

第2回地球流体夏のセミナー「臨界層」の報告

気象学会の大会における研究発表は、時間的制約から十分な討論ができない。そこで、都会から離れた場所で合宿を行ない、特定の研究テーマについて十分な討論をしようという趣旨で、第1回地球流体夏のセミナーが1980年7月に九州の久住高原で行なわれた。発案者は、九州大学応用力学研究所の増田 章氏と山形俊男氏である。今年は、その2回目で、臨界層に関するセミナーが三陸海岸の大槌で行なわれた。コンビナーは名古屋大学水圏科学研究所の田中 浩氏で、気象学、海洋物理学、流体力学の研究者36名が参加した。本稿はその記録であり、1) コンビナーのまとめ、2) 流体力学分野を代表して、京都大学数理解析研究所の後藤金英氏のコメント、3) 話題提供者の報告要旨 を収録する。

1. 第2回地球流体セミナーを終えて

田 中 浩*

去る7月16日から18日の3日間にわたって、第2回地球流体セミナーが岩手県大槌にある東大海洋研の臨海実験センターで開かれた。テーマは「臨界層」。テーマの性格からして、多くの人々の興味を引くとは考えていなかった。しかし36名という予想外に多くの研究者が集まり、活発な議論が行なえたことは大変有意義だったと思う。特に気象、海洋、流体力学というように専門分野の異なる人々がいたことは、いつもは何となく見逃がしていた問題を深く考えさせられる絶好の機会でもあった。非公式な会合で、その上若手が多かったためか、議論はdeath match的な様相を帯びる場面がしばしばで、学会などとはかなり異なった雰囲気であったこともつけ加えておきたい。今回のセミナーには流体力学の研究者に5名程参加していただき、そのためか随分議論も深まったように思われる。

私の直感ではあるが、地球流体力学と純粋流体力学との間には、問題の力点の置き方などにかかなり深い溝があるようだ。地球流体力学の場合は、成層とか回転とかの影響で、内部重力波やロスビー波が存在する。一方粘性流体では、音波は別として、中立波動の存在は許されない。したがって臨界層のイメージにしても、地球流体の研究者は強制問題を、純粋流体力学の研究者は不安定問題を思い浮かべるのではないだろうか。

今回のセミナーでは、地球流体の側から議論が提供された。臨界層は、transience, dissipation (viscosity 及び Rayleigh damping) 及び nonlinearity の存在によって特異点ではなくなる。しかし $t \rightarrow \infty$ の極限、 $\nu \rightarrow 0$ の極限などのないいわゆる極限状態では、事情はこみいてくる。たとえば $t \rightarrow \infty$, $\nu \rightarrow 0$ の場合と、 $\nu \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ の場合と、ただ順序を入れかえただけで最終的な結果は同じになるのかと聞かれても、明確な答えができないのも無理はない。Nonlinearity の導入によってもっと複雑になる。Nonlinearity と dissipation のバランスと nonlinearity と transience のバランスは、どのように異なるのか？ 内部重力波に関する場合、定常で非粘性の臨界層方程式は、渦度と温位が任意の関数で表現できる。そして微小な viscosity の導入によって、その関数形を具体化できる。しかし微小な transience を導入したからといって、関数形を決めることはできない。このように、transience と viscosity の nonlinearity に対する振舞は、かなり異なるようである。

Viscosity (粘性) は、読んで字のごとく、したたかな性質をもっている。 ν がいかに小さくとも、必ずそれなりの作用をどこかでしている。したがって、 ν を完全に0とした場合とは全く異なるのである。微小な viscosity がエネルギーの流れを規定する。臨界層の吸収などという概念はこのためである。地球流体屋は viscosity に弱い。通常 kinematic viscosity など考えたこともなかったの

* Hiroshi Tanaka, 名古屋大学水圏科学研究所。

が、臨界層の議論で無限小粘性の役割などをいわれると、自己矛盾に陥る。果して大気・海洋中の臨界層に kinematic viscosity が必要なのだろうか。また eddy viscosity のような中途半端な概念を臨界層の厳密理論に導入していいのだろうか。

