551. 558. 1

大気中における浮力を持つジェットの軌跡（第1部）*

伊 藤 昭 三**

要旨

横風中のジェットの上昇高さは実用の精度で

$$Z_M/d=3\cdot\frac{V_s}{U}$$

が適用出来る理論的，実験的考察がのべられてある．そこで Z_M は上昇高さ，d は排出口径，V_s は排気速度，Uは周囲の平均風速である．式の導出に際し，混入係数が排気速度と周囲の平均風速の比に依存する可能性について討論し，混入係数の補正を行なうことを提案している．

1. はしがき

大気中への汚染物質の多少の排出は多くの技術的理由からさけられないことが多い．それ故煙突からの排ガスの拡がり稀釈について充分な知識が必要となる．たとえば，排煙がより高く上昇すれば拡散によって地表に達する前に充分の混合が行なわれることは良く知られている．最適な放出系を設計したり，生態系への影響を評価するための重要な1つの因子である．

過去数年の間に一般の自然環境のように成層流体中での浮力をもったジェットの行動を数学的にモデル化する努力が活動的に行なわれて来た．

自然大気中における排気流体の上昇過程は大変複雑で完全な記述はほとんど不可能である．Schatzman (1978) の精確な基礎方程式の解析においても実験的定数を必要とすることが知られている．それ故いくつかの理論式および実験式がプルーム上昇高を求めるのに提案されている．かくしてプルーム上昇高に関する多くの議論がなされそして混乱がある．この研究の目的はエントレイメント係数について検討し，第1部では基礎方程式系の解を導き浮力を持たないジェットについてこれ迄の実験結果を用いて実用上必要なジェットの上昇高について議論し，Cross-flow 中でのエントレイメント係数についての修正を提案している．そして第2部ではその結果をプルーム（浮力を持ったジェット）に適用し，安定度の広範囲について上昇高さの推定式の確認を行なってある．

2. 理論的考察

最近のプルーム上昇モデルの共通な特性は簡単な流体力学的原理にその基礎をおいている．一般にそのモデルはプルームの断面について保存方程式系を積分した形のものであり質量，鉛直方向の運動量および熱に関するフラックス式系がプルームの本質的様相をあらわしていると仮定している．これらの方程式系が閉じた系になるためプルームの平均上昇流と乱流混合を関係づけ排出流体と周囲大気の干渉を表現するのが最も普通である．その方法の1つが質量フラックスの方程式にエントレイメント係数を仮定することである．そしてエントレイメントはすべての場所でプルームの鉛直速度に比例していると仮定される．この仮定よりプルームは本質的に高さについて1次式で成長する (Scorer, 1968; Slawson・Csanady, 1969)．プルームの写真解析や断面測定結果によると排出流体の乱れが周囲大気の乱れにくらべて充分大きい第1相では少なくともこの関係が成立している (Bringfelt, 1969)．現在よく知られているプルームの軌跡は風下距離 $X^{2/3}$ であらわされる．この論文は Cross-flow 中のジェットを基礎にしてエントレイメント係数を考察し，統一した考えのもとにジェットおよびブイアントジェットについて解を導き安定成層，不安定成層中へのプルームの上昇過程を記述し，実用上重要なジェッ

* The trajectory of buoyant jet in the Atmosphere (Part 1)

** Shozo Ito，大阪府立大学工学部．

——1980年9月24日受領——
——1981年1月12日受理——

トおよびプルームの上昇高さを求めることを目的としている．

保存方程式系の導出はプルーム上昇高さに関する多くの最近の発表でみられよく知られている (Briggs, 1969). それ故，ここでは慣用の記号を用いて直ちに書くことにする．記号の説明は最後に一括して行なってある．ただし慣用記号以外は説明を付すことにした．

