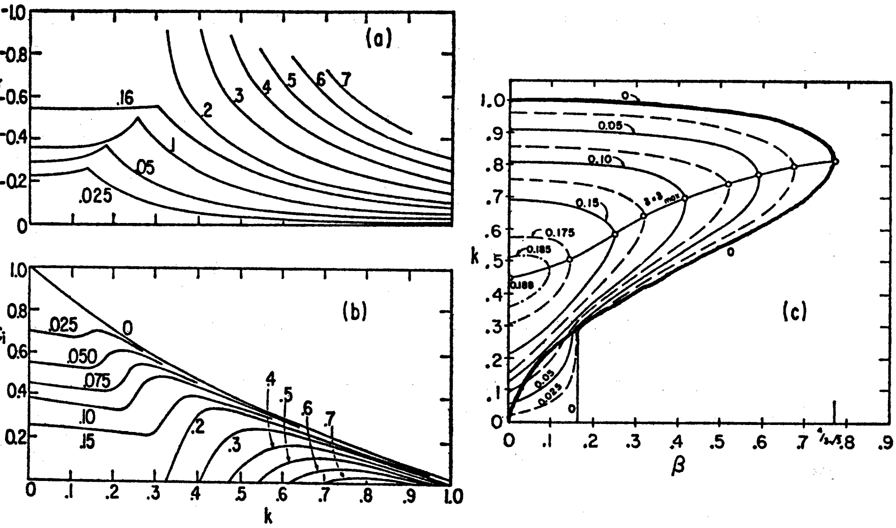
第10図 $U(y)=\tanh y$ の流れと $U''(y)$ の分布.

て安定である（第10図参照）. Lipps (1965) は

$$0<\beta<\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

のとき，2つの NSNM が存在することを示した．これらの中立波の位相速度を C_1, C_2 とするとき，

$$C_n=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2n\pi}{3}\right)\quad(n=1,2) \tag{5.2}$$



第11図　$U(y)=\tanh\,y$ の流れに生ずる不安定波の諸特性.（a）位相速度 C_r の波数依存性. 図中の数字は β の値を示す.（b）複素位相度の虚部 C_i の波数依存性.（c）増幅率の波数と β に対する依存性（Kuo, 1973, 1978).

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{9\beta}{4\sqrt{3}}\right),\quad 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$$

の関係があり，対応する波数 k_n と固有関数 ϕ_n は，

$$k^2{}_n=1-C^2{}_n \tag{5.3}$$

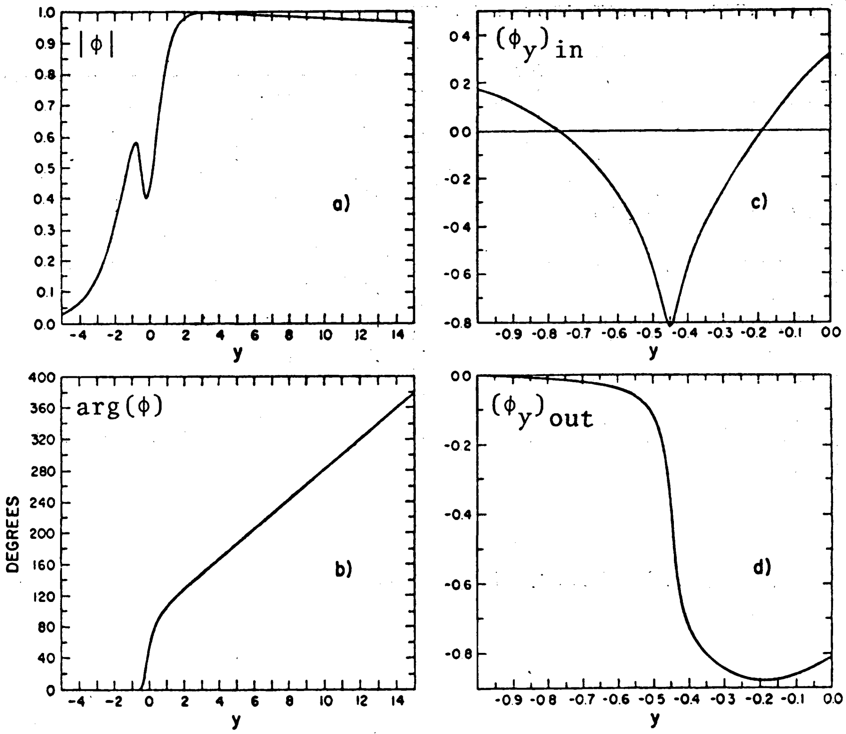
$$\phi_n=(1+\tanh\ y)^{\frac{1+C_n}{2}}(1-\tanh\ y)^{\frac{1-C_n}{2}}$$

で与えられる. NSNM が存在することがわかったので，4.4.の結果と第10図を見較べることにより，$k_1<k<k_2$ の波が不安定波であることが予想される.

Kuo (1978) は実際に固有値問題を解いて不安定波の振舞を調べた. 第11図(c）は波の増幅率を波数 k と β の関数として示してある. 太線は (5.2), (5.3) から決まる Lipps の NSNM に対応する曲線である. $0.16<\beta<\frac{4\sqrt{3}}{9}$ では，予想通り Lipps の2つの NSNM の波数 k_1, k_2 の間に対して不安定波が存在する. しかし，$\beta<0.16$ においては小さな波数に対して Lipps の解の外側にも不安定領域が存在する. 波の増幅率は β が大きくなるにつれて小さくなり，$\beta>\frac{4\sqrt{3}}{9}$ では不安定波は存在しない. 従って，$U(y)=\tanh\ y$ で与えられる流れに対しては β 効果は安定化作用があると言える. 増幅率最大の波数は $\beta=0$ のときの $k=0.4446$ から β が大きくなるにつれて次第に大きくなる. これは β 効果が波長の長い波をより安定化することを示す.

第11図(a)(b)は波の複素位相速度の波数依存性を β をパラメータとして示している. $\beta=0$ のとき，位相速度 C_r はすべての波数に対して0であった. $\beta>0$ のとき，一般に位相速度は西向きになり，波数が小さい程その絶対値は大きい. 位相速度に関しては不安定波はロスビー波と同じような分散関係を持つように見える. しかし，$\beta<0.16$ に対しては，波数の小さな所で位相速度の振舞が急に変わる所が存在する. 同様のことは，複素位相速度の虚部 C_i にも見られる. これらのことは，$\beta<0.16$ で Lipps の解の外側にある不安定波が普通の順圧不安定のモードとは異った性質を持ったモードであることを示唆している. Dickinson・Clare (1973) も同じ問題を扱って，β と k が共に小さいときに新しいタイプのモードが存在することを示した. 以下では，普通の順圧不安定のモードを第1モード，新しいモードを第2モードと呼ぶことにする. 2つのモードの性質の違いをより詳しく見る為に，それぞれの固有関数の構造を見てみよう.

第6図は第1モードに対して最も不安定な擾乱の振幅と位相の構造を5つの β の値に対して示したものである. $\beta=0$ のとき $y=0$ に関して対称であった振幅は，β と共に非対称性を増してくる. $y>0$ に対する振幅は $y<0$ に対するそれより一般に大きい. 一方位相も $\beta=0$ のときには $y=0$ に関して反対称であったのが，β と共に非対称な変形を起こしてくる. シアーの強い領域（$-1<$



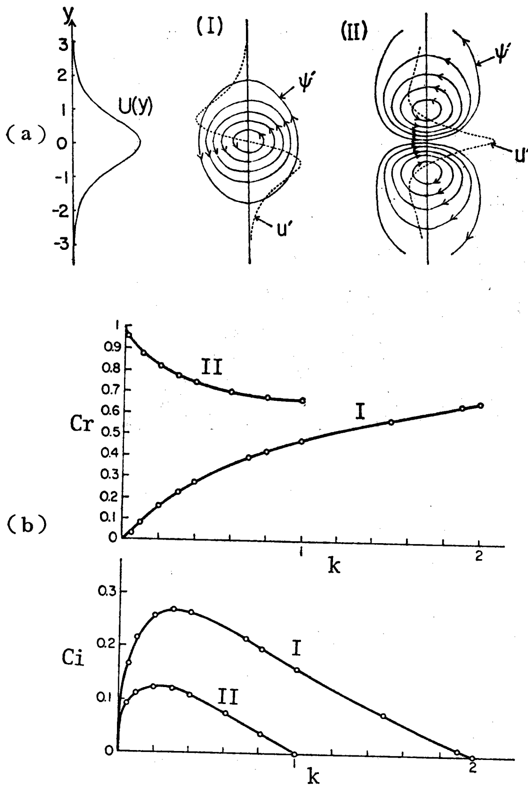
第12図　$U(y)=\tanh y$ の流れにおける不安定波の第2モードの固有関数 ϕ の構造 ($\beta=0.15$, $k=0.32$, $C_r=-0.42$, $C_i=0.008$). (a) 絶対値 $|\phi|$, (b) 位相 arg (ϕ), (c) $\dfrac{\partial\phi}{\partial y}$ の ϕ と in-phase の部分の振幅, (d) $\dfrac{\partial\phi}{\partial y}$ の ϕ と out-phase な部分の振幅 (Dickinson・Clare, 1973).

$y<1$)での位相の変化は小さくなり, $y<-1$ では $-1<y<1$ とは逆の位相変化が現われる. これは基本場からのエネルギーの供給の能率が β と共に悪くなっていることを示している.

第12図は Dickinson・Clare (1973)によって求められた第2モードの構造である. 残念ながら Lipps の解の外側の領域については, Kuo (1978) の結果と Dickinson・Clare の結果が完全に一致しているようには思えない. β と k が小さいときの固有値問題は数値的に解く際にかなりの困難があるので, 求められた固有値や固有関数が, 定量的にどの程度正しいか, 多少疑問がある. しかし, 定性的に見ても第12図の第2モードの構造はいくつかの興味深い特徴を示している. まず, 波の振幅 (第12図(a)) は $y<0$ では指数関数的に急に小さくなるが, $y>0$ では非常にゆっくりと減少する. また, $y=-0.1$ と -0.8 付近に kink が存在する. 位相 (第12図(b)) は $y<-0.45$ では y によらず, 波が伝播できないことを示しているが, $y>-0.45$ では y によってかなり急激に変化しており, 特にシアー・ゾーンの外 ($y>2$) ではほとんど y に比例して変化している. これらの特徴は, このモードが $y>0$ で y 方向に伝播するロスビー波的な振舞をしていることを示している. 第12図(c)(d)は ϕ_y のうち ϕ と in-phase の成分と out-phase の成分を示す. ϕ_y の ϕ と out-phase の成分は $|\phi|$ とかけあわせたとき東西運動量の y 方向への輸送を与える. 図から $y=-0.45$ 付近には運動量輸送にステップ状のジャンプが存在することがわかる. 又, $(\phi_y)_{in}$ にも, $y=-0.45$ 付近に特異性があることがわかる. $y=-0.45$ はこの波の臨界点に対応している. これらの特徴は, このモードが第8節で述べるように, ロスビー波の過剰反射 (overreflection) というメカニズムによって生じていることを示唆している.

5.2. ジェット $U(y)=\mathrm{sech}^2\, y$

a) $\beta=0$ の場合



第13図 $U(y)=\mathrm{sech}^2\,y$ の流れにおける(a)反対称モード(I)と対称モード(II)の流線 φ' と速度の x 成分 u' の例．反対称モードは $k=2$, $C=\frac{2}{3}$, $\phi=\mathrm{sech}^2\,y$ の NSNM, 対称モードは $k=1$, $C=\frac{2}{3}$, $\phi=\sinh y\,\mathrm{sech}^2\,y$ の NSNM に対して描いてある．(b) 不安定波の位相速度 C_r と複素位相速度の虚部 C_i の波数依存性 (Betchov・Criminale, 1967).