私は臨界層を考えるとときに、衝撃波(shock wave)を連想する。Burgers 方程式における一次元 shock front は、まさに transience と viscosity と nonlinearity のせめぎあう場所である。いかに微小な粘性であろうと、それが存在する限り、shock front ができる。一方完全に非粘性ならば、shock front はできずに多価になる。臨界層理論における Laplace 変換のテクニックも、すでに発散を除く配慮がなされている。もし他にもっとすばらしいテクニックが見つければ、完全に非粘性の臨界層の解析ができるであろう。その場合、臨界層をはさむ接続は多重分岐をもたないだろうか？

臨界層と viscosity の関係については、必ずしも明確な結論は得られなかった。今回特に九州大学の神部 勉さんに、Lighthill による耳の蝸牛管中の臨界層共鳴の話をしていただいた。私たち地球流体屋にとっては、ど

うころんでもこのようなアイデアは思いつかないのに、さすが Lighthill 先生だと感心させられた。

私の最初のねらいは、非線型臨界層は依然として吸収層なのか、あるいは反射層などに転化するのにかに何らかの決着をつけたかった。このねらいは必ずしも達成できなかったのは残念である。私はいまま「実際の気中ではどうなのか？」という疑問がはなれない。Benny and Bergeron や Haberman のいう定常的な非線型臨界層など、現実に存在するのだろうか？線型理論で $t \rightarrow \infty$ を考えることなど実際に意味があるのだろうか？何らかの不安定が臨界層で発生して、上述の議論など無意味になってしまうのではないだろうか？最近 O.M. Phillips から、内部重力波の強制臨界層に K-H instability が発生するという室内実験の16ミリフィルムが送られてきた。現実には、臨界層セミナーとは一味違ったところにありそうである。

最後に、東京大学海洋研究所の木村竜治さんには、事務局としての雑用をいっさい引き受けていただき、心から感謝します。来年もよろしくお願いします。

2. 第2回地球流体セミナーに参加して

後 藤 金 英*

流体力学をやっている人の中にも、地球流体力学に目を向けている人はかなりいると思われます。しかし、そういう人達も、現実には流体力学本来の研究に手一杯で、外向きにはどうしても受身の姿勢になり勝ちです。数理研の週1回の流体力学談話会でも、時々その方面の方にお話願っておりますが、興味深く聞かせて頂いても、結局は聞き流しになってしまうことが多いようです。今回の夏のセミナーは、こういった状況と、この1月の京大物理での木村竜治さんの名講義と、それに臨界層という変わったテーマが、私を含む何人かの流体力学研究者の参加となりました。

田中 浩さんの序文にもありますように、臨界層というのは、流体力学では安定性理論にでてくる内部摩擦層という以上の関心はなくて、案内を頂いた時には、このテーマで何を思ったかと思っただけです。それだけに、他に何もできない大槌臨海研究センターで、このテーマに集中した2日間は正に今夏の臨界層でした。

joint seminar に伴う専門分野の間の溝は確かにありました。私の感想では、数学と物理の場合に比べると、はるかに議論はかみ合ったと思います。しかし、初期値問題の解の一意性(1組の初期値に対して解が一意に求まること)と定常問題の解の一意性が混同されたり、種々の極限評価(田中さんの序文参照)が十分でない点は気になりました。地球流体であるが故に絡む問題の複雑さのせい、解析の進め方に大胆過ぎる点があるのではない、もう少し数学的にきちんとした取り扱いが必要なのではないか、というのが一緒に参加した木田重雄君の感想ですが、これは流体力学さんの共通の意見でもあったと思います。具体的なことは各講演者の報告に述べられるでしょう。