保存方程式系

$$\frac{d}{dt}(UR^2)=2RU\alpha|w| \qquad (1)^*$$

$$\frac{d}{dt}(UR^2g\Theta)=-SUR^2w \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dt}(UR^2w)=UR^2g\Theta \qquad (3)$$

$$\frac{dZ}{dt}=w \qquad (4)$$

$$U=U_s(1+Z/h_s)^P \qquad (5)$$

ここに $\Theta=\theta'/\theta_a$ で無次元エクセス温度である．また，(5) 式において，$Z=0$ は h_s においてある．(1)～(5) の系で，プルームの水平運動は周囲大気と完全に同じであると仮定されている．

これ迄，接地層をのぞく下層大気では風速のシヤーは小さく排出流体の運動に周囲大気の風速のシヤーは大きな影響を与えないとした多くの実用式が用いられている．しかしながら安定な成層状態ではしばしば強い風速のシヤーが観測されることも多い．ここではシヤーを持つ風速分布の実際のものを導入して問題を複雑にするよりは，簡単な巾法則を導入してその本質を検討することにした．

風速分布が (5) 式によって与えられるとき，保存方程式系を解くため Z-座標系に変換すると次のような方程式系となる．

$$dR/dZ=\alpha-\frac{R}{2U}\frac{dU}{dZ} \qquad (1a)$$

$$d\Theta/dZ+\frac{2\alpha}{R}=-S/g \qquad (2a)$$

$$dw^2/dZ+\frac{4\alpha}{R}w^2=2g\Theta \qquad (3a)$$

(1a) 式を導くとき $|w|$ は dZ/dt でおきかえてある．

風速のシヤーがない時，(1a) 式から明らかなようにプルームの半径 R は高さについて1次式であらわされる．

さて，一般の場合，初期条件 $z=0$ で無視出来ない放出口の大きさ $r=r_s$ を考えるとプルームの成長は無次元で次のようにあらわされる．

$$r=\alpha^*(z+1)+(r_s-\alpha^*)(z+1)^{-P/2} \qquad (6)$$

ただし $\alpha^*=\dfrac{\alpha}{P/2+1}$ である．

ここで，無次元高さ $z=Z/h_s$，無次元プルーム半径 $r=R/h_s$ および無次元排出口相当半径 $r_s=R_s/h_s$ が用いられてある．

(6) 式から明らかなように，平均流のシヤーを考慮するとプルームの成長は平均流のシヤーによって変化する．しかしながら，大気中で普通にみられる巾指数 P の値の範囲では，シヤーの効果はそれ程大きくない．

Murthy (1970) の風洞を用いての詳細な研究によれば，実用の範囲では風速のシヤーの影響は無視出来る程小さい．そして (6) 式のよい近似として次のような式が以後の取り扱いに便利である．

$$r=\alpha^*z+r_s \qquad (7)$$

風速のシヤーによってエントレイメント係数がわずかに変ることを含んだ表現であるけれども，以後は実験係数として扱い，記号の簡単化のため $\alpha^*=\alpha$ とあらわすことにする．

(7) 式を用いて (2a) と (3a) 式を解くと無次元エクセス温度と上昇流の高さによる変化をあらわす次の基本解が得られる．

$$\Theta=\left\{(r_s^2\Theta_i+\frac{S}{3\alpha}r_s^3)\xi^{-2}-\frac{S}{3\alpha}\xi\right\} \qquad (8)$$

$$W^2=\{\beta\xi^{-1}-\gamma\xi^2+r_s^4(W_i^3+\gamma r_s^4-\beta r_s^{-1})\xi^{-4}\} \qquad (9)$$

ここに

$$\xi=\alpha z+r_s \quad \beta=\frac{1}{3\alpha^2}(\Theta_i r_s^2+\frac{S}{3\alpha}r_s^3) \quad \gamma=\frac{S}{18\alpha}$$

(9) 式と (4) 式がプルームの平均軌跡を定める方程式系となる．

3. Cross-flow 中のジェットの軌跡と上昇高さ

ジェットの場合，排出流体と周囲大気は同一温度であり $\Theta_i=0$，かつ成層は中立状態とすると $S=0$ である．故に (9) 式は次のようになる．

$$W=r_s^2W_i\xi^{-2} \qquad (10)$$

(10) 式によれば，排気速度が周囲流体との混合により，$w\propto Z^{-2}$ で減少していくことを示している．

* 下向き流れについてもこの方程式は成立するので絶対値を付してある．

(10) と (4) 式よりジェットの軌跡は無次元式で次のようにあらわされる.