自由シアー流は $\beta=0$ のときには1種類の不安定モードしか持たなかったが，ジェットには2種類の不安定モードが存在することが知られている．1つは波に伴った x 方向の流速 u' が $y=0$ に関して対称なモード，もう1つは u' が反対称なモードである (第13図(a)参照). それぞれのモードについて NSNM が定義できることが知られている．まず反対称モードに対しては NSNM は $k=2$, $C=\frac{2}{3}$, $\phi=\mathrm{sech}^2\,y$ で与えられ，ジェットの対称性を考慮すると 4.4. と同じ議論が適用できて，$k<2$ の波が不安定波であることが予想できる．一方，対称モードに対しては NSNM は $k=1$, $C=\frac{2}{3}$, $\phi=\sinh y\,\mathrm{sech}^2\,y$ で与えられ，$k<1$ の波が不安定波であると予想される．

第13図(b)は対称モードと反対称モードの位相速度 C_r と複素位相速度の虚部 C_i を波数の関数として示したものである (Betchov・Criminale, 1967). 反対称モードは $0<k<2$ に対して不安定で，位相速度は波数と共に0から2/3へと増加する．これに対して対称モードは $0<k<1$ の波数に対して不安定で，位相速度は波数と共に1から2/3へと減少する．複素位相速度の虚部 C_i はすべての波数に対して反対称モードの方が大きいので，増幅率もすべての波数に対して反対称モードの方が大きい．従って，一般にジェットの安定性を議論するには反対称モードのみを考えることが多い．ここでも，以下では反対称モードのみに注目することにする．なお，増幅率最大の反対称モードを与える波数は $k\sim0.9$ である．

b) $\beta\neq0$ の場合

Kuo の定理から，不安定波が存在する為には $-2<\beta<\frac{2}{3}$ でなければならない (第14図(a)参照). (3.5) を見てわかるように，$\beta<0$ は東風ジェットに対応する．Lipps (1962) は NSNM が $\phi=\mathrm{sech}^2\,y$ および，

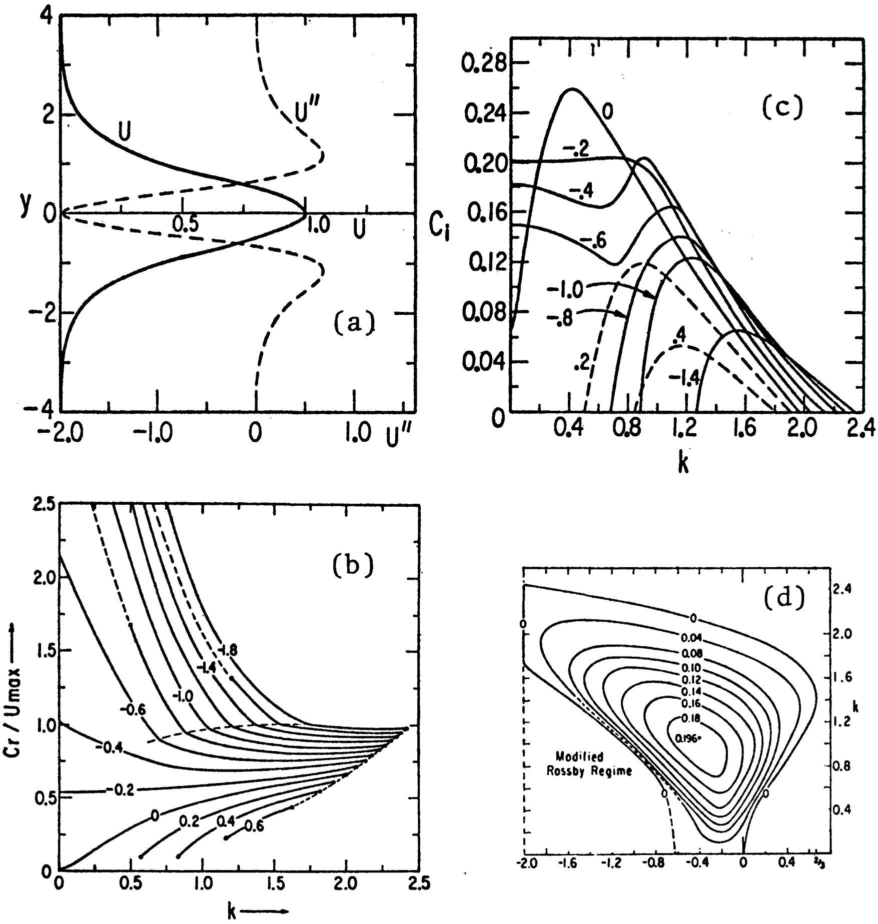
$$\beta=-2\,C(3\,C-2) \tag{5.4}$$

$$C=\frac{k^2}{6} \tag{5.5}$$

で与えられることを示した．

Kuo (1973, 1978) は固有値問題を解いて，不安定波の振舞を調べた．第14図(d)は波の増幅率を波数 k と β の関数として示したものである．西風ジェット($\beta>0$)に対しては (5.4) は2つの正根 C_1, C_2 を持つ．(5.5) を通して C_1, C_2 に対応する波数 k_1, k_2 の中立波ではさまれた領域に不安定波が存在するのが見られる．β が大きくなるにつれて，最も不安定な波の波数は大きくなり，それと共に増幅率は小さくなって行く．従って，西風ジェットに対しては β 効果は安定化の傾向を与えると言える．第14図(b)は位相速度の波数依存性をいろいろな β に対して示したものである．$\beta>0$ に対しては位相速度は波数が小さくなると共に小さくなる．

これに対して，東風ジェット ($\beta<0$) の安定性には西風ジェットになかったいくつかの特色が見られる．第1に，$\beta<0$ のときは (5.4) の解で $0<C<1$ を満す C は1つしか存在しない．この C に対応する波数 k の中立波は高波数側での安定領域から不安定領域への移り変わりを与えている．しかし，低波数側には NSNM は存在しないので，解析的な手段で低波数側に不安定領域



第14図　$U(y)=\mathrm{sech}^2\,y$ の流れに生ずる不安定波の諸特性．（a）基本流 $U(y)$ と $U''(y)$ の分布．（b）位相速度 C_r の波数依存性．（c）複素位相速度の虚部 C_i の波数依存性．（d）増幅率の波数及び β に対する依存性．(Kuo, 1973, 1978).

と安定領域の境目を見つけるのは難しい．Kuo (1978) の結果（第14図（d））を見ると，$\beta<-0.6$ のときは低波数側にも何らかの境目が存在しそうである．しかし，この領域も固有値問題を数値的に解くのが難かしい領域で，Kuo の結果にも多少のあいまいさが残っているように思われる．第2に，$\beta=-2$ における不安定性のなくなり方があまりに唐突のように思える．なぜ，$\beta=\frac{2}{3}$付近のように滑らかに不安定性がなくならないのかは将来説明されねばならない課題であると思う．第3の特色は，最も大きな増幅率を与える β と k の組合わせが，$\beta=-0.4$，$k=1.1$ になっていることである．従って，東風ジェットにおいては $|\beta|<0.4$ の間では，β効果が不安定化の働きをしていることになる．しかし，$|\beta|>0.4$ ではやはり安定化の効果を持っている．この時，波数が小さい擾乱においてより安定化の効果が強く出るのは，今までの流れに対する結果と同様である．第4に，第14図(b)(c)を見ると，$-0.6<\beta<-0.2$ に対して，波数 k が 0.5 付近で，位相速度 C_r や複素位相速度の虚部 C_i の振舞が大きく変わっている．第1の特色をも考え合わせると，このことは，東風ジェットにおいても自由シアー層の β, k が小さいときと同様に，新しい不安定モードが存在する可能性があることを示唆しているように見える．このことに関連して，Yamasaki・Wada (1972) の行った興味深い研究があ

る．彼等は $U(y)=-\cos^2\frac{\pi}{2}y$ で与えられる東風ジェットが $y=\pm1$ にある壁で仕切られている時の安定性を調べた．又，壁の位置の安定性に及ぼす影響を調べる為に壁を $y=\pm(1+\delta)$ に遠ざけ，$|y|=1$ と $1+\delta$ の間には $U(y)=0$ の領域を置いた場合も調べた．その結果，壁が $y=\pm1$ にある場合の不安定モードに加えて，波数の小さな領域に全く新しいモードが現われることを見つけた．このモードは δ が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ より小さい時は存在せず，δ を増すと共にモードの数は次々と増えて行く．y 方向の構造はシアーの強い領域（$|y|<1$）の外側では波動的で，δ が増えると共に y 方向に「節」の多いモードが次々と現われてくることがわかった．このようなモードは西風ジェットには見られないものである．筆者は $U(y)=\tanh y$ の基本流において壁を $y=\pm D$ に置いて D の値を変えたときの安定性を調べてみたことがあるが，Yamasaki・Wada の見つけたモードと同様の振舞をするモードが Lipps の中立解で囲まれた領域より波数の小さい領域に現われた．$\tanh y$ の基本流に対しては無限流体を考えた時にも β と k が小さい時には波動的な振舞をする新しいモードが存在することが知られている (Dickcinson・Clare, 1973)．壁の存在する時の $\tanh y$ と東風ジェットの安定性の類似性，又 β と k が小さい時に固有値問題を解くことの困難さがどちらの流れにも存在すること等，無限流体中の東風ジェットにも新しい不安定モードが存在する可能性を示唆する材料は多い．

最後に，$-0.6<\beta<-0.4$ における位相速度に着目することにしよう．4.5. で導いた位相速度に関する制約 $U_{\min}-\frac{\beta}{2k^2}<C_r<U_{\max}$ は，β を正にとって考えるとき東風ジェットの最大速度より速く西向きに伝播する不安定波の存在の可能性を許している．第14図（b）を見ると，$-0.6<\beta<-0.4$ で，k が小さい擾乱がそのような特徴を持っていることがわかる．Yamasaki・Wada (1972) も先に述べた $U(y)=-\cos^2\frac{\pi}{2}y$ 型のジェットで，基本流より速く伝播するモードの存在を報告している．しかし，一般にこのようなモードの増幅率は小さいので，実際の現象に応用する場合には，それ程の重要性はないかも知れない．

6. 連続スペクトルのモード

この節と次の節では，今までその複雑さの為に故意に記述を避けてきた2つの問題について述べることにする．まず，この節では第3節で少し触れた，連続的な固有値を持つモード (continuum) について述べる．このモードは不安定現象のみに興味がある場合にはほとんど重要ではない．しかし，初期に任意の形の擾乱が与えられた時に，その擾乱がその後どのように振舞うかというような問題を考える上では欠くことのできないモードである．

最初に問題意識をはっきりさせる為に，$U(y)=\tanh y$ という具体的な流れの安定性をふり返って見よう．5.1. で述べたように，$\beta=0$ のとき，この基本流においては $0<k<1$ の波数に対して不安定波が存在する．ところが，固有値問題 (3.5)，(3.6) の性質から，C と ϕ が固有値と固有関数のときは，その共役複素数 C^* と ϕ^* も固有値と固有関数になっている．従って，$0<k<1$ に対しては減衰波も存在することになる．これに対して，$k=1$ では中立波が存在するが，$k>1$ では固有値問題の解は存在しないことが知られている．

ここに至って，当然生ずる疑問は，ある時刻 t に $f(y)e^{ikx}(k>1)$ の形をした擾乱があったとき，この擾乱はその後どのように振舞うだろうかというものである．第3節で述べたように，普通この種の問題では，固有値問題 (3.5)，(3.6) の固有関数から完全系を作り，$f(y)$ をこの固有関数系で展開した後，各固有モードの時間的振舞を調べる．ところが，$k>1$ に対しては1つも固有解が存在しないというのだから，途端に困難に直面するのである．又，$0<k<1$ に対しても，唯1組の複素共役な固有関数だけで，任意の初期擾乱を表現することはできない．これらの困難を克服したのが，Case (1960) によって調べられた連続スペクトルの解である．

まず簡単の為に Case (1960) に従って $y=\pm1$ で壁に仕切られた2次元 Couette 流（$U(y)=y$）を考えよう．このとき，固有値問題 (3.5)，(3.6) は，

$$(U-C)(\phi''-k^2\phi)=0 \tag{6.1}$$

$$y=\pm1 \text{ で } \phi=0 \tag{6.2}$$

となる．(6.1) の解としては次の2通りが考えられる．第1の解は $\phi''-k^2\phi=0$ を満すもので，$\phi=Ae^{-ky}+Be^{ky}$ と書ける．このタイプの解は一般には境界条件が与えられたとき離散的な固有値を与えるのであるが，今の場合は (6.2) を満す解は存在しない．これは $\tanh y$ の流れにおける $k>1$ の場合に似ている．第2の解は，流れの中に臨界点 $y_c(U(y_c)=C)$ を持つ場合で，

$$\phi''-k^2\phi=\delta(y-y_c) \tag{6.3}$$

を満たすようなものである．境界条件 (6.2) を考慮するとき，(6.3) の解は $\phi''-k^2\phi=0$ に対する Green 関数，

$$G(y, y_c)=-\frac{1}{k\sinh k}[\sinh ky_{>}\sinh k(1-y_{<})]$$

で与えられる．ここで $y_{>}$ は y と y_c のうちの大きいもの，$y_{<}$ は両者のうちの小さいものである．Green 関数は $0<C<1$ の任意の C について定義できるので，このモードは連続スペクトルを持つ．ここで注意しておきたいのは，$G(y, y_c)$ は $y=y_c$ 以外では (6.1) を満たすが，$y=y_c$ では (6.1) を満たさないことである．($(y-y_c)\delta(y-y_c)$ は $y=y_c$ で 0 ではない．) 従って，$G(y, y_c)$ は普通の意味では (6.1) の解ではない．しかし，このモードの重ね合わせで表現できる擾乱，

$$\phi=\int_0^1 A(C)G(y, C)e^{ikct}dC \tag{6.4}$$

は初期値問題の式 (3.3) を満たしている．この意味で，$G(y, y_c)$を広い意味での固有関数に入れておけば，擾乱を固有関数で展開して表現するには便利なのである．Case (1960) は初期値問題 (3.3)，(3.4) に立ち戻って考えることにより，固有値問題 (3.5)，(3.6) においてそれまで見落とされていたこのモードを考慮に入れ，このモードの重ね合わせとして表現できる滑らかな形の擾乱が時間 t と共に $1/t$ で減衰することを示した*．

次に一般的なシアー流について考えてみよう．(3.5) を書き直すと，

$$(U-c)\left(\phi''-k^2\phi-\frac{U''}{U-c}\phi\right)=0 \tag{6.5}$$

となる．この式はやはり2通りの解を持つ．第1の解は，

$$\phi''-k^2\phi-\frac{U''}{U-C}\phi=0 \tag{6.6}$$

が実空間に特異点を持たない場合の解である．この場合には，(6.6) の2つの独立な解を $\chi_1(y;C)$, $\chi_2(y;C)$ とするとき，$\phi=A\chi_1+B\chi_2$(A, B は定数) と書ける．境界条件 (3.6) から A, B が0でない解が存在する為には，

$$\begin{vmatrix}\chi_1(D\ ;C) & \chi_2(D;\ C)\\ \chi_1(-D;C) & \chi_2(D;\ C)\end{vmatrix}=0$$

であり，これから離散的な固有値が決まる．$U(y)=\tanh y$ のときには $0\leq k\leq 1$ に対して，この種の解が可能である．$0\leq k<1$ に対しては1組の複素共役の固有値 C, C^* が存在するし，$k=1$ に対しては NSNM が存在するからである．ところが，$k>1$ に対してはこのような固有解は存在しない．

* 適当な $A(C)$ を与えて (6.4) の積分を計算することによっても ϕ の時間依存性が大きな t に対して $1/t$ に比例することは示せる (Eliassen・Hφiland・Riis, 1953)．