木村さん、田中さんのお骨折りで、全ての点にゆき届いた気持ちのよい会合でした。私共がこれを機会に受身の状態を脱しきれるかどうかはわかりませんが、この会合の第3回はもちろん、この種のセミナーの情報を流体力学関係者にも流して頂けると有難いと思います。

* Kanefusa Goto, 京都大学数理解析研究所。

3. セミナーの要旨

3.1. 非線型臨界層

竹松正樹*

平行流 $U(y)$ の中の振幅 ε の2次元波動の流線関数を

$$\phi(x, y, t) = \int y \{ U(y) - c \} dy + \varepsilon \phi(x, y, t)$$

と表現すると、基礎方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \phi + (U - c) \nabla^2 \phi_x - \phi_x U'' \\ + \varepsilon \frac{\partial (\nabla^2 \phi, \phi)}{\partial (x, y)} = \nu \nabla^4 \phi \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 c は波速で、 ν は粘性係数。

流体力学においては(1)の初期・境界値問題にしばしば遭遇する。実際には、 ε 及び ν が共に小さい場合の $t \rightarrow \infty$ における(定常)解の性質が問題になる。ところが、定常性を仮定し、 $\varepsilon = \nu = 0$ とした非粘性線型方程式(Rayleigh Eq.)は、 $U(y_c) = c$ なる臨界層において対数的特異性を示す。従って、定常問題を考える場合には、いくら ε 及び ν が小さくとも、元方程式(1)にたち帰って臨界層の性質を調べる作業が必要となる。その際、粘性項を考慮するのが古典的手法であった(線型粘性理論)。これに対し、非線型項を重視し、臨界層を非線型内部境界層と見る考え方が、1969年にBenny and Bergeronによって示された。ここでは、主として後者の非線型臨界層の概要を紹介する。(なお、参考までにいえば、海洋大循環理論に於ては、1950年代半ばには既に粘性境界層と非線型境界層の概念が出揃っていた)。

線型粘性論 ($\varepsilon^{1/2} \ll \nu^{1/3} \ll 1$):

y_c 近傍の内部粘性層の厚さは $O(\nu^{1/3})$ であり、この層内では方程式は $Y = (y - y_c)/\nu^{1/3}$ を変数として Hankel 関数を用いて表わされる。その解の $Y \rightarrow \pm \infty$ の挙動から、Rayleigh Eq. の特異解の中に対数表現 $\log(y - y_c)$ の正しい分枝が決定される——即ち、層の上下端で $\log(y - y_c)$ は $i\pi$ だけ jump しなければならない。これは、擾乱速度の位相の jump、従って Reynolds 応力の jump を意味する。

なお、粘性のかわりに時間依存性を使い、非粘性線型初期値問題を解くと、時間の大きい所で粘性定常解と同じ jump condition が出現することが報告されている。

これは、Rayleigh Eq. の特異解の分枝の選択において、時間依存性と粘性が同等の役割を果すことを意味する。

非線型論 ($\nu^{1/3} \ll \varepsilon^{1/2} \ll 1$):

y_c 近傍の主要(1st order)なバランスに非線型性を考慮すると、この内部非線型層の厚さは $O(\varepsilon^{1/2})$ であることがわかる。‘内部変数’として Stretched coordinate $Y = (y - y_c)/\varepsilon^{1/2}$ を使い、基本流も含めた流線関数を $\phi(x, Y)$ とすると、層内の支配方程式は次の形に書かれる

$$\frac{\partial(\omega, \phi)}{\partial(x, Y)} = \lambda \varepsilon \{ \phi_{YYY} + O(\varepsilon) \} \quad (2)$$

ここに、

$$\begin{cases} \omega \equiv \phi_{YY} + \varepsilon \phi_{xx} \text{ (渦度)} \\ \lambda \equiv (\nu^{1/3}/\varepsilon^{1/2})^3 = \nu/\varepsilon^{3/2} \ll 1 \end{cases}$$

$\lambda \rightarrow 0$ とすると、渦度は流線のみの関数であるという良く知られた結果に到達する；即ち、 $\omega = G(\phi)$ 、 G は任意関数。