$$z=\left\{3\frac{r_s^2}{\alpha^2}W_i\tau+\left(\frac{r_s}{\alpha}\right)^3\right\}^{1/3}-\frac{r_s}{\alpha} \tag{11}$$

かくして，平均流のシヤーがプルームの成長に大きく影響を与えないことから近似的に一様流と仮定して時間を空間座標に変換して (11) 式の無次元式をかきかえると次のようになる.

$$Z=\left(\frac{3}{\alpha^2}R_s^2\frac{V_s}{U}X+\frac{R_s^3}{\alpha^3}\right)^{1/3}-\frac{R_s}{\alpha} \tag{12}$$

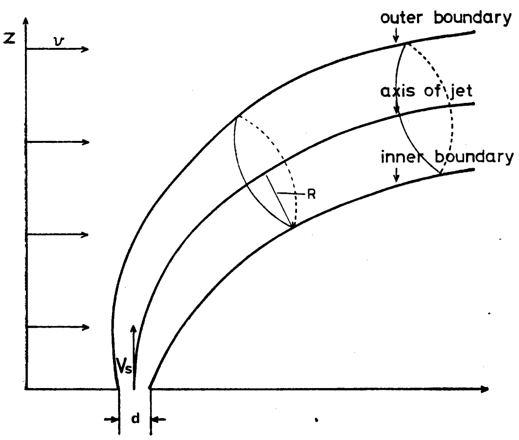
これはよく知られたジェットの軌跡に関する $X^{1/3}$ 乗則である．そしてジェットコアの存在による座標原点の移動，あるいは排出口の大きさの影響が無視できる高さで (12) 式は近似的に次のようにかける

$$Z/d\simeq\left(\frac{3}{4}\ \frac{1}{\alpha^2}\ \frac{V_s}{U}\right)^{1/3}\left(\frac{X}{d}\right)^{1/3} \tag{12$'$}$$

ここで $R_s=\dfrac{d}{2}$，d は排出口の相当口径である.

一方，よく知られるようにジェットレイノルズ数 $R_e=V_sd/\nu$ が充分大きい時，次元解析から風下距離 X によるジェットの中心軸の軌跡は次のように与えられる.

$$Z/d=f\left(\frac{X}{d},\ \frac{V_s}{U}\right) \tag{13}$$



第1図　横風中のジェットの概観

第1図は普通 Cross-flow 中のジェットといわれるパターンを概観的に示したものである.

Cross-flow 中のジェットの軌跡について，これ迄2，3の実験的研究が行なわれている，表Aは3つの実験式をまとめて示したものである.

表Aの3つの式から一般に $Z/d\sim\left(\frac{V_s}{U}\right)^{2/3}\left(\frac{X}{d}\right)^{1/3}$ の形がほぼ満足出来る精度で認められよう．今 (12)′ の理論式と比較すると，エントレイメント係数は次の形を持たなければならない.

$$\alpha=\alpha_e\left(\frac{V_s}{U}\right)^{-1/2} \tag{14}$$

Cross-flow 中での係数について，Priestley (1956) は放出初期におけるモデル的考察から $\alpha\sim U^{1/2}$ の補正を初めて示している．彼のモデル的考察を拡張するとまた排気速度に対する補正を必要とし (14) 式が容易に推測される．かくして理論と実験の比較およびモデル的考察から (14) 式の補正が現状では最も合理的である．それ故以後の取り扱いのすべてに，最後に (14) 式の補正を行った.