第2の解は実空間に特異点を持つ解である．$U(y)=C$ を満す y を y_c と書くことにし，$y-y_c=\eta$ とおくと，(6.6) の解は Frobenius の方法（寺沢，1954，p 305 参照）により，

$$\left.\begin{aligned}\phi_1(y)&=\eta\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\eta^n\right]\\ &\text{と}\\ \phi_2(y)&=1+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\eta^n+\frac{U''(y_c)}{U'(y_c)}\phi_1(y)\log\eta\end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

で与えられる．$\log\eta$ の分岐を $\eta>0$ に対して $\log|\eta|$，$\eta<0$ に対して $\log|\eta|-\pi i$ と定義すると，$\phi_2(y)$の実部 ϕ_{2r} と虚部 ϕ_{2i} はそれぞれ，

$$\phi_{2r}(y)=1+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\eta^n+\frac{U''(y_c)}{U'(y_c)}\phi_1(y)\ \log|\eta|$$

$$\phi_{2i}(y)=\begin{cases}0 & \eta\geq 0\\ -\pi\dfrac{U''(y_c)}{U'(y_c)}\phi_1(y) & \eta\leq 0\end{cases}$$

となる．ϕ_1, ϕ_{2r} は (6.5) を満たすが，ϕ_{2i} は (6.5) を満たさず，

$$\phi''-k^2\phi-\frac{U''}{U-C}\phi=\pi\frac{U''(y_c)}{U'(y_c)}\delta(y-y_c) \tag{6.8}$$

の解になっている．従って，ϕ_{2i} は2次元 Couette 流の場合の $G(y, y_c)$ に似ている．$G(y, y_c)$を解と見なしたのと同じ意味で ϕ_{2i} を (6.5) の解と見なすことにすると，$\phi_1, \phi_{2r}, \phi_{2i}$ は互いに独立なので，(6.5) の一般解は $\phi=A\phi_1+B\phi_{2r}+C\phi_{2i}$($A, B, C$ は定数) と書け，境界条件は2つしかないので自由度が1つ残る．この為，固有値 C としては $U_{\min}<C<U_{\max}$ の任意の値が選べ，C を決めて初めて波の構造が決まる (Lin, 1961)．以上のことから，連続スペクトルが生ずるのは，(6.5) の解として (6.6)の解だけでなく，(6.8) の解も含めたことによることがわかる．Case (1960) はこの連続スペクトルのモードが，時間的に2次元 Couette 流における Green 関数のモードと同様の振舞をすることを示した．又，このモードを広い意味での固有関数と考えることによって初めて，固有関数系は形式的に完全系を構成することができ，任意の擾乱が与えられたとき固有関数の重ね合わせとして表現できることも示した．$U(y)=\tanh y$ の基本流で $k>1$ の擾乱が与えられたときは，連続スペクトルのモードだけで表現でき，このような擾乱は時間と共に $1/t$ で減衰する．これに対して，$0<k<1$ では離散的な固有値のモードと連続スペクトルのモードの両方が励起されるが，時間と共に不安定波だけが目立つようになる

であろう．

7. 粘性解と非粘性解

非粘性の固有値問題が連続スペクトルの解を持つのは，Rayleigh の方程式 (3.5) が $U=C$ の所で特異点を持つ為であることを前節で見てきた．粘性を考えると，Orr-Sommerfeld の式 (5.1) は特異点を持たないので，連続スペクトルの解は存在しない (Lin, 1961)．従って，粘性解の非粘性の極限を考えても，連続スペクトルの解は存在しないことになる．そこで生ずるのは，非粘性の極限における粘性解と非粘性解とはどのような関係にあるのかという疑問である．この問題は実は非常に難解なので，限られた紙数の中で厳密に述べることは不可能である．従って，ここでは大筋を述べるにとどめることにするので，詳しく知りたい読者は Lin (1955)，巽・後藤 (1976) を参照して頂きたい．

さて上記の疑問に答える前に，もう一度上で述べたことを考えてみよう．Orr-Sommerfeld の方程式がどんなに粘性を小さくしても $U=C$ の臨界点において特異点を持たないということは，どんなに粘性を小さくしても臨界点付近では粘性の効果が無視できないということを意味する．従って，高レイノルズ数の流れにおいては，粘性の効果は臨界点付近に集約されていると言える．臨界点付近以外の領域では，固体境界の付近を別にすれば流れの性質は非粘性流のそれに近いであろう．以上のことから，非粘性の極限における粘性解と非粘性解との関係を調べたいときには，臨界点付近での粘性解の振舞を調べれば良いことがわかる．

この問題を考える為に，Lin (1955)，巽・後藤(1976) に従って (5.1) において変数 $y, U(y)$ を複素数に拡張しよう．$U(y)=C$ (C は一般に複素数) を満たす y を y_s と書くとき $y=y_s$ は拡張された意味での臨界点である．今，臨界点近傍での解の振舞を調べる為に，新しい変数 η を $\varepsilon\eta=y-y_s$ で定義する．ここで ε は小さなパラメータである．(5.1) を $y=y_s$ 近傍で表現すると，

$$\left[U'(y_s)\eta+\frac{1}{2}\varepsilon U''(y_s)\eta^2\right]\frac{d^2\phi}{d\eta^2}-\varepsilon U''(y_s)\phi =\frac{1}{ikR\varepsilon^3}\frac{d^4\phi}{d\eta^4}+O(\varepsilon^2) \tag{7.1}$$

となる．右辺の粘性項と左辺がつり合う為には $\varepsilon\sim O(R^{-1/3})$ であれば良いことがわかる．このことは，臨界点のまわりに生ずる内部摩擦層と呼ばれる一種の粘性境界層の厚さが $O(R^{-1/3})$ であることを示す．$U'(y_s)\neq 0$ の場合を扱うことにして $\varepsilon=(kRU'(y_s))^{-1/3}$ とおくと，(7.1) は，

$$i\frac{d^4\phi}{d\eta^4}+\eta\frac{d^2\phi}{d\eta^2}=\varepsilon\frac{U''(y_s)}{U'(y_s)}\left[\phi-\frac{\eta^2}{2}\frac{d^2\phi}{d\eta^2}\right]+O(\varepsilon^2) \tag{7.2}$$

となる．この方程式の 4 つの独立な解 $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ は ε に関する巾級数として求められ，第 1 種・第 2 種の Hankel 関数 $H_{1/3}^{(n)}\left[\frac{2}{3}(i\eta)^{2/3}\right]$ $(n=1,2)$ を含む積分形で表現できる．ところで，粘性解の非粘性の極限 ($R\to\infty$) は，$y-y_s$ を固定するとき $|\eta|\to\infty$ と同等である．そこで，これらの 4 つの解において $|\eta|\to\infty$ の極限を考える．第 1 種・第 2 種の Hankel 関数 $H_{1/3}^{(n)}\left[\frac{2}{3}(i\eta)^{2/3}\right]$ が $|\eta|\to\infty$ での漸近形 $\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2}(i\eta)^{-3/4}\exp\left[(-1)^{(n)}i\left\{\frac{2}{3}(i\eta)^{2/3}-\frac{5\pi}{12}\right\}\right]$ を持つ為には，η の偏角がそれぞれ $-\frac{7\pi}{6}<\arg(\eta)<\frac{5\pi}{6}$，$-\frac{11}{6}\pi<\arg(\eta)<\frac{\pi}{6}$ の範囲になければならない．η の偏角が両者の共通範囲 $-\frac{7}{6}\pi<\arg(\eta)<\frac{\pi}{6}$ にあるときには，これらの漸近形を上記の積分表示の解に代入して積分を実行すると，4 つの解のうちの 2 つ Φ_1，Φ_2 は，

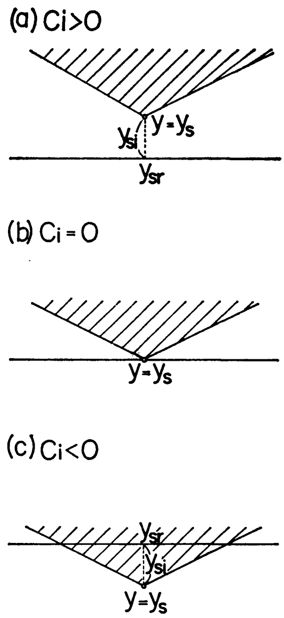
$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(y)&\sim\eta+\varepsilon\frac{U''(y_s)}{U'(y_s)}\cdot\frac{\eta^2}{2}\\ \Phi_2(y)&\sim 1+\varepsilon\frac{U''(y_s)}{U'(y_s)}\eta\log\eta\end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

となって，非粘性の Rayleigh 方程式の解 (6.7) と一致する．従って，η が

$$-\frac{7\pi}{6}<\arg(\eta)<\frac{\pi}{6} \tag{7.4}$$

の領域では，非粘性解を粘性解の非粘性の極限と考えることができる．ところが，$\frac{\pi}{6}<\arg(\eta)<\frac{5}{6}\pi$ の領域の η に対しては，(7.4) を満たす η に対して非粘性の極限で (6.7) の ϕ_2 に移行する粘性解 Φ_2 が，非粘性の極限においても ϕ_2 に移行しないで，他の粘性解 Φ_3, Φ_4 と同様の振舞をすることが知られている．この意味で，$\frac{\pi}{6}<\arg(\eta)<\frac{5}{6}\pi$ の領域は粘性領域であると考えられる．

さて，(7.4) で与えられる η の領域が，実座標 y についてどのような領域に対応するかを見てみよう．固有値 $C=C_r+iC_i$ を持つ波に対する臨界点 $y_s=y_{sr}+iy_{si}$ は $U(y_s)=C$ で与えられる．y_{si}, C_i が小さいとすれば $C_i\approx U'(y_{sr})y_{si}$ である．今，一般性を失うことなく $U'(y_{sr})>0$ にとり，$\arg(U'(y_s))\approx 0$ とおけば C_i の



第15図 粘性解の非粘性の極限が，非粘性解と一致する領域（斜線をほどこしてない部分）と一致しない領域（斜線をつけた部分）．(a) $C_i>0$ のとき．(b) $C_i=0$ のとき．(c) $C_i<0$ のとき．

符号に対応して（7.4）で与えられる領域は第15図で斜線のない領域になる．実際の現象は実軸上に対応しているので，実軸上の非粘性解を考えると，$C_i>0$ の場合は，それが粘性解の非粘性の極限として意味があることがわかる．ところが，$C_i<0$ の場合には，実軸上の一部が粘性領域（斜線をほどこした領域）に入ってしまうので，そこでは非粘性解は粘性解からの極限としては意味がなくなる注1)．$C_i=0$ の中立の場合には，実軸上に臨界点 y_s が現われるので，$y<y_s$ から $y>y_s$ へと非粘性解を接続していく時，複素平面上で上平面か下平面へと $y=y_s$ を迂回しなくてはならない．このとき，非粘性解が粘性解からの極限として意味がある為には(7.4)を満たさねばならないので，臨界点 y_s の下を通ることが必要である．このことから，中立波を $C_i \neq 0$ からの $C_i \to 0$ への極限として考える時には，不安定波($C_i>0$)からの極限として考えなければならないことがわかる．

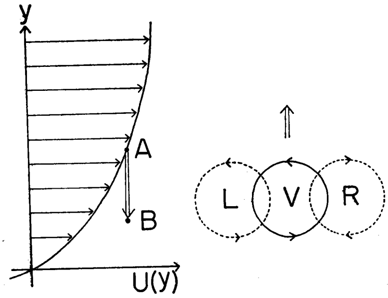
実は，我々は既に 4.4.の定理で Δk の符号を決める際に，上で導いた結果を使っている．例えば，$U(y)=\tanh y$ において，$0<k<1$ の波数領域に不安定波が存在することを予想できたのは，非粘性での中立波を粘性のある場合の中立波の非粘性の極限として考えたからであった．従って，4.4.を導くには粘性を考慮することが不可欠である．しかし，上で見たように，不安定波に対しては非粘性の極限における粘性解と非粘性解は一致するので，無限小の粘性を考慮することによって得られた 4.4.の結果は非粘性の場合にも有効である．

第1表 非粘性問題と粘性問題からの非粘性の極根とにおいて波の振舞について得られる結論の違い

k	$k<k_0$	$k=k_0$	$k>k_0$
非粘性問題	不安定波 減衰波	中立波	固有値問題の解なし
	連続スペクトルのモード		
粘性問題における非粘性の極限	不安定波	中立波	減衰波
	その他の離散的な固有値を持つモード（無限個）		

ここで，非粘性問題と粘性問題からの非粘性の極限とにおいて波の振舞について得られる結論の違いを第1表に整理しておこう．非粘性問題においては，狭い意味の固有値問題の解として $0<k<k_0$ では不安定波とそれに複素共役な減衰波，$k=k_0$ では中立波が存在し，$k>k_0$ では固有値問題の解は存在しない．しかし，これらの他に，すべての波数に対して，連続モードが存在する．固有関数系は，広い意味で連続モードも固有解とみなしたとき完全系を構成する．これに対して，粘性問題からの極限を考えると，$0<k<k_0$ で不安定波，$k=k_0$ で中立波，$k>k_0$ で減衰波が存在する．($k>k_0$ での減衰波の存在は 4.4.の定理を $k=k_0-\Delta k$ について考えることによって示される (Tollmien, 1935).）一般に，粘性問題はここで考えたモードを含めて無限個の離散的な固有値を持つことが知られており，これらの固有値に対応する固有関数系は完全系を構成することができる．注目すべきことは，非粘性問題の固有関数系から作った完全系と非粘性の極限における粘性問題の固有関数系から作った完全系との間で，共通な固有関数は不安定波に対するものだけということである．このことに関係して，次のような思考実験を考えてみよう．