ところで、流線が閉じている場合、その中で G はどのような形をとるべきかという問題は、古く Batchelor (1956) によって考えられたことがある。そこでは、 $t \rightarrow \infty$ 、 $\lambda(\nu) \rightarrow 0$ の順序の極限を考え、簡単な積分条件から G が const. であることが結論された。

非線型臨界層の問題はこの Batchelor の問題と全く同じであり、その一例題に他ならない。 y_c を中心とする閉じた流線部分(Cats-eyes)とその外側の無限遠に延びる流線部分について、 G の形を具体的に決定すること、これが非線型論の本質である(Cats-eyesの中では $G = \text{const.}$ はすでに知られている)。

この G を決定する作業は、通常境界層の方法を用いて進められる(省略)。

非線型解析の結果は、臨界層を通して擾乱に何らの jump も生じないことを示す。粘性臨界層に見られるような jump は生じない。

定常非線型臨界層は、原理的には、或る初期条件から出発して $t \rightarrow \infty$ で到達し得るものであろうが、初期値問題においてこの定常非線型臨界層を実現しようとする試みは、これまでのところ成功していないようである。勿論、実験・観測の面からの裏づけもない。この非線型解析は、単なる推論の遊戯に過ぎないのであろうか？

* Masaki Takematsu, 九州大学応用力学研究所。

3.2. 順圧ロスビー波の臨界層

新野 宏*

大気中では、中緯度の西風領域で励起されたロスビー波が、鉛直 (z) 方向・南北 (y) 方向にシアを持つ帯状流 $U(y, z)$ の中を伝播する。この時、もし帯状流の流速が波の位相速度 c に等しい面 (臨界面) が存在すれば、波と帯状流はこの面の近傍で強い相互作用をおこす。ここでは、ロスビー波の水平方向への伝播特性、特に $U(y, z) = c$ で与えられる臨界面 $y = y_c(z)$ 近傍での波の振舞に着目する。 $y = y_c$ 付近でのロスビー波の振舞は、 y 方向の構造に関する限り順圧で非発散のロスビー波のそれと本質的に同じなので、ここでは順圧非発散ロスビー波の臨界面近傍での振舞を詳しく調べることにする。

順圧・非発散のロスビー波の運動を支配する渦度方程式として

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + U \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi + \left(\beta - \frac{d^2 U}{dy^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \varepsilon J(\psi, \nabla^2 \psi) = \nu \nabla^4 \psi \quad (1)$$

を考える。方程式は適当に無次元化してあり、 ε は波の無次元振幅、 ν はレイノルズ数の逆数、 β は無次元ベータ、 $U = U(y)$ は基本流、 ψ は流線関数、 $J(,)$ はヤコビアンである。

ある時刻 $t=0$ に、 $y=y_0$ に波数 k 、振幅 ε の波板が生じて位相速度 c で動き出したとすると、 $\varepsilon \ll 1$ かつ $\nu \ll 1$ のとき、波板によって励起されたロスビー波の振舞は

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + U \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi + \left(\beta - \frac{d^2 U}{dy^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

で記述される。 $t' \equiv \frac{k}{\beta} \left[\left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=y_c} \right]^2 t$ を定義するとき、Dickinson (1970) は、励起された波の場合、 $t' > 0(1)$ のとき $|y - y_c| < \delta$ の領域で非定常であり (ここではこの領域を臨界層と呼ぶ)、臨界層の厚さ δ は時間 t' に逆比例して減少することを示した。臨界層の中心付近のシアの強さ ϕ_{yy} は t' に比例して大きくなり、 ϕ_{yyy} は $t'^{1/2}$ 、 ϕ_{yyyy} は $t'^{1/3}$ に比例して大きくなる。従って、(1) を (2) で近似する時に無視した非線形項と粘性項はそれぞれ $t' \sim \varepsilon^{-1/2}$ と $t' \sim \nu^{-1/3}$ の時間で無視できなくなることが予想できる。これから、 $\lambda = (\nu^{1/3} / \varepsilon^{1/2})^3$ を定義するとき、 $\lambda \gg 1$ ならば臨界層は粘性臨界層、 $\lambda \ll 1$