さて，$V_s\gg U$ の場合，pure-jet に近づくであろう．pure-jet の場合のエントレイメント係数 $\alpha=0.09$(Rajaratnam, 1976) であるから，この要求を満たし，かつ，Cross-flow 中の jet にみられることの多い Counter vortex pair のために排気速度と周囲の風速比に依存して変るある程度大きいエントレイメントを考える．以上の考察から (14) 式のエントレイメント係数補正を行なうと (12)′ 式は次のようにかきあらわされる.

$$Z/d=\left(\frac{3}{4\alpha_e^2}\right)^{1/3}\left(\frac{V_s}{U}\right)^{1/3}\left(\frac{X}{d}\right)^{1/3} \tag{15}$$

今 Cross-flow 中のジェット軸の傾き角が8°（実験的考察）で近似的に最終上昇高に達するとし，その高さを Z_M とすると (15) 式から次の式がえられる.

$$Z_M/d=2.4\frac{V_s}{U} \tag{16}$$

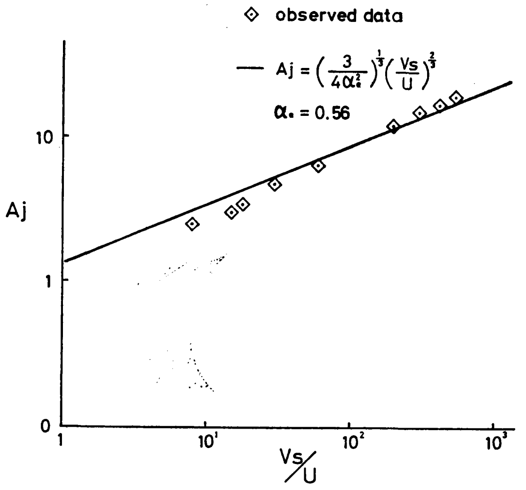
ただし，有効エントレイメント係数 $\alpha_e=0.56$ である．α_e は多くの測定値から求められる値である．これ迄の

A表　ジェットの軌跡の実験式

実験式	備考	提出者
$Z/d=2.05\left(\frac{V_s}{U}\right)^{0.72}\left(\frac{X}{d}\right)^{0.28}$	4×8 ft 風洞 $V_s/U=5\sim35$, $d=0.158$ インチ	Pratten・Banies (1967)
$Z/d=1.59\left(\frac{V_s}{U}\right)^{0.67}\left(\frac{X}{d}\right)^{0.33}$	7×10 ft 風洞 $d=1$ インチ	Margason (1968)
$Z/d=1.44\left(\frac{V_s}{U}\right)^{2/3}\left(\frac{X}{d}\right)^{1/3}$	解析	Briggs (1969)

第1表　エントレイメント係数と V_s/U の関係

Entrainment coefficient $\alpha=\alpha_e\left(\frac{V_s}{U}\right)^{-1/2}$ $\alpha_e=0.56$					
V_s/U	5	10	20	30	40
α	0.25	0.18	0.13	0.10	0.09



第2図　ジェットの係数 A_j の理論と実験の比較

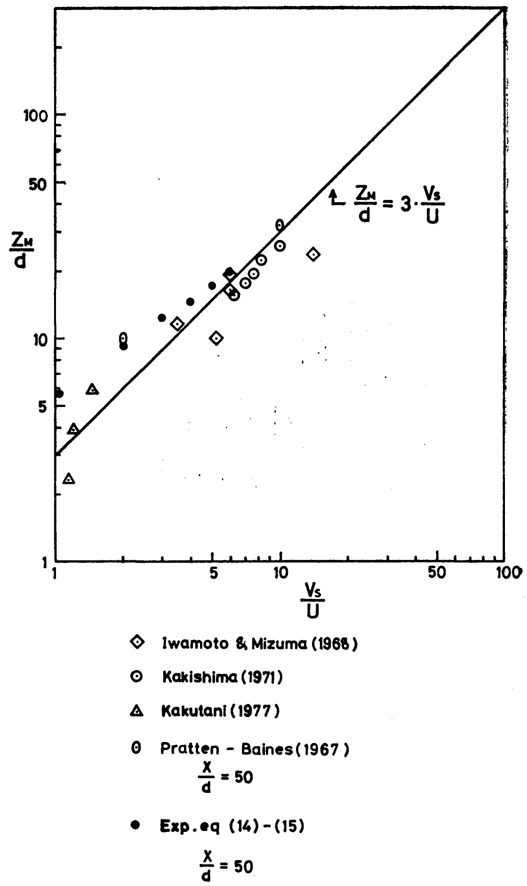
記述から明らかなように (14) 式の説明が本論文における一つの強調点である．すなわちエントレイメント係数は排気速度と周囲流体の風速の比で変化し，周囲流体のシヤーによる変化よりも影響が大きい．