ある時刻に非粘性の系（系Ⅰ）と無限小の粘性を持つ系（系Ⅱ）において，それぞれ全く同じなめらかな形の擾乱が与えられたとしよう．系Ⅰにおいては擾乱の振舞は(3.3)によって記述されるであろうし，系Ⅱでは(3.3)に粘性項をつけ加えた式で記述される．物理的直観によ



第16図　シアーが単調に変化する流れにおいて，流体の一部が変位したときの運動．

ると，粘性が無限小であれば，有限時間内の擾乱の振舞は系Ⅰと系Ⅱで異なるとは考えにくい注2)．しかし,この現象を完全系で展開して記述しようとすると，系Ⅰと系Ⅱで全く異なった完全系を使わねばならない．ここで，擾乱の振舞に関して2つの考えが存在するであろう．第1は，展開する完全系は異なっていても，それを重ね合わせた結果としての擾乱は同じ振舞をするという考えである注3)．第2は,非粘性の極限でも非粘性解に一致しない粘性解を完全系に含んでいる以上，少しでも粘性があればその重ねあわせとして表現できる系Ⅱにおける擾乱の振舞は系Ⅰにおけるそれと異なるであろうというものである．Case (1961) は第1の立場を支持している．筆者にも，第1の立場の方が合理的に思えるが，一般にはまだどちらの立場が正しいのかについての決着はついていないようである．

8. 不安定の物理的メカニズム

今までは，順圧不安定という現象を主に数学的側面から見てきた．この節では不安定のメカニズムの物理的解釈を試みてみたい．ここでは2つの異った角度からの説明を述べる．第1の説明は，渦の変形という立場から見たもので，古典的な Lin (1955) の説明になかったいくつかの問題——例えば，なぜ不安定波に短波長の cut が存在するか——等を定性的に説明する．第2の説明は，近年研究が進んできた波動と平均流との相互作用という立場から見たもので，特に Lindzen・Tung (1978), Lindzen *et al.* (1980) 等によって提案されているような過剰反射 (overreflection) と呼ばれる現象による不安定の解釈を紹介する．

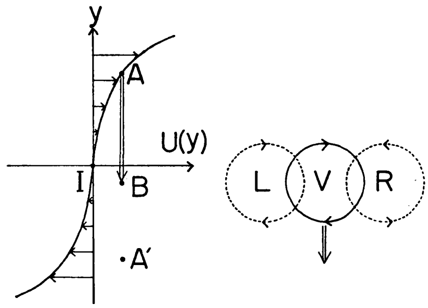
8.1. 渦の変形による説明

この項では簡単の為に β 効果がない系を考える．あるいは慣性系から物事を見たと思ってもよい．Lin (1955) はその教科書の中で不安定のメカニズムに関して次のような説明を行っている．

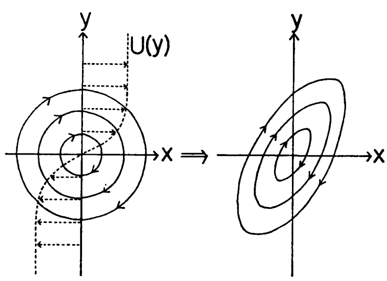
まず，第16図に示すように，y が大きくなる程シアーが弱くなるような基本流を考えよう．今，点Aにあった流体が何らかの原因で点Bに動いたとする．A点における負の渦度はB点における負の渦度よりも絶対値が小さいので，A点からB点に移動してきた流体はそのまわりの流体に対して相対的に正の渦度を持つことになる．次にこの相対的に正の渦度を持つ渦（この渦をVと呼ぶことにする）によって周囲の場がどう変わるかを考えてみる．渦Vの右側では，負の渦度の大きい流体が渦Vによって移流されてくるので相対的に負の渦Rが生ずる．これに対して，渦Vの左側には正の渦Lが生ずる．そこで更に渦RとLによる移流を考えると，渦Vに対応するA点から移動してきた流体は再びA点の方向へ押し戻されることになる．同様のことはシアーが y 方向に単調に増加する流れでもおこる．これらのことは，シアーが単調に変化する（変曲点が存在しない）流れが安定なことを示唆しているように思われる．

次に，第17図に示すようにシアーが一点Ⅰで極値をとるような流れを考えてみよう．今，点Aにあった流体が点Ⅰを通り越して点Bに移動したとすると，第16図に対して行なったのと全く同じ議論により，A点から移動してきた流体は今度は下向きの移流を受けることがわかる．Lin はこのことは変曲点を持つ流れが不安定であることを示唆すると考えた．

しかし，上に紹介した Lin の説明には実はいくつかの欠点がある．まず，第17図においてA点からB点へ移動してきた流体が下向きの移流を受けるまでは良いのだが，Lin の議論に従う限り，この流体はその後も運動を続けて，Aの $y=0$ に関する対称点 A′ まで達してそこに落ちつくことが予想される．このような現象を不安定というのであろうか？　第2に，Lin の説明は不安定擾乱のスケールについて何の情報も与えない．Lin の説明に従う限り，A点はどんなにⅠ点に近くても良いので，どんなにスケールの小さな擾乱でも不安定をおこせそうである．しかし，実際には第5節で見てきたように，滑らかな基本流はある臨界波長より波長の短い擾乱に対しては安定である．第3に第17図に示された基本流は Lin の説明によると不安定でありうるのであるが，実際には Fjφrtoft の定理によって安定である．



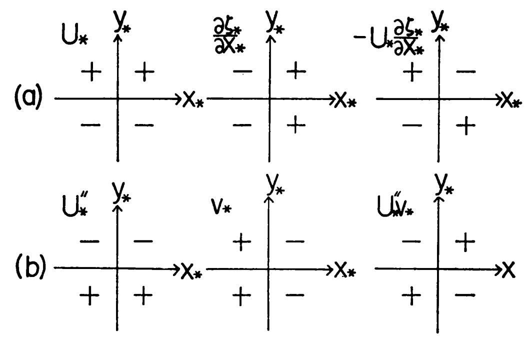
第17図 変曲点を持つ流れにおいて，流体の一部が変位したときの運動.



第18図 移流による渦の変形.

以上のような問題点を念頭において，ここでは次のような思考実験を行ってみよう．基本流としては $U(y)=\tanh\, y$ を例にとることにする．何度も述べたようにこの流れは $0<k<1$ の擾乱に対して不安定で，$k>1$ の擾乱に対しては安定である．不安定波の構造が渦状であること，又波の y 方向のスケールが x 方向のスケール（波長）に大体比例していることから，ここでは擾乱を円形の渦で近似して考えることにする．ある時刻 $t=0$ に $x=0$，$y=0$ に中心を持つ円形の渦状擾乱を与えたとき，この擾乱がその後どう振舞うかを調べるのがこの思考実験の課題である．

まず，場の対称性からこの渦の中心は時間的に動かないことが期待される．さて，もしこの基本流が不安定であることを少しの間忘れることにすると，この渦は基本流による移流の為に，時間と共に第18図のようにシアーの方向に傾けられてしまうであろう．このような渦の軸の傾きは，4.6. で見たように擾乱から基本場へとエネルギーが流れることを示しており，この渦は次第に弱まっていくことが予想される．従って，基本流にシアーがあることは一般に移流の強さが y 方向に異なっていることによって擾乱を弱める働きをすることがわかる．



第19図 (a) 各象限における $-U_*\dfrac{\partial\zeta_*}{\partial x_*}$ の符号.
(b) $U_*''v_*$ の符号

ここで，今述べたことをもう一度渦度方程式を使って少し詳しく調べてみよう．渦度 ζ_* を $\zeta_*=\nabla^2{}_*\psi_*$ で定義するとき，渦度方程式 (3.1) は次元のある量で

$$\frac{\partial\zeta_*}{\partial t_*}=-U_*\frac{\partial\zeta_*}{\partial x_*}+U''{}_*v_* \tag{8.1}$$

と書ける．初期の渦が，例えば

$$\zeta_*=-\zeta_0\ \exp\left(\frac{-x^2{}_*-y^2{}_*}{\lambda^2}\right)$$

で与えられる場合の $t=0$ における渦度の変化傾向を (8.1) から見てみよう．まず，右辺第1項は上で述べたように基本場による渦度の移流の効果を表わす．第19図(a)は第1項に含まれる各項の符号を各象限毎に示したものである．例えば，第1象限では $U_*>0$，$\dfrac{\partial\zeta_*}{\partial x_*}>0$ なので $-U_*\dfrac{\partial\zeta_*}{\partial x_*}<0$ となっている．この図から，第1項は予想通り第1～第3象限の方向に渦を傾ける効果を持つことがわかる．次に右辺第2項について同様の考察を行うと，第19図(b)に示したように，第2項は第1項と反対方向に渦の軸を傾ける効果があることがわかる．すなわち，第2項は擾乱の構造を基本流からエネルギーをもらい易いように作り変える働きする．

以上のことから，tanh y の流れにおいいては渦度方程式の右辺第1項は擾乱に対して安定化効果，第2項は不安定化効果を持つことが期待される．不安定が生ずる為には第2項が第1項よりも大きいことが必要であろう．第1項と第2項の比を見積もってみると，

$$\frac{\text{第1項}}{\text{第2項}}=\frac{U_*\dfrac{\partial\zeta_*}{\partial x_*}}{U''{}_*v_*}\sim\frac{O\left(\dfrac{V\zeta_0}{\lambda}\right)}{O\left(\dfrac{V\lambda\zeta_0}{L^2}\right)}\sim O\left(\frac{L^2}{\lambda^2}\right) \tag{8.2}$$

ここに，V は基本流の代表的な速度，L はシアーの強い領域（シアー・ゾーン）の代表的スケールである．又 $\zeta_0 \sim O\left(\frac{v}{\lambda}\right)$ の関係を使った．(8.2) より，スケール λ がシアー・ゾーンのスケール L より大きいような擾乱だけが増幅できることが予想される．

今までは tanh y のように不安定な流れを考えてきたが，第17図のように Fjørtoft の定理から安定なことが保証されている流れについて同様の議論を適用すると，第1項のみでなく第2項も安定化作用をもつことがわかる．又 U'' の符号が変わらない流れでは，U'' はロスビー波における β 効果と同様な働きをする為，$U''v$ は x 方向への位相の移動を与えるだけで，擾乱の軸を積極的に傾ける効果は持たないと思われる．これに対して第1項は常に安定化効果をもつので流れは安定であることが期待できる．

以上の結果をまとめると，変曲点を持たない流れや，変曲点を持ってもそこでシアーの強さが極大にならないような流れでは，擾乱は移流の効果によって変形され弱められる．又変曲点でシアーが極大になる流れでも，スケールの小さな擾乱は移流の効果によって弱められるのであるが，シアー・ゾーンの幅より大きなスケールを持つ擾乱では $U''v$ の不安定化効果が移流の安定化効果に打ち勝って増幅できることがわかった．ここでは話がわかりやすいように，孤立した渦を使って説明したが，波形の擾乱についても，同様の説明が与えられている (Garcia, 1956).

8.2. 過剰反射による説明

波動* の運動量輸送における臨界高度の重要性が Eliassen・Palm (1960), Charney・Drazin (1961) によって認識されて以来，波動と平均流との相互作用についての研究は目ざましい進歩をとげてきた．Bretherton (1966), Booker・Bretherton (1966) は鉛直シアー流中を上方に伝播する内部重力波の臨界高度近傍での振舞を調べた．特に後者は臨界高度でのリチャードソン数 R_i が 1/4 より大きいとき，入射波の $e^{-2\pi(R_i-1/4)^2}$ の部分がそこで吸収され，残りが透過されることを示した．ここでリチャードソン数 R_i は $R_i=N^2\Big/\left(\frac{dU}{dz}\right)^2$ (N^2 は Brunt-Väisälä の振動数，$\frac{dU}{dz}$ は平均流の鉛直シアー) で定義される．$R_i>1$ ならば，臨界高度に入射した波動のほとんどが，そこで吸収されてしまう．波動は吸収されても，波動の持っていた運動量はそこに残るので，結果として平均流は臨界高度で加速されることになる．又臨界高度に近づく波束を考えると，その波束全体が持つ波動のエネルギーは次第に減少し，平均流のエネルギーが増加する*．これに対して，Jones (1968) は臨界高度におけるリチャードソン数が 1/4 より小さい場合を扱った．そして，この場合には内部重力波が臨界高度に入射すると反射がおこり，反射波のエネルギー・フラックスが入射波のそれより大きくなるという現象が生ずる場合があることを示した．この現象は過剰反射と呼ばれ，入射波が臨界高度で平均流からエネルギーを得ることによって生ずると考えられる（田中，1975).