ならば非線形臨界層の性質を持つようになると思われる。粘性臨界層は波の吸収層として働くことが知られているが、定常状態の非線形臨界層は Benney and Bergeron (1969), Davis (1969) によると非吸収層である。そこで、定常な非線形臨界層が初期値問題の解として実現するかどうかは興味のあるところである。

Stewartson (1978), Warn and Warn (1978) は、 $\lambda = 0$ の場合について $t' > 0(\varepsilon^{-1/2})$ での非線形臨界層の発展の様子を理論的に調べた。その結果によると、時間と共に次々と高調波が現われて微細構造が発達し、Benney and Bergeron (1969) 等の予想した定常的な非線形臨界層は実現されない。しかし、Stewartson (1978) は少しでも粘性があれば ($\lambda = +0$)、究極的には高調波が減衰して定常解が実現するであろうと推測している。

Béland (1976, 1978) による数値実験の結果も、上記の理論的な予測を大体裏づけるものとなっている。非粘性の場合には、 $O(\varepsilon^{-1/2})$ の時間で非線形臨界層が発達を始め、臨界層は波の吸収層としての役割を失い始める。しかし、高調波が次々と現われる為、Benney and Bergeron (1969) 等の得た定常解は実現されない。粘性がある場合には、 $\lambda \gtrsim O(10^{-1})$ で定常解が実現するが、 $\lambda \lesssim O(10^{-2})$ では場はなかなか定常にならない。定常解に対して、臨界層におけるレイノルズ応力のとびの依存性を調べてみると、Haberman (1972) の理論とよく一致している。

Tung (1979) は大気中のロスビー波の臨界層に対する λ の大きさを $O(10^{-2})$ と見積った。もし、この λ の値が正しいならば、十分時間がたてば臨界層は非線形臨界層になるかも知れない。Béland (1978) は数値実験の結果から、東西波数 4、平均帯状流 $U \sim 50$ m/s、波に伴う南北成分の風速 ~ 10 m/s (大きめ?) に対して、非線形臨界層が発達するのに要する時間を約 4、5 日と見積った。このような見積りは factor が 2 だけ異なるだけで、結論に大きな違いが出る為、慎重に為されなければならないが、非線形臨界層の存在が必ずしも理論的な概念にとどまるだけではないという可能性を示すものとして興味深い。

文 献

Béland, M., 1976: Numerical study of the non-linear Rossby wave critical level development in a barotropic zonal flow, *J. Atmos. Sci.*, **33**, 2066-2078.

———, 1978: The evolution of a non-linear

* Hiroshi Niino, 気象研究所。

- Rossby wave critical level: Effects of viscosity, *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1802-1815.
- Benney, D. and R.E. Bergeron, 1969: A new class of non-linear waves in parallel flows, *Studies in Appl. Math.*, **48**, 181-204.
- Davis, R.E., 1969: On the high Reynolds number flow over a wavy boundary, *J. Fluid Mech.*, **36**, 337-346.
- Dickinson, R.E., 1970: Development of a Rossby wave critical level, *J. Atmos. Sci.*, **27**, 627-633.
- Haberman, R., 1972: Critical layers in parallel flows, *Studies in Appl. Math.*, **51**, 139-161.
- Stewartson, K., 1978: The evolution of the critical layer of a Rossby wave, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **9**, 185-200.
- Tung, K.K., 1979: A theory of stationary long waves Part III: Quasi-normal modes in a singular wave guides, *Mon. Wea. Rev.*, **107**, 751-774.
- Warn, T. and H. Warn, 1976: On the development of a Rossby wave critical level, *J. Atmos. Sci.*, **33**, 2021-2024.
- , 1978: The evolution of a nonlinear Rossby wave critical level, *Studies in Appl. Math.*, **59**, 37-71.