大気中で上昇高の予測が困難となることの多い静穏時は，pure-jet に近い挙動をするであろう．一方 (14) 式の導入は，その場合も含んだものとみなすことが出来，かつこれ迄の議論で明らかなように風速について特に制限はない．したがって，以後の議論は充分低風速時についても適用できる．

第1表はエントレイメント係数の変化を (14) 式によって求めたものである．表より明らかなように排気速度が風速の約40倍で pure-jet に近い挙動をとることがみられる．

さて，中立状態 $S=0$ で，排気流体の温度が周囲大気にくらべて有限の差を持っている場合 $\Theta_i\neq0$ である．再び (9)，(4) および (14) 式を用いるとプルームの軌跡は次のようにあらわされる．

$$Z\doteqdot\left\{\frac{B}{\alpha_e^2}\ \frac{F}{U^3}X^2+\frac{A}{\alpha_e^2}\left(\frac{V_s}{U}\right)^2R_s^2X\right\}^{1/3} \qquad (17)$$



第3図　ジェット有効上昇高の予測と理論の比較

ただし，$A=5.33$，$B=4.74$，$F=gV_s\theta'/\theta_\alpha\cdot R_s^2$ である．

排気流体の運動量が卓越するとき，近似的にジェットとなる．その時 (17) 式は次のようにかける．

$$Z\doteqdot2.57F_m^{1/3}U^{-2/3}X^{1/3} \qquad (18)$$

そこで $F_m=(V_sR_s)^2$ は，排気体の運動量フラックスをあらわす．

(18) 式は (15) 式に対応する式である．しかしながら最初に浮力を考慮したことによりわずかの差がある．今 (18) 式であらわされる上昇過程で前と同様ジェットの傾斜角が 8° でほぼ上昇限界に近いとし，その高さを Z_M とすると (18) 式より容易に次の式が得られる．

$$Z_M=6.4\frac{F_m^{1/2}}{U}=3.2\frac{V_s}{U}d \qquad (19)$$

故に運動量の支配的な Cross-flow 中のプルームの上昇高は（16）式と（19）式の係数のわずかの不確定さを考慮すると次のような式が適切であろう．

$$Z_M/d \approx 3 \cdot \frac{V_s}{U} \tag{20}$$

4. Cross-flow 中のジェットに関する実験との比較

Cross-flow 中のジェットの軌跡は（15）式より一般に次のようにかくことが出来る．

$$Z/d = A_J \left(\frac{X}{d} \right)^{1/3} \tag{21}$$

一方，理論的考察より A_J は次のようにかける．

$$A_J = \left(\frac{3}{4\alpha_e^2} \right)^{1/3} \left(\frac{V_s}{U} \right)^{2/3} \tag{22}$$

V_s/U の広範囲についての実験は極めて少ない．Komotani・Greber（1972）は $V_s/U \approx 4 \sim 570$ の広範囲について 1/4 インチの排出口を持つノズルからのジェットについて精細な室内実験を行なっている．第2図は実験値と（22）式を比較したものである．第2図から，理論と実験の一致はきわめてよく，かつ有効エントレイメント係数 $\alpha_e = 0.56$ が支持される．

さて，ジェットの上昇高は測定が大変困難であるため精度ある測定は少ない．室内実験および野外実験の結果が2，3報告されている（柿島，1971；岩本・水間・佐野，1968；角田，1977）．これらの実験値と（20）式を比較して示したのが第3図である．さらに $V_s/U \leqslant 6$ では実験資料によると約 $X/d \doteqdot 50$ でほぼ近似的に上昇高に達するので表A中の3つの式から得られた $X/d = 50$ における値および Pratten・Banies（1967）の $X/d = 50$ における生の実験値をプロットしてある．理論と実験はほぼ良い一致を示している．

5. 結論

ジェットの最終上昇高式は実用の精度で（20）式が適用できる．

エントレイメント係数 α は排出流体と周囲流体の運動量比の関数として補正することにより充分の精度で実用となる．

本文中の保存方程式系は広範囲の種々の条件下で適用できる解を持っている．

文献

Bringfelt, B., 1969: A Study of Buoyant Chimney Plumes in Neutral and Stable Atmospheres, Atmos. Env., 3, 609-623.