リチャードソン数 R_i が 1/4 より大きいか小さいかによって，波動と平均流の相互作用の際のエネルギーの流れの向きが変わるということは，不安定論の立場からは非常に興味深い．なぜなら，まず第1に，成層のある鉛直シアー流が不安定である為の必要条件は，流れの中のどこかで $R_i<1/4$ であることである (Miles, 1961). この $R_i=1/4$ という値が波動の吸収と過剰反射，シアー流の安定と不安定というそれぞれの現象の移り変わりに対する目安を与えるのは単なる偶然でないように思われる．第2に，過剰反射というのは，何らかの原因で外的に励起されている波動が臨界高度に入射するとき，平均流からエネルギーをもらう現象であり，一方シアー流の不安定現象というのは波が平均流からエネルギーをもらって発達する自励現象である．前者が強制問題であり，後者が自由問題であるという違いはあるが，この2つの現象には密接な関係がありそうである．

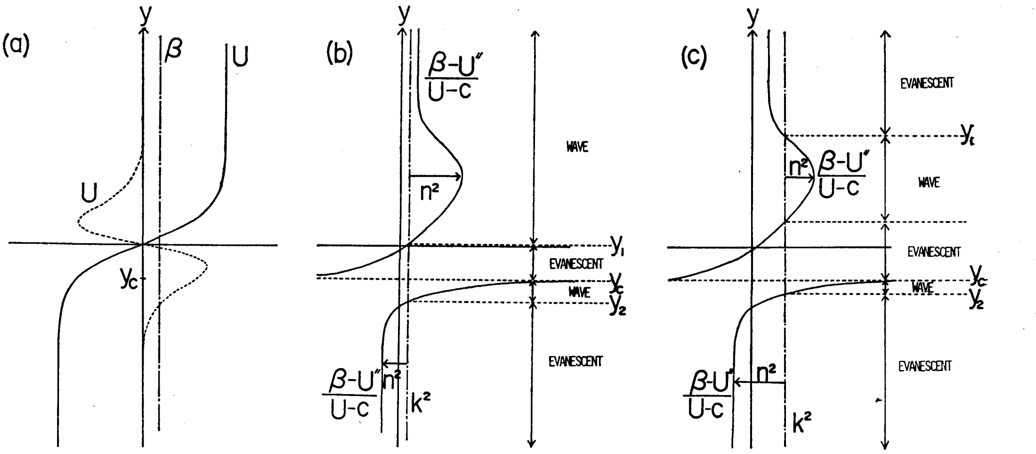
最近，Lindzen・Tung (1978), Lindzen *et al.* (1980) はシアー流に関係したほとんどの不安定現象が過剰反射に基づいて説明できることを提案した．ここでは順圧不安定を例にとって，彼等の考え方を紹介してみよう．問題を簡単にする為，基本流としては $U(y)=\tanh y$ のように単調で $\beta=0$ のとき唯1つだけ変曲点を持つような流れを考えることにする．波動の y 方向の構造方程式は (3.5) より，

$$\frac{d^2\phi}{dy^2}+n^2\phi=0 \tag{8.3}$$

と書ける．ここで $n^2=\frac{\beta-U''}{U-C}-k^2$ である．$n^2>0$ の

* ここでは不安定現象における中立波とは関係なく存在する中立な波（例えば，内部重力波・ロスビー波等）を「波動」と呼ぶことにする．

* 波動のエネルギーと平均流のエネルギーとを分けて考えることは，しばしば混乱をまねくことが多いので注意を要する．この辺の事情については瓜生 (1976) の解説を参照して頂きたい．



第20図 (a) $U(y)=\tanh y$ の基本流の特性. (b) 擾乱の波数が小さいときの屈折率 n^2 の分布.
(c) 波数がある程度大きい時の n^2 の分布.

ときは y 方向に伝播するロスビー波が可能であるが, $n^2<0$ のときは波動は伝播不可能である. さて, 第20図(a)のように U, U'', β が与えられたとき, 波数 k, 位相速度 C $(C<0)$ の波動が $y=\infty$ にある波源からシアー・ゾーンに入射してくることを考えよう (第20図(b)参照). 図中 y_1, y_2 は $n^2=0$ となる点, y_c は臨界点である. 一般に波動がシアー・ゾーンに入射するとき, 一部は反射され, 一部は透過される. しかし, 十分長い時間にわたって波源からの入射が続いているときは, 波動に伴ったレイノルズ応力 $\overline{uv}$ は臨界点 y_c 以外では y によらなくなっている. 一方, 臨界点では $\overline{uv}$ には $k\pi\cdot\frac{U''(y_c)-\beta}{U'(y_c)}|\phi(y_c)|^2<0$ だけのとびが存在する (Lin, 1955参照). ところが, $y<y_2$ では $n^2<0$ で波動の伝播が不可能であるので完全反射がおこり $\overline{uv}=0$ である. 従って, $y>y_c$ では $\overline{uv}=k\pi\frac{U''(y_c)-\beta}{U'(y_c)}|\phi(y_c)|^2<0$ でなければならない. エネルギー・フラックス $\overline{pv}$ とレイノルズ応力との良く知られた関係 $\overline{pv}=-(U-C)\rho\overline{uv}$ (Eliassen・Palm, 1960) より, $y>y_c$ では $\overline{pv}>0$ であることがわかる. このことは, $y=\infty$ から入射した波動が, 入射時のエネルギー・フラックスより大きなエネルギー・フラックスを持って反射されていること, すなわち過剰反射が起こっていることを示している. 第20図(b)に示したような小さな波数 k を持つ波動では過剰反射を起こした反射波は大部分 $y=\infty$ へと去って行くであろう. しかし, もし入射波の波数がもう少し大きくて第20図(c)のような n^2 の分布を与える場合か又は $y>y_1$ に剛体壁があるような場合があったとすると, 臨界点での反射波は $y>y_1$ で再び全反射されて臨界点へと戻っていくことが期待される. 臨界点ではまた過剰反射を起こすので, 結局このようなことをくり返すうちに波動の振幅は増大していくであろう. これは一種の不安定波に他ならない. このような不安定波が存在する為には, 必ずしも $y>y_1$ で全反射が起こる必要はない. 一般に, 屈折率 n^2 が大きく変わるような媒質中の波動は部分反射を起こすので, 過剰反射の度合が $y>y_1$ での部分反射の度合より十分大きければ不安定波は存在可能である. Lindzen・Tung (1978) は順圧不安定の為の必要条件——Kuo の定理と Fjφrtoft の定理——が過剰反射の為の十分条件であることを示した. このことは再び, 過剰反射と不安定性とが深いかかわりあいを持っていることを示唆しているように思われる.

さて以上で, 過剰反射の結果として不安定波が現われる可能性があることを示した. しかし, 実際に過剰反射に起因した不安定波が存在する為には, 不安定波が(3.6)の境界条件を満さなければならない. 一般にこの条件はかなり厳しい制約であって, 可能な不安定波の数を非常に制限することなる. 更に, この不安定波が, ある中立波動の過剰反射の結果として生ずるものと仮定すると, 対応する中立波動の位相速度は不安定波のそれとは異っているだろうし, 中立波動自体は境界条件(3.6)を満す必要はない. なぜなら, もし境界条件を満すような中立波動が存在するならば, 4.3.より臨界点と変曲

点が一致せねばならず，臨界点でのレイノルズ・ストレス $\overline{uv}$ のとびが 0 となって過剰反射はおこらないからである*．従って，ある不安定波が過剰反射の結果おこると断定するには，その不安定波と実際には実現しない中立波動との対応関係を見つけることが必要になり，これは必ずしもやさしいことではない．しかし，不安定波の増幅率が小さいときは，次のようにして中立波動の性質から不安定波の増幅率を見つもることができる．今，過剰反射の係数を R，臨界点と全反射面との距離を l，中立波動の群速度の y 成分を C_g とすると，波動の振幅は $2l/C_g$ の時間に R 倍になるであろう．従って，不安定波の増幅率は $\frac{C_g}{2l}\ln R$ で与えられるであろう．Lindzen・Tung (1978)，Lindzen *et al.* (1980) は β 平面上の傾圧不安定も鉛直方向に伝播するロスビー波の過剰反射で説明できると提案し，後者は Charney (1947) の問題および Green (1960) の問題における不安定波の増幅率を過剰反射の概念に基づいて求めた．その結果は同じ問題を固有値問題として解いた結果と定性的に非常に良く一致している．過剰反射が波動と平均流との相互作用に帰因していることを考えると，波動の可能な場の中でのシアー流の不安定はすべて過剰反射によって説明がつくかも知れない．例えば成層のあるシアー流では内部重力波が，圧縮性のあるシアー流では音波が，β 効果のある水平シアー流では水平に伝播するロスビー波が，β 効果のある傾圧不安定では鉛直に伝播するロスビー波が，不安定のメカニズムに大きな役割を担っていると思われる．又，一見波動の存在しない純粋なシアー流においても，シアー流の渦度勾配 U'' が β と同じような働きをすることを考えると，ロスビー波に似た渦度波(vorticity wave) が可能であり，この波動の過剰反射を考えることができる．ここで，しばらくの間，成層のある鉛直シアー流を考えてみよう．成層がない時，同じ速度分布を持つシアー流は不安定モード I を持つとする．Lindzen・Tung の考え方によれば，この不安定は渦度波の過剰反射によっておこっている．次に安定成層がある場合を考えると，モード I の発達率は成層の効果によって小さくなるであろう．なぜなら，運動が起ころうとすると安定成層に逆らって仕事をしなければならないからである．この意味では，安定成層は流れを安定化すると言える．

ところが，ここで注意をしなければならないのは，安定成層を導入したことで流れが全く新しいモード（内部重力波）を持つようになったことである．内部重力波は渦度波と全く異った条件の下に過剰反射を起こすことが可能である．例えば，渦度波が過剰反射を起こす為には流れの中に変曲点がなければならないが，内部重力波は流れの中のどこかに $R_i<0.25$ の点があれば過剰反射を起こす可能性がある．従って，成層がなければ安定な変曲点のない流れが，安定成層を加えた為に不安定になることも十分ありうるのである．このような場合の例として，Huppert (1973)，Chimonas (1974)，Fua *et al.* (1976) 等がある．さて，話をもとに戻すが，順圧不安定においても，これと全く同じような現象がある．$\beta=0$ のときには渦度波の過剰反射に対応するモードだけが存在するが，β 効果があると新たにロスビー波が可能になり，ロスビー波の過剰反射に対応する不安定が現われることがある．この新しいモードが，Kuo (1978) や Dickinson・Clare (1973) 及び Yamasaki・Wada(1972) 等によって見つけられた「新しい」モードに対応するのではないかと思われる．

以上紹介してきたように，過剰反射という概念はシアー流中に生ずるあらゆる不安定を説明するのに非常に便利な概念のようである．しかし，過剰反射がどのような物理的メカニズムによって起こるかはまだ明らかにされていないように思う．従って，仮に不安定現象が過剰反射によってうまく説明されたとしても，実はそれで不安定のメカニズムが解ったということにはならないのである．そして，第 1 段階の不安定と過剰反射を結びつける試みも，まだ最近始まったばかりでとても完全なものとは言えない．

9. 弱非線形理論

第 3 節の冒頭で述べたように，擾乱の振舞が線形論でうまく記述されるのは擾乱の振幅 ε が 1 に較べて十分小さい場合であった．線形不安定論によると，流れが不安定なとき擾乱の振幅は指数関数的に増幅するので，初期の擾乱の振幅がいかに小さくとも，有限時間内には $\varepsilon\ll 1$ の仮定が成立たなくなることが予想される．このことは，非線形の効果を無視しては擾乱の振舞が正しく記述されなくなることを意味している．

以上のような予想は，室内実験において，よりはっき

* 部分反射と過剰反射がバランスするような中立波が可能な場合がある．このような中立波は SNM である．Dickinson・Clare (1973) に現われた第 2 モードは，Lindzen・Tung (1978) によると，このような中立波に連続するような不安定モードである．

りした形で観察することができる．回転系における順圧不安定の室内実験は Hide・Titman (1967), Yamagata・Kimura (1973), Kimura (1976) 等によって行なわれた．その結果によると，基本流に対するロスビー数 R_b $\left(\equiv\frac{2V}{f_0L}\right)$がある臨界値を越えると渦状の擾乱が現われ，次第に発達してくる．しかし，一定時間たつと擾乱の発達は止まり，一定の振幅で定常状態に達する．擾乱の発達の初期は線形論で良く記述されるとしても，振幅が有限にとどまって平衡に達するのは明らかに非線形効果の表われと言わねばならない．従って，室内実験や現実の大気・海洋中に生じる擾乱の振舞を正しく記述するには非線形の方程式 (2.2) を使わなければならないと思われる．ところで，一般に非線形方程式を解析的手段で解くのはた易いことではない．しかし，もし，擾乱の平衡振幅 ε がなお1に較べて十分小さいならば，擾乱が線形論的に発達し，やがて平衡振幅に達する過程を比較的容易に調べることができる．それが，この節で紹介しようとする弱非線形理論 (Stuart, 1960; Watson, 1960) と呼ばれる手法である．

9.1. ランダウ方程式

Landau (1944) は以下に述べるような物理的考察に基づいて，擾乱の振幅 $|A|$が小さいとき，振幅の時間変化が，

$$\frac{d|A|}{dt}=a|A|+b|A|^3+O(|A|^5) \tag{9.1}$$

のように与えられるであろうと提案した．まず，擾乱の振幅が非常に小さいとして $O(|A|^3)$ 以下の項を無視すると，(9.1) は指数関数的に増大する解を与え，a は線形論における増幅率にあたることがわかる．ところで，振幅 $|A|$ が次第に大きくなって非線形効果が重要になり始めると，今考えている波数 k の擾乱自身の相互作用で $O(|A|^2)$ の振幅をもった波数 $2k$ や0（直流）の成分が作られる．これらの波数 O 及び $2k$ の成分と基本モードの波数 k の成分との非線形相互作用の結果としては，$O(|A|^3)$ の振幅をもった波数 k の成分が作られるであろう．従って，基本モードの振幅の時間変化における非線形効果は $O(|A|^3)$ で現われるはずである．同様にして，(9.1) における高次の補正は $O(|A|^{2n+3})$ $(n=1,2,\cdots)$ で現われる．(9.1) は次節で述べる弱非線形理論において，中心的な役割を果たす式で，提案者の名前をとって Landau 方程式と呼ばれている．