(追記)

必ずしもロスビー波の臨界層に特有ではないが、話題提供の際に多くの議論をひきおこした問題があった。残念ながら、セミナーの間に出席者の意見の完全な一致をみることはなかったが、臨界層について考える上で非常に基礎的な問題だと思われるので、簡単に紹介しておく。

Dickinson(1970)は、非粘性の線形初期値問題の $t \rightarrow \infty$ の極限として、臨界層でレイノルズ応力のとびのある解(以下、解 I と呼ぶ)を得た。ところで、このとびは粘性のある場合の線形定常問題において $\nu \rightarrow 0$ とした場合の解(解 S と呼ぶ)のレイノルズ応力のとびに等しくなっている。このように「とび」が一致したのは、偶然であろうか、それとも必然だろうか?

これは筆者の意見であるが、解 I においては、実は臨界線 $y=y_c$ のまわりに無限小の厚さ ($O(1/t)$) の非定常な領域(臨界層)が存在し、この領域の中では、ある固定した点 $y=y_i$ で観察すると波の振幅は常に増大していると思われる。波はこの点を通り過ぎて臨界線に近づこうとするが、近づくにつれて群速度が小さくなって、いつまでたっても到達することができない。波の先

端で、平均流の加速があることはよく知られていた事実であるが、この場合の臨界層はいわば常に波の先端になっている状態である。敢えて呼べば、非定常臨界層とも言うべきであって、この層の中では平均流の加速が生ずる。臨界層の外側の波にとってみれば、臨界層は波を飲み込むブラックホールのようなもので、1度吸い込まれたが最後、2度と出てこないかのように感じるであろう。

これに対して、解 S においては、臨界線 $y=y_c$ のまわりにやはり無限小の厚さ ($O(\nu^{1/3})$) の粘性臨界層が存在する。臨界層の中では、ある固定した点 $y=y_i$ で観察すると、波の振幅は時間によらない。これは臨界層に入ってきた波が粘性の影響で減衰しながら、臨界線へと向かう為で、減衰した波の持つ運動量は平均流の加速として現われる。前述のように、初期値問題で考えた波はいつまでたっても臨界線に到達できないので、粘性があると波は臨界線に達する前に減衰してしまう。いずれにしても、外の波にとっては粘性臨界層もブラックホールであることには変りない。

結局、臨界層の外側で考える限り、レイノルズ応力は層の波源側で一定値(波源での造波抵抗で決まる値)、層の向う側で0となり、どちらの臨界層に対してもレイノルズ応力のとびは等しくなる。ただ、2つの臨界層の構造は上記のように全く異っている。

数学的には、臨界層の外側の非粘性定常解にとっては、臨界層の役割は解の持つ対数項 $\ln(y-y_c)$ の $y \geq y_c$ における評価の仕方を決めるだけにすぎない。粘性臨界層を考えると $y > y_c$ に対して $\ln(y-y_c) = \ln|y-y_c|$ 、 $y < y_c$ に対して $\ln(y-y_c) = \ln|y-y_c| - \pi i$ ととれば良いことがわかる。これが中立な波を増幅する波における増幅率0の極限と考えたときの $\ln(y-y_c)$ の評価と一致することは不安定論でよく知られているとおりである。粘性の効果を大まかに Rayleigh damping のように表現する時、粘性の存在と時間的に振幅の大きくなることとは数学的には同等である。物理的には臨界層の中での波のエネルギーの伝播方向を決めることになり、従って外側の定常解も波のエネルギーの伝播方向を知ることができる。数学的には $\ln(y-y_c)$ の評価の仕方が決まることになり、結果は上述のように粘性の効果と時間変化の効果が細部にこだわらなければ同等なので、どちらの臨界層を考えても等しくなる。