Briggs, G.A.: 1969: Plume Rise AEC Critical Review Series.

岩本智之，水間満郎，佐野治彦，1968：京大原子炉排気塔の有効高さ，日本気象学会秋季大会予稿集．

柿島伸二，1971：排気ガス上昇高さに関する風洞実験，電力中央研究所報告．

Kamotani, Y. and I. Greber, 1972: Experiments on a Turbulent Jet in a Cross-flow, AIAA Jour., 10, 1425-1429.

角田道夫，1977：浮力がないときの Plume rise の研究，原子力安全研究協会，原子力気象調査専門委員会．

Margason, R.J., 1968: The path of a Jet Directed at Large Angles to a Subsonic Free Stream, NASA TND-491

Murthy, C.R., 1970: On the Mean Path of a Buoyant Chimney Plume in Non-Uniform Wind, J. Appl. Met., 9, 603.

Pratten, B.D. and W.D. Banies, 1967: Profiles of the Round Turbulent Jet in a Cross Flow, Proc. A.S.C.E.J. Hydraulic Div., 92, 53-64.

Priestley, C.H.B., 1956: A Working theory of bent-over plume of hot gas, Qurt. Jour. Roy. Met. Soc., 82, 165-176.

Rajaratnam, N., 1976: Turbulent Jet, Elsevier Scientific Publ. Co., 48pp.

Schatzmann, M., 1978: The integral equations for Round Buoyant jets in Stratified Flows, J. Appl. Math. & Phy. (ZAMP), 29, 608-630.

Score, R.S., 1958: Natural Aerodynamics, Pergamon Press, London, 186-217.

Slawson, P.R. and G.T. Csandy, 1967: On the Mean Path of Buoyant bent-over Chimney Plumes, J. Fluid Mech., 28, 311-322.

Smith, M. (ed.), 1968: Recommended Guide for the Prediction of the Dispersion of Air Effluents, Am. Soc. Mech. Eng., New York.

記号表

t; 経過時間
U; ジェット，プルームおよび周囲大気の水平方向の平均風速
R; プルーム相当半径
α; エントレイメント係数
α_e; 有効エントレイメント係数
w; プルームの平均鉛直流
R_s; 排出口の相当半径
g; 重力加速度
θ'; エクセス温度
θ'_i; 排出口におけるエクセス温度
θ_α; 平均気温（絶対温度）空気の膨脹係数
X; 風下距離，排出口が原点
Z; 鉛直方向の座標上方を正排出口が原点
h_s; 排出口の高さ
P; 風速分布の巾指数
U_s; 排出口の高さにおける風速
d; 排出口の相当口径
Z_M; ジェット，またはプルームの上昇限界
X_M; Z_M に達する風下距離
V_s; 排気速度

$\Theta=\theta'/\theta_\alpha$ 無次元エクセス温度
$\Theta_i=\theta'_i/\theta_\alpha$ 排出口における無次元エクセス温度
$z=Z/h_s$ 無次元鉛直座標
$r_s=R_s/h_s$ 無次元排出口相当口径
$S=\dfrac{g}{\theta_\alpha}\dfrac{\partial\theta}{\partial Z}$ 安定度パラメータ
$W_i=(2gh_s)^{-1/2}\cdot h_s$ 無次元排気速度
$\tau=(2g/h_s)^{-1/2}t$ 無次元径過時間
$F=g\theta'/\theta_\alpha R_s^2V_s$ 浮力フラックス
$F_m=V_s^2R_s^2$ ジェットフラックス