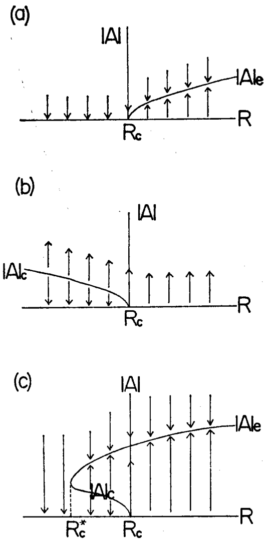
線形論においては (9.1) で$O(|A|^3)$ 以下の項を小さいとして無視した．弱い非線形論においては，$O(|A|^3)$ の補正までは考慮して，$O(|A|^5)$ 以下を無視することにする．このとき，(9.1) は，

$$\frac{d|A|}{dt}=a|A|+b|A|^3 \tag{9.2}$$

となる．(9.2) は非常に簡単な方程式ではあるが，実は非線形の安定性におけるいくつかの興味深い現象を記述している．(9.2) の解の振舞を見る為に，安定性がある1つのパラメータ R のみによって記述されるような系を考えよう．又，線形論から決まるある臨界値 R_c があって，$R>R_c$ では線形的に不安定であるとしよう．(9.2) において a は線形論から決まる増幅（減衰）率なので，$R\gtreqless R_c$ に応じて $a\gtreqless 0$ である．これに対して，b の値は次節で述べる弱非線形の問題を解いて初めて求まるもので，どういう不安定現象を扱うかによって異なるものである．弱非線形理論においては，b の符号が最大の興味となる．それは，b の正負によって (9.2) の解の振舞が大幅に異なるからである．

まず，$b<0$ の場合を考えてみよう．$R<R_c$ のときは，a も b も負なので初期にどんな振幅 $|A|$ を与えても究極的に減衰してしまう．一方，$R>R_c$ のときは，初期の振幅が小さいとき，$O(|A|^3)$ の項はほとんどきかないので振幅は指数関数的に増幅する．しかし，振幅が大きくなるにつれて $O(|A|^3)$ の項がきき始め，増幅率が低下して究極的には $|A|_e=\sqrt{\frac{a}{-b}}$ で与えられる平衡振幅に達して定常になることが予想される．第21図（a）はこのような擾乱の振舞を示したものである．図中，矢印は，擾乱の振幅の変化傾向を示している．$R<R_c$ ではどんな振幅を初期に与えても，究極的には $|A|=0$ に落ちつくが，$R>R_c$ では $|A|=|A|_e$ に落ちつく．このことは $R>R_c$ における (9.2) の2つの定常解 $|A|=0$, $|A|_e$ のうち $|A|=0$ は不安定平衡，$|A|=|A|_e$ は安定平衡にあることを示している．なお，a は普通 ΔR に比例することが多いので，図中$|A|_e$を示す曲線は放物線として書いてある．擾乱が第21図（a）のような振舞をする場合の不安定性を超臨界型不安定 (supercritical instability) と呼ぶことがある．このような不安定性を持つ現象としては Benard 対流・円筒 Couette 流の不安定などがある．

次に，$b>0$ の場合の擾乱の振舞は第21図（b）に示したようになる．$R<R_c$ のとき，(9.2) は2つの定常解 $|A|=0$, $|A|=|A|_c\equiv\sqrt{\frac{a}{-b}}$を持つが，このうち $|A|=0$ は安定平衡で，$|A|=|A|_c$ は不安定平衡であること



第21図　有限振幅の擾乱に対する安定特性．（a）超臨界型不安定における平衡振幅．矢印は平衡振幅以外の振幅を与えたときの，振幅の変化の方向を示す．（b）亜臨界型不安定における臨界振幅．（c）$O(|A|^5)$ の効果をとり入れたときの亜臨界型不安定．図中の曲線は $d|A|^4+b|A|^2+a=0$ で与えられる．

がわかる．又，$R>R_c$ に対する定常解 $|A|=0$ は不安定平衡である．このことから，$R<R_c$ のとき，初期擾乱の振幅が $|A|_c$ より小さければ，擾乱は究極的に減衰するが，振幅が $|A|_c$ より大きいならば振幅は増大していくことがわかる．この意味で，$|A|_c$ は臨界振幅と呼ばれる．又，$R>R_c$ では，どんなに小さな振幅の擾乱を初期に与えても振幅は増大していく．以上のことから，$b>0$ のときには線形論によると安定であっても，臨界振幅より大きい有限振幅の擾乱を与えると不安定がおこる可能性がある．このような不安定性を亜臨界型不安定 (subcritical instability) と呼ぶ．管の中のポアズイユ流の不安定は代表的な亜臨界型不安定の例である．

さて，亜臨界型不安定を持つ系で $R<R_c$ のとき臨界振幅 $|A|_c$ より大きな振幅を初期に与えたとした場合，その振幅がどこまで増大していくかについては (9.2) を考える限りわからない．この問題に答える為には (9.1) で無視した高次の補正を考えに入れてやらねばならない．例えば，(9.1) で $O(|A|^5)$ までの項を考え，仮に $O(|A|^5)$ の項の係数 d が負であったとしよう．その場合には，第21図(b)は第21図(c)のように補正される．$R>R_c$ ではどんな振幅を初期に与えても $|A|=|A|_e\equiv((-b-\sqrt{b^2-4ad})/2d)^{1/2}$ に漸近する．$R_c^*<R<R_c$ のときには，初期の振幅 $|A|_0$ が $|A|_0<|A|_c=((-b+\sqrt{b^2-4ad})/2d)^{1/2}$ ならば究極的に減衰し，$|A|_0>|A|_c$ ならば $|A|=|A|_e$ に漸近する．$R<R_c^*$ では，どんな $|A|_0$ を与えても究極的に減衰してしまう．従って，R_c^* は有限振幅の擾乱に対する R の臨界値であることがわかる．

2次元のポアズイユ流について第21図に対応する図を描くと第21図（c）のようになることが知られている (Zahn *et al.*, 1974)．その意味では，上で述べた推論はもっともらしい．しかし，弱い非線形の理論が，擾乱の平衡振幅 $|A|_e$ の小さいことを前提にしていることを考えると，上で述べたことは実は必ずしも正しいかどうか明らかでない．なぜなら，平衡振幅が小さいことが期待されるのは，超臨界型不安定において R が R_c に非常に近い場合だけであるからである．従って，弱い非線形論で b の値を決めることは，$R=R_c$ の近傍で $|A|=|A|_e$ 又は $|A|_c$ の曲線が $R\lessgtr R_c$ のどちらかの方向へどれくらいの傾きで立ち上がっているかを調べることであると理解すべきであって，それ以上 $O(|A|^5)$ の項を考えることがそれほど意味のあることとは思えない．しかし，いずれにしても b の符号を決めることは，問題にしている不安定性が超臨界型か亜臨界型かを調べることになり，非線形の不安定性を調べる第1歩としては欠かせない手続きである．

9.2. 弱非線形理論の手法

この節では，順圧不安定においても弱い非線形性を仮定すると擾乱の振幅の変化が Landau 方程式によって記述されることを示す (Stuart, 1960; Watson, 1960)．問題設定は第2節で述べたとおり（第1図参照）であるが，将来室内実験で理論を検証することを念頭において，室内実験で重要と思われる上下の境界での Ekman 摩擦の効果も考慮することにする．水平スケールを L，鉛直スケールを H，水平速度を V，時間を $\Omega_0^{-1}E^{-1/2}$，β^* を $\dfrac{\Omega_0 E^{1/2}}{L}$ で無次元化するとき，(2.1) は，

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi+R\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\psi-\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\psi\right)$$
$$+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}+2\nabla^2\psi=F \qquad (9.3)$$

と書ける．ここで，Rは基本流に対するレイノルズ数とでも言うべき量で，ロスビー数 R_b ($\equiv V/\Omega_c L$) をエクマン数 $E\left(\equiv\frac{\nu}{\Omega_0 H^2}\right)$ の平方根で割ったものである．すなわち，$R=R_b/E^{1/2}$．R は β と E が与えられた時，基本流の安定性を記述する唯一のパラメータである．一般に，Rが大きい程流れは不安定である．(9.3) の右辺の F は，基本流を維持する為の適当な forcing である．

さて，基本流 $\phi_0(y)$ に $O(\varepsilon)$ ($\varepsilon \ll 1$) の小さな振幅を持った擾乱が生じたとしよう．この擾乱の振幅が $O(\varepsilon)$ にとどまる範囲内で，どのように時間的に振舞うかを調べるのが，ここでの課題である．9.1. で $O(\varepsilon)$ の擾乱の振幅の時間変化に対する非線形効果は $O(\varepsilon^3)$ で現われることを予想した．一方，擾乱は$O(1)$ の位相速度で伝播するので，ある一地点で擾乱を観察するときその振幅の時間変化は$O(\varepsilon)$ である．このように，極端に時間変化の度合が異なる2つの現象を記述するのには，2つの時間スケール t'，τ を導入するのが便利である．t' は擾乱が線形論から決まる位相速度で伝播することに伴う振幅変化を記述する$O(1)$ の速い時間スケール，τ は非線形効果によって生ずる $O(\varepsilon^2)$ の遅い時間変化を記述する時間スケールである．このとき，$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t'}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial \tau}$ と書ける．$\varepsilon \ll 1$ の仮定によって，ψ と R を ε で展開すると，

$$\psi=\phi_0(y)+\varepsilon\phi_1(x,y,t',\tau)+\varepsilon^2\phi_2(x,y,t',\tau)+\varepsilon^3\phi_3+\cdots\cdots$$
$$R=R_0+\varepsilon R_1+\varepsilon^2 R_2+\cdots\cdots$$

R_0 としては，線形論から決まる臨界レイノルズ数 R_c を採用する．これは，9.1. で見たように平衡振幅 $|A|_e$ 又は臨界振幅 $|A|_c$ が小さいと期待されるのは $R=R_c$ の近傍に限られるからである．

以上のような展開を 9.3. に代入して，εのオーダー毎に整理すると，以下のような一連の問題が得られる．

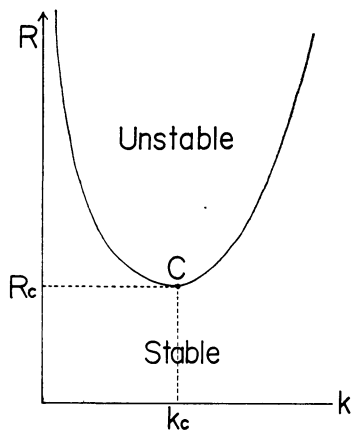
$O(\varepsilon^0)$: $2\frac{d^2\phi_0}{dy^2}=F$

一般に左辺は0でないので，基本流を維持するにはエクマン摩擦にバランスするような適当な forcing F が必要である．

$O(\varepsilon^1)$:

$$\frac{\partial}{\partial t'}\nabla^2\phi_1+R_0\left\{\frac{\partial\phi_0}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\phi_1-\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\phi_0\right\}+\beta\frac{\partial\phi_1}{\partial x}+2\nabla^2\phi_1=0 \qquad (9.4)$$

ϕ_1 として変数分離の可能な解，



第22図　エクマン摩擦があるときの順圧流の安定特性．実線は中立曲線を表わす．

$$\phi_1=R_e[A(\tau)\phi_1(y)e^{ik(x-R_0ct')}]$$
$$\equiv\frac{1}{2}(A\phi_1e^{ik\theta}+A^*\phi_1e^{-ik\theta}) \qquad (9.5)$$

を仮定すると，(9.4) は

$$L_k(\phi_1)\equiv[ikR_0(U-C)+2](\phi_1''-k^2\phi_1)+ik(\beta-R_0U'')\phi_1=0 \qquad (9.6)$$

となる．ここで，$L_k(\phi_1)$ は (9.6) で定義される演算子である．(9.6) は $y=\pm D$ での境界条件 $\phi_1=0$ が与えられたとき C に関する固有値問題を構成する．しばらくの間，R_0 を一般の R と思い固有値 C の虚部が0になるような R と波数 k の組合せを求めると，第22図に示したような中立曲線が得られる．この中立曲線の上で，最小の R を与える点を C とし，この点における R と k を R_c，k_c と書くことにしよう．擾乱が小さな振幅を持つと期待されるのは，R が R_c よりごく僅かだけ大きい時である．この時，卓越する擾乱は増幅率の大きい波数 k_c の擾乱であると思われる．又，擾乱の構造もC点における中立擾乱の構造に近いと考えて良いであろう．そこで以下では，$R_0=R_c$ とおいて (9.6) からこの中立擾乱の構造を求め，そのような構造を持った擾乱の振幅 A が，R が少しだけ R_c より大きい時にどのように振舞うかを調べてみよう．$O(\varepsilon)$ の問題は線形論であるので，この段階では振幅 A の絶対値を決めることができない．

$O(\varepsilon^2)$ の問題に進む前に，以下で多用する ϕ_1 の随伴解という概念を定義しておこう．ある関数 χ_1 が $y=\pm D$ で境界条件 $\chi_1=0$ を満し，χ_1 に共役な関数 χ_1^* を(9.6)

の左辺にかけて $y=-D$ から D まで積分すると0になる時，χ_1 を ϕ_1 の随伴解と呼ぶ．χ_1 は今の場合，

$$\frac{d^2}{dy^2}\{[-ikR_0(U-C^*)+2]\chi_1\}$$
$$-\{k^2[-ikR_0(U-C^*)+2]$$
$$+ik(\beta-R_0U'')\}\chi_1=0 \qquad (9.7)$$

及び，$y=\pm D$ における境界条件 $\chi_1=0$ で与えられる．ここで C^* は C の共役複素数である．

$O(\varepsilon^2)$:

$$\frac{\partial}{\partial t'}\nabla^2\phi_2+R_0\left\{\frac{\partial\phi_0}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\phi_2-\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\phi_0\right\}$$
$$+\beta\frac{\partial\phi_2}{\partial x}+2\nabla^2\phi_2=$$
$$-R_1\left\{\frac{\partial\phi_0}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\phi_1-\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\phi_0\right\}$$
$$-R_0\left\{\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\phi_1-\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Delta^2\phi_1\right\} \qquad (9.8)$$

$$\phi_2=B_0(\tau)\phi_{20}(y)+R_e[B_1(\tau)\phi_{21}(y)e^{ik\theta}$$
$$+B_2(\tau)\phi_{22}(\tau)e^{2ik\theta}$$