結局、非定常臨界層と粘性臨界層とが全く構造の違ったものであることを考えると、「とび」が一致したのは

偶然のようでもある。しかし、時間変化と粘性が数学的に同等の効果を持っていることに気づけば、必然のようでもあるということになってしまう。

3.3. full wave treatment における臨界緯度

三 村 和 男*

大気波動の水平伝搬を統一的に論じる場合、ロスビー波、重力波を同時に含んだ支配微分方程式 (full wave equation) を立てる必要がある。そして、準地衡風渦度方程式より得られる結果や、回転のない重力波の結果 (三村, 1980年春季気象学会) は、修正あるいは厳密化、一般化されなければならない。

Ahmed and Eltayeb (1980) は、圧力(p)を変数とした full wave equation をもとにして、ロスビー波型、重力波型、ロスビー波と重力波の境界型の3種の臨界緯度の特性を統一的に論じた。そして、局所的群速度を用いて ray tracing を論じ、また finite shear layer model で透過反射特性を調べた。

しかし、一般にシア、 β 効果等、場の不均一性を生じ含んで full wave equation を立てる時、どの変数について式を立てるかによって、支配線型常微分方程式は異なったものとなる。特に、ロスビー波型の臨界緯度付近やロスビー波と重力波の境界的な波において、その差は顕著である。従って、物理的解釈は上記2種 (以上) の支配微分方程式の間で矛盾のないものでなければならない。また、WKB 近似によって局所的分散関係式、局所的群速度を定義すると、当然、選んだ変数によって、それらは異なったものとなり、その差異が著しい場合、物理的に意味のある群速度とは見なせなくなる。

以上、2つの理由から、彼らの臨界緯度特性、ray tracing、透過反射特性は再検討される必要がある。

そこで、我々の方法は、full wave 支配線型微分方程式として、変数を南北風 (v) にした立場と圧力 (p) にした立場の2通りを得、これら2通りの立場を比較しながら、上記群速度の概念を借りずに、上記3つの型の臨界緯度の特性を矛盾がない事を確かめながら、統一的に調べることである。

まず、

$$v = G(y)\phi(y)\exp(i(\omega t - kx - mz)) \quad (1)$$

$$p = H(y)\psi(y)\exp(i(\omega t - kx - mz)) \quad (2)$$

と変数変換して、 ϕ と ψ についての2つの2階線型常微分方程式を得、各特異点近傍での漸近形を求め、微小

粘性を仮定して、特異点をはさんで解の接続を行ない、Wave-invariant (Eltayeb, 1977) $\text{Im}(\phi^*\phi')$, $\text{Im}(\psi^*\psi')$ の変化を調べる (* は複素共役, ' は y 微分)。一般にこれら Wave-Invariant の変化の仕方は、2つの立場では異なったものとなる。次に、2変数 ϕ と ψ の未定定数間の変換式を考慮して、波動に伴う物理的な量 Wave momentum flux, Wave energy flux の変化を計算する。

その結果は以下のとおりである。

(i) ロスビー波型の臨界緯度

ドップラー周波数 ($\hat{\omega}$) が0になるところで対数型特異性を示し、Wave-invariant の変化は各々2つの立場で、

$$\Delta A_v = \pi \frac{\beta - U''(y_c)}{U'(y_c)} |A|^2 \quad (3)$$

$$\Delta A_p = \pi \frac{[\beta - U''(y_c)]f(y_c)}{U'(y_c)[f(y_c) - U'(y_c)]} |B|^2 \quad (4)$$

(但し $kU'(y_c) > 0$, A, B は各々未定定数) と表わされる。Ahmed and Eltayeb (1980) は (4) 式を得、 $f - U'$ の符号によってもこの臨界緯度の特性が変化するとしている。しかし、(3) 式と (4) 式の不一致は、未定定数 A と B が異なる事、さらに、 $\Delta A_v, \Delta A_p$ は数学的には便利な量であるが、波動に伴う物理的な量ではない事による見かけの不一致である。例えば、Wave momentum flux の変化におおして見ると、

$$\begin{aligned} \overline{\Delta uv}_v &= \overline{\Delta uv}_p = \frac{k(\beta - U'')}{2U'} |A|^2 \\ &= \frac{k(\beta - U'')}{2U'} \left| \frac{f}{f - U'} \right| |B|^2 \end{aligned}$$