とおいて (9.8) を直流成分と $e^{ik\theta}, e^{2ik\theta}$ 成分に分けると，

1）直流成分

$$2B_0\phi_{20}''=\frac{ikR_0|A|^2}{4}(\phi_1'\phi_1^{*\prime\prime}-\phi_1^{*\prime}\phi_1''$$
$$+\phi_1\phi_1^{*\prime\prime\prime}-\phi_1^*\phi_1''') \qquad (9.9)$$

(9.9) は $y=\pm D$ での適当な境界条件と共に解ける．直流成分に対しては v は最初から0なので，$\phi_{20}=0$ は境界条件として使えない．Phillips (1954) はこの場合には $\phi_{20}'=0$ を境界条件として使えばよいことを示した．この条件の下に (9.9) を解くと任意定数分だけが不定で残るが，これは0と置いて差しつかえない．ϕ_{20} は擾乱の非線形効果による基本流の変形を表わしている．(9.9) を y について一回積分すると，

$$2B_0\phi_{20}'=\frac{ikR_0|A|^2}{4}\frac{d}{dy}(\phi_1\phi_1^{*\prime}-\phi_1^*\phi_1')$$
$$=R_0\frac{d}{dy}\left(\overline{\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial\phi_1}{\partial y}}\right)$$

この式は擾乱に伴うレイノルズ応力の発散が平均流の加速になっていることを示している．(9.9) を解くにあたって，ここでは $B_0=\frac{ikR_0|A|^2}{8}$ とおき，$\phi_{20}''=\phi_1'\phi_1^{*\prime\prime}-\phi_1^{*\prime}\phi_1''+\phi_1\phi_1^{*\prime\prime\prime}-\phi_1^*\phi_1'''$ の解を ϕ_{20} として使うことにする．

2）$e^{ik\theta}$ 成分

$$B_1L_k(\phi_{21})=-ikR_1A[U(\phi_1''-k^2\phi_1)-U''\phi_1] \qquad (9.10)$$

境界条件は $y=\pm D$ で $\phi_{21}=0$．(9.10) の両辺に随伴解に複素共役な関数 χ_1^* をかけて $y=-D$ から D まで積分すると左辺$=0$ である．ところが，一般に $\int_{-D}^{D}\chi_1^*[U(\phi_1''-k^2\phi_1)-U''\phi_1]dy$ は0でないので $R_1=0$ でなければならない．

3）$e^{2ik\theta}$ 成分

$$B_2L_{2k}(\phi_{22})=\frac{ikR_0}{2}A^2(\phi_1'\phi_1'''-\phi_1'\phi_1'')$$

境界条件は $y=\pm D$ で $\phi_{22}=0$．$B_2=\frac{ikR_0}{4}A^2$ とおくとき，上式は，

$$[ikR_0(U-C)+1](\phi_{22}''-4k^2\phi_{22})$$
$$+ik(\beta-R_0U'')\phi_{22}=\phi_1\phi_1'''-\phi_1'\phi_1''$$

と書ける．ϕ_{22} は波数 k の擾乱自身の相互作用で作り出された波数 $2k$ の擾乱の y 方向の構造を与える．

$0(\varepsilon^3)$:

$$\frac{\partial}{\partial t'}\nabla^2\phi_3+R_0\left\{\frac{\partial\phi_0}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\phi_3-\frac{\partial\phi_3}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\phi_0\right\}$$
$$+\beta\frac{\partial\phi_3}{\partial x}+2\nabla^2\phi_3=-\frac{\partial}{\partial\tau}\nabla^2\phi_1-R_0\left\{\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\cdot\right.$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\phi_2-\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\phi_1+\frac{\partial\phi_2}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\phi_1$$
$$\left.-\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\phi_2\right\}-R_2\left\{\frac{\partial\phi_0}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\phi_1\right.$$
$$\left.-\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\phi_0\right\} \qquad (9.11)$$

ϕ_3 としては $e^{ik\theta}$ 成分だけを考えると，$\phi_3=\frac{1}{2}[E(\tau)\phi_3(y)e^{ik\theta}+E^*\phi_3e^{-ik\theta}]$ とおくことにより，(9.11) は

$$\frac{1}{2}EL_k(\phi_3)=-\frac{1}{2}\ \frac{dA}{d\tau}(\phi_1''-k^2\phi_1)$$
$$-\frac{ikR_2}{2}A\{U(\phi_1''-k^2\phi_1)-U''\phi_1\}$$
$$+\frac{k^2R_0^2}{16}A|A|^2\ G(\phi_1,\phi_{20},\phi_{22}) \qquad (9.12)$$

と書ける．ここで，G は，

$$G(\phi_1,\phi_{20},\phi_{22})=\phi_{20}'(\phi_1''-k^2\phi_1)-\phi_{20}'''\phi_1$$
$$+2\phi_1^{*\prime}(\phi_{22}''-4k^2\phi_{22})-2\phi_{22}(\phi_1^{*\prime\prime\prime}-k^2\phi_1^{*\prime})$$
$$+\phi_1^*(\phi_{22}'''-4k^2\phi_{22}')-\phi_{22}'(\phi_1^{*\prime\prime}-k^2\phi_1^*)$$

で与えられる．ϕ_3 に対する境界条件は $y=\pm D$ で $\phi_3=0$ である．(9.12) に χ_1^* をかけて $y=-D$ から D まで積分すると左辺は0になる．従って，

$$a=\frac{-ik\int_{-D}^{D}\chi_1{}^*[U(\phi_1{}''-k^2\phi_1)-U''\phi_1]dy}{\int_{-D}^{D}\chi_1{}^*(\phi_1{}''-k^2\phi_1)dy}$$

$$b=\frac{\frac{k^2R_0{}^2}{8}\int_{-D}^{D}\chi_1{}^*G(\phi_1,\phi_{20},\phi_{22})dy}{\int_{-D}^{D}\chi_1{}^*(\phi_1{}''-k^2\phi_1)dy}$$

とおくとき，(9.12) は，

$$\frac{dA}{d\tau}=aR_2A+bA|A|^2 \tag{9.13}$$

と書ける．Aは一般に複素数なので，$A=|A|e^{i\varphi}$と置いて振幅の絶対値と位相の変化をそれぞれ求めると，$a=a_r+a_ii$, $b=b_r+b_ii$ とおくとき (9.13) から，

$$\frac{d|A|}{d\tau}=a_rR_2|A|+b_r|A|^3 \tag{9.14}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=a_iR_2+b_i|A|^2 \tag{9.15}$$

が得られる．擾乱の実際の振幅 $\widetilde{A}$ が εA, τ が $\varepsilon^{-2}t$, R_2 が $\varepsilon^{-2}\Delta R(\equiv\varepsilon^{-2}(R-R_c))$ で表わされることに注意すると，(9.14) は，

$$\frac{d|\widetilde{A}|}{dt}=a_r\Delta R|\widetilde{A}|+b_r|\widetilde{A}|^3 \tag{9.16}$$

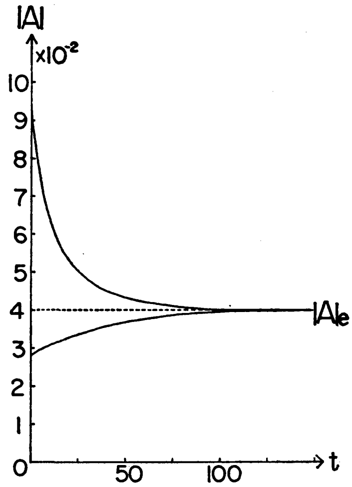
と書ける．これは 9.1. で説明した Landau 方程式に他ならない．従って，$b_r<0$ ならば超臨界型不安定性，$b_r>0$ ならば亜臨界型不安定が予想される．なお，a_r は線形論から決まる波数 k_c に対する擾乱の増幅率を k_cC_i と書くとき，$a_r=\left[\frac{\partial(Rk_cC_i)}{\partial R}\right]_{R=Rc}$ で与えられる．一方，(9.15) からは，

$$\frac{d\varphi}{dt}=a_i\Delta R+b_i|\widetilde{A}|^2 \tag{9.17}$$

が得られる．これから，$R\fallingdotseq R_0$ のとき，擾乱の位相速度は $R=R_0$ のときから2つの効果によってずれることがわかる．第1は，a_i が $\left[\frac{\partial(Rk_cC_r)}{\partial R}\right]_{R=Rc}$ で与えられることから明らかなように，R が R_0 から ΔR だけずれている時に，線形論から予想される位相のずれである．第2は有限振幅の効果によって位相速度がずれる効果で，ずれは振幅の2乗に比例する．定常状態においては (9.16) から $|\widetilde{A}|^2=-\frac{a_r}{b_r}\Delta R$ となるので，(9.17)は，

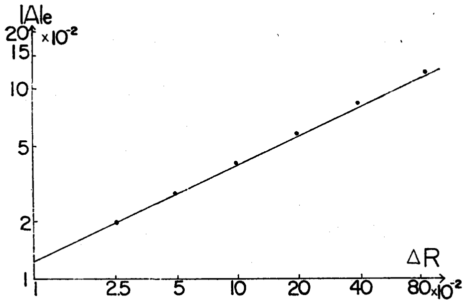
$$\frac{d\varphi}{dt}=\left(a_i-\frac{b_ia_r}{b_r}\right)\Delta R$$

となる．これから，定常状態における位相速度の R_0C_r からのずれは，$-\frac{1}{k_c}\left(a_i-\frac{b_ia_r}{b_r}\right)\Delta R$ で与えられることがわかる．



第23図 スペクトルモデルによって求めた擾乱の $y=0$ における振幅の絶対値の時間変化．2つの初期振幅 ($|A|_0=0.9382$ と 0.2845) から出発した結果が示してある．
$U(Y)=\tanh Y$ $\beta=0$ $\Delta R=0.1$

以上は，順圧不安定における弱非線形の問題の一般論であった．筆者は最近具体的な基本流 $U(y)=\tanh y$ と $\mathrm{sech}^2\, y$ について，ランダウ係数 b を求めてみた．その結果によると，どちらの基本流においても，すべての β に対して b の実部 b_r は負であり，順圧不安定が超臨界型不安定であることを示している．第23図は $U(y)=\tanh y$ において $\beta=0$ のとき，初期に波数 k_c, レイノルズ数 R_c に対応する中立波の構造を持った擾乱を与え，波数 0, k_c, $2k_c$ の成分のみを持つ極度に truncate された非線形スペクトルモデルを時間積分して擾乱の振幅変化を調べたものである．図から，初期に与えた振幅によらず，擾乱の振幅は時間と共に一定の平衡振幅に近づくことがわかる．第24図は，こうしていろいろな ΔR に対して得られた平衡振幅を理論値 $|A|_e=\sqrt{\frac{a_r\Delta R}{-b_r}}$ と較べたものである．図は両対数で目盛ってあるので，理論値は傾き1/2の直線で表わされる．ΔRが小さいときは，スペクトルモデルの結果と理論値とは非常に良い一致をしめすが，ΔR が大きくなると多少の違いが目立ち始める．これは，弱非線形の理論が，R が R_c に近い所での



第24図　スペクトルモデルによって求めた平衡振幅（黒丸）と理論的に求めた平衡振幅（直線）の比較．

み有効であることを示している．

10. おわりに

最初に述べたように，この小稿では順圧不安定の基本的な性質について述べることを目標とした．この為に順圧不安定には本質的ではないが，実際の大気・海洋における現象に応用する上では重要と思われるいくつかの効果――例えば自由表面の存在による発散の効果，成層の効果，非地衡風成分の効果等――によって，純粋な順圧不安定波がどのような影響を受けるかについては敢えて述べなかった．これらの効果に興味のある方は，Lipps (1963), Philander (1976), Kuo (1978) 等を参考にして頂きたい．又，9.2. で求めた定常解の安定性については紙数の関係で述べられなかった．この課題については，Stuart・DiPrima (1978), Niino (1981)を参照して頂きたい．

大気中の擾乱で，順圧不安定の結果として生じていることが明確にされているものは，実を言うと必ずしも多くない．僅かに，アフリカ波動と呼ばれる大西洋の赤道地方で西進する擾乱が順圧不安定によって発生することがほぼ確実になっている程度である (Rennick, 1976; Simmons, 1977; Mass, 1979)．しかし，確認された現象が少ないということは，順圧不安定が大気の力学にとって重要でないということでは決してない．現に，古くから言われている太平洋西部の赤道地方で見られる偏東風波動の問題，インド洋のモンスーン低気圧の問題（増田・石田・西・新田，1980),冬の北陸地方で見られる渦状擾乱の問題 (Asai・Miura, 1981) 等，順圧不安定によって起こるのではないかと疑われている現象は数多く存在する．海洋においても，中規模渦の成因や赤道潜流の安定性等，順圧不安定に関係ありそうな問題が様々な角度から調べられている．将来，十分な観測データが整うようになれば，順圧不安定の結果生じていると断定される擾乱も次々と見い出されるのではないかと思う．

この小稿は，東京大学海洋研究所海洋気象部門のセミナーで昨年1月に紹介した review をもとにしてまとめたものである．セミナーの後，その内容を文章にまとめるようにお勧め下さった海洋研究所の浅井冨雄・木村竜治の両先生に深く感謝致します．又，木村竜治先生と助手の吉崎正憲さんには，日頃からいろいろと御指導を頂いたり，雑談に時間をさいて頂いただけでなく，今回は原稿に対して多くの有益なコメントを頂きました．お2人に心から感謝致します．東京学芸大学の松田佳久さん，東京大学の松野太郎先生，京都大学の巽友正先生・後藤金英先生にも多くの有益なコメントを頂きましたことを感謝致します．

このように多くの方々のお世話になりながら，筆者の勉強不足から不完全な内容になったのではないかと危惧しております．内容に関して読者の皆様の御批判・御叱責を頂ければ幸いです．

文　献

Asai, T. and Y. Miura, 1981: An analytical study of meso-scale vortex-like disturbances observed around Wakasa Bay area, Submitted to J. Met. Soc. Japan.

Betchov, R. and A. Szewczyk, 1963: Stability of a shear layer between parallel streams, Phys. Fluids, 6, 1391-1396.

————, R. and W.O. Criminale, Jr., 1967: Stability of parallel flows, Academic Press, 330 pp.

Booker, J.R. and F.P. Bretherton, 1967: The critical layer for internal gravity waves in a shear flow, J. Fluid Mech., 27, 513-529.

Bretherton, F.P. 1966: The propagation of groups of internal gravity waves in a shear flow, Quart. J. Roy. Met. Soc., 92, 466-480.

Case, K.M., 1960: Stability of inviscid plane Couette flow, Phys. Fluids, 3, 143-148.

————, K.M., 1961: Hydrodynamic stability and the inviscid limit, J. Fluid Mech., 10, 420-429.

Charney, J.G., 1947: The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current, J. Met., 4, 135-162.

————, J.G. and P.G. Drazin, 1961: Propagation of planetary-scale disturbances from the lower into the upper atmosphere, J. Geophys. Res., 66, 83-110.

Chimonas, G., 1974: Considerations of the stability of certain heterogeneous shear flows including

some inflexion-free profiles, J. Fluid Mech., 65, 65–69.
Dickinson, R.E. and F.J. Clare, 1973: Numerical study of the unstable modes of a hyperbolic-tangent barotropic shear flow, J. Atmos. Sci., 30, 1034–1049.
Eady, E.T., 1949: Long waves and cyclone waves, Tellus, 1, 33–52.
Eliassen, A., E. Høiland and E. Riis, 1953: Two-dimensional perturbation of a flow with constant shear of a stratified flow, Inst. Weather Climate Res., Oslo. Publ. 1.
———, A. and E. Palm, 1961: On the transfer of energy in stationary mountain waves, Geofys. Publ., 22, 1–23.
Fjφrtoft, R., 1950: Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex, Geofys. Publ., 17, 1–52.
Fua, D., F. Einaudi and D.P. Lalas, 1976: The stability analysis of an inflexion-free velocity profile and its application to the night-time boundary layer in the atmosphere, Boundary-Layer Met., 10, 35–54.
Garcia, R.V., 1956: Barotropic waves in straight parallel flow with curved velocity profile, Tellus, 8, 82–93.
Green, J.S., 1960: A problem in baroclinic stability, Quart. J. Roy. Met. Soc., 86, 237–251.
Haltiner, G.J. and LT. R.T. Song, 1962: Dynamic instability in barotropic flow, Tellus, 14, 383–393.
Hide, R. and C.W. Titman, 1967: Detached shear layers in a rotating fluid, J. Fluid Mech., 29, 39–60.
Høiland, E., 1953: On two-dimensional perturbation of laminar flow, Geofys. Publ., 18, 1.
Howard, L.N., 1961: Note on a paper of John W. Miles, J. Fluid Mech., 10, 509–512.
———, L.N., 1964: The number of unstable modes in hydrodynamic stability problems, J. Mec., 3, 422–443.
Huppert, H.E., 1973: On Howard's technique for perturbing neutral solutions of the Taylor-Goldstein equation., J. Fluid Mech. 57, 361–368.
Jones, W.L., 1968: Reflexion and stability of waves in stably stratified fluids with shear flow: a numerical study, J. Fluid Mech., 34, 609–624.
Kuo, H.L., 1949: Dynamic instability of two-dimensional non-divergent flow in a barotropic atmosphere, J. Met., 6, 105–122.
———, H.L., 1973: Dynamics of quasi-geostrophic flows and instability theory, Advances in Applied Mechanics, Academic Press, 13, 248–330.
———, H.L., 1978: A two-layer model study of the combined barotropic and baroclinic instability in the tropics, J. Atmos. Sci., 35, 1840–1860.
Kimura, R., 1976: Barotropic instability of a boundary jet on a sloping bottom, Geophys. Fluid Dyn., 7, 205–230.
Landau, L.D., 1944: On the problem of turbulence, C.R. Acad. Sci. USSR, 44, 311.
Lin, C.C., 1945: On the stability of two-dimensional parallel flows. Parts I, II and III, Quart. Appl. Math., 3, 117–142, 218–234, 277–301.
———, C.C., 1955: The theory of hydrodynamic stability, Cambridge Univ. Press, 155 pp.
———, C.C., 1961: Some mathematical problems in the theory of the stability of parallel flows, J. Fluid Mech., 10, 430–438.
Lindzen, R.S. and K.K. Tung, 1978: Wave overreflection and shear instability, J. Atmos. Sci., 35, 1626–1632.
———, R.S., B. Farrell and K.K. Tung, 1980: The concept of overreflection and its application to baroclinic instability, J. Atmos. Sci., 37, 44–63.
Lipps, F.B., 1962: The barotropic stability of the mean westerly winds in the atmosphere, J. Fluid Mech., 12, 397–407.
———, F.B., 1963: Stability of jets in a divergent barotropic fluid, J. Atmos. Sci., 20, 120–129.
———, F.B., 1965: The stability of an asymmetric zonal current in the atmosphere, J. Fluid Mech., 21, 225–239.
Mass, C., 1979: A linear primitive equation model of African wave disturbances, J. Atmos. Sci., 36, 2075–2092.
Michalke, A., 1964: On the inviscid instability of the hyperbolic-tangent velocity profile, J. Fluid Mech., 19, 543–556.
Miles J.W., 1961: On the stability of heterogeneous shear flows, J. Fluid Mech., 10, 496–508.
増田耕一，石田十郎，西　裕司，新田　勍，1980：モンスーン低気圧の客観解析と生成機構，1980年度日本気象学会春季大会講演予稿集，p. 75.
Niino, H., 1981: A weakly non-linear theory of barotropic instability (in preparation).
Pedlosky, J., 1964: The stability of currents in the atmosphere and the ocean: Part I, J. Atmos. Sci., 21, 201–219.
Philander, S.G.H., 1976: Instabilities of zonal equatorial currents, J. Geophys. Res., 81, 3725–3735.
Rayleigh, L., 1880: On the stability, or instability, of certain fluid motions, Proc. London Math.

Soc., 11, 57-70.

Rennick, M.A., 1976: The generation of African waves, J. Atmos. Sci., 33, 1955-1966.

Shen, S.F., 1954: Calculated amplified oscillations in plane Poiseulle and Blasius flows, J. Aero. Sci., 21, 62.

Simmons, A.J., 1977: A note on the instability of the African easterly jet, J. Atmos. Sci., 34, 1670-1674.

Stuart, J.T., 1960: On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, Part I, J. Fluid Mech., 9, 353-370.

————, J.T. and R.C. DiPrima, 1978: The Eckhaus and Benjamin-Fein resonance mechanisms, Proc. Roy. Soc. Lond. A., 362, 27-41.

田中 浩, 1975: 大気中の内部重力波「内部重力波の理論」, 気象研究ノート, 126, 1-45.

Tatsumi, T. and K. Gotoh, 1960: The stability of free boundary layers between two uniform streams, J. Fluid Mech., 7 433-441.

Tatsumi, T., K. Gotoh and K.Ayukawa, 1964: The stability a of free bounbary layer at large Reynolds numbers, J. Phys. Soc. Japan. 19, 1966-1980.

巽 友正, 後藤金英, 1976: 流れの安定性理論, 産業図書, 275 pp.

寺沢寛一, 1954: 自然科学者のための数学概論, 岩波書店, p 722.

Thompson, P.D., 1953: On the thoery of large scale disturbances in a two-dimensional baroclinic equivalent of the atmosphere, Quart. J. Roy. Met. Soc., 79, 51-69.

Tollmien, W., 1935: Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeits-verteilungen, Nachr. Ges. Wiss. Gättingen, Math. Phys. Kl., 50, 79-114.

瓜生道也, 1976: 波とそのまわりの平均運動, 天気, 23, 1-22.

Watson, J., 1960: On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, Part II, J. Fluid Mech., 9, 371-389.

Yamagata, T. and R. Kimura, 1973: A simple laboratory model for investigating the dynamic instability of a nearly two-dimensional jet in a rotating fluid, J. Met. Soc. Japan, 51, 420-434.

Yamasaki, M. and M. Wada, 1972: Barotropic instability of an easterly zonal current, J. Met. Soc. Japan, 50, 110-121.

Yanai, M. and Ts. Nitta, 1968: Finite difference approximations for the barotropic instability problem, J. Met. Soc. Japan, 46, 389-403.

Zahn, J. P., J. Toomre, E.A. Spiegel and D.O. Gough, 1974: Nonlinear cellular motions in Poiseuille channel flow, J. Fluid Mech., 64, 319-345.

(注1) 非粘性のオイラー(以下Eと略す)方程式は, 粘性を考慮したナヴィエ・ストークス(以下N-Sと略す)の式に較べてより低次の微分方程式であるので, E-方程式は N-S 方程式に較べて自由度が少ないと考えることができる. このような考えに立つと, E方程式の解は非粘性の極限での N-S 方程式の解に一致してもよさそうに思える. しかし, E方程式をE方程式に任意の高階微分をつけ加えた方程式で高階微分の係数を0に近づけたときの極限と考えることもできる. この場合, E方程式は N-S 方程式よりも多くの自由度を持っていると言える. このように考えると, 非粘性の極限で N-S 方程式の解がE方程式の解に一致する必然性はないことになる.

(注2) 擾乱がなめらかなとき(「なめらか」というのは, ここでは擾乱に伴う速度の大きさを O(1) とするとき擾乱に伴うシアーが O(1) であるという意味で使ってある.), N-S 方程式において粘性項の大きさは $O(R^{-1})$ である. 従って, $O(R)$ より短い時間では粘性の効果は無視できると期待できる. もし, 擾乱がなめらかでなく, 例えば速度が不連続を持つような場合には, 短い時間であっても粘性の効果を無視することはできない. 従って, 系Iと系IIでは擾乱の振舞に違いが生ずるであろう.

Tatsumi・Gotoh・Ayukawa (1964) は粘性問題の非粘性の極限で $k>k_0$ に対して存在する減衰波の構造を調べ, 速度に不連続があることを示した. この波の減衰率は O(1) であるので, 減衰が粘性消散によってひきおこされると仮定すると波に伴うシアーの強さは少くとも $O(R^{1/2})$ 以上であると思われる. 一方, 当然の事であるが, $k<k_0$ で存在する不安定波はなめらかな構造を持っているので, 非粘性の極限で粘性項は無視できるようになる.

（注3） $k>k_0$ の擾乱は，系Ⅰにおいては連続モードの重ね合わせで表現されるので，時間 t と共に $1/t$ で減衰する．これに対して，系Ⅱにおいては指数関数的に e^{-pt} のように減衰するモードの重ね合わせで表現される．各モードの重ね合わせの振幅を $A(p)$ と書くと，擾乱の振舞は，$\int_0^\infty A(p)e^{-pt}dp$（厳密には離散的な p に関する和）で表わされる．もし，$A(p)=1$ ならば擾乱は $1/t$ で減衰する．従って，指数関数的に減衰するモードの重ね合わせによっても代数的に減衰する振舞を記述できる可能性はある．

日本学術会議第81回総会報告

日本学術会議第12期最初の第81回総会は，1981（昭和56）年1月20，21，22日の3日間，本会議講堂で開かれた．

第1日は，定刻9時30分開会．直ちに会長，副会長選挙に入り，会長に伏見康治第4部会員，人文科学部門副会長に岡倉古志郎第2部会員，自然科学部門副会長に塚田裕三第7部会員を選出した．

午後は，第12期の活動を円滑にするための予備的検討委員会の報告が行われた．その後各部会を開き，それぞれ部長，副部長，幹事を選出した．

第2日は，15時すぎまで第11期の経過報告にあてられた．伏見会長は，前期の本会議の活動について所感をのべ，総合的な科学技術振興策樹立の必要を強調した．つづいて運営審議会付置各委員会，各部，各常置委員会，各特別委員会から経過報告が行われた．各報告とも，特に80数名の新会員を念頭において，学術会議全体，各部，各委員会の性格や活動をうきぼりにする配慮の下で行われた．なお，第12期への引継ぎ事項等も報告された．その後各部会を開き，第12期の活動計画等について審議した．

第3日は，まず「第12期活動計画委員会（仮称）の設置並びに各種委員会の当面の措置について（申合せ）」が提案され，運営上の問題等についての意見が出されたのち，原案を可決した．

つづいて第12期活動計画に関する自由討議に移った．学術会議の活動の基本的なあり方については，総合的・学際的とりくみ，個々の科学者との連繋，長期的展望をもった継続性の必要等が強調された．さらに学術会議の組織・運営上のたてまえとしての自主・民主・公開の重要性等が指摘された．それとの関連において第12期に具体的にとりあげるべき重点課題として，人文・社会・自然科学の総合的発展の方策，都市問題，平和問題，福祉問題，学問体系の現状の洗い直し，学術情報生産・流通問題，発展途上国との学術協力問題，教育問題，学歴社会問題，国公私立大学問題，婦人科学者問題，食糧問題，原子力問題，沖縄問題等々が，新会員を含む30数名から提起された．

さらに第12期活動計画をめぐる討議の一環として，第80回総会において採択された「工学技術振興の方途を早急に講ずることについて（要望）」について説明があり，これをめぐって種々の質疑，意見がかわされた．

総会終了後，各部会をひらき，第12期活動計画委員会の委員の選出などを行った．引きつづいて第1回の第12期活動計画委員会を開いた．

こうして第12期の活動が始まった．会員の出席率は，第1日97.6%，第2日95.7%，第3日93.8%であった．

（日本学術会議広報委員会）