となり、2つの立場は全く矛盾がなく、そして、Absorber, Emitter としての特性は、Ahmed and Eltayeb に反して $(\beta - U'')/U'$ のみの符号によって変化する。

(ii) 重力波型の臨界緯度

ドップラー周波数 ($\hat{\omega}$) の大きさが、プラントーパイサラ周波数に一致するところで、Bretherton 型の特異性を示し、この近傍では、南北風 (v)、圧力 (p) ともに線型独立な解として、局所的波数が無限大となるつまった波と局所的波数が有限である波が存在し、つまった波は $\exp(-4|\mu|\pi)$ の factor で減衰するが、波数有限の波は全く減衰を受けない。すなわち、いわゆる Valve effect が存在する。

(iii) ロスビー波と重力波の境界にある臨界緯度

v をもとにした立場では、

* Kazuo Mitsumura, 京都大学理学部。

$R=0$ (ケルビン波分散関係式の一般化)

ϕ をもとにした立場では,

$Q=0$ (慣性振動の分散関係式の一般化)

のところで各々、特異点を有し、Wave-invariant は符号が反転する。しかし、物理的量 Wave momentum flux, Wave energy flux になおすと、完全に連続となる。この意味で見かけの特異点である。Ahmed and Eltayeb (1980) は $Q=0$ を含む finite shear layer で Over-reflection が起こるとしているが、それは、彼らが Wave-invariant 自体が連続であるとしている事と、 ϕ の振巾の2乗の変化が、すなわち Wave energy flux の変化と考えている事による誤った結論ではないかと思われる。

文 献

Ahmed, B.M. and I.A. Eltayeb, 1980: Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 298, p. 45.

3.4. ロスピーソリトンと臨界層

野 上 豊*

近年、物理学におけるソリトン理論の発展に刺激されて、大気・海洋中での Solitary Wave (孤立波) に関する研究が、精力的に進められている。Solitary Wave の特徴は、名前の通り、孤立した安定な存在で、Solitary Wave 同士の非線形相互作用が生じても「個性」が保存されることである。これらの特徴に注目して、木星大気の大赤斑 (Great Red Spot) や Gulf Stream Ring, Mode 渦, Blocking などの現象を Solitary Wave で説明しようという試みが、既にいくつか成されており、soliton-soliton interaction を示唆する、海洋の渦の観測がある。

大気・海洋中の Solitary Wave は、回転の効果が効く大規模なスケールの Planetary Solitary Wave (又は Rossby Solitary Wave) と、小さなスケールの Gravity Solitary Wave に大別することができる。Planetary Solitary Wave (以下 PSW と略す) は、地衡風が関与する非線形効果に依って生じる PSW (準地衡風渦位方程式を基にしている) と、非地衡風が関与する非線形効果に依る PSW (浅水波方程式を使っている) とに更に分けられる。地衡風非線形効果が生じる為には、基本流がシアを持つか、水深が直線形ではない湾曲した変化をしている必要がある。この基本流にシアがある場合

に、臨界層の問題が生じて来る。基本方程式とした準地衡風渦位方程式は、Low- β plasma 中の運動を支配する Hasegawa-Mima 方程式と同形であることが示されており、PSW と臨界層の問題の数値物理学的側面は、プラズマ物理学におけるものと同じである。一方、非地衡風非線形効果に依る PSW は、基本流のシアを必要とはしないので、臨界層の問題を回避することができる。この様な PSW に関して、松浦と山形 (九州大学応用力学研究所) の最近の研究は興味深い。彼らは、変形半径よりもスケールの大きな現象に注目し、「2次元に拡張された KdV 方程式」を得て、数値実験から2次元の安定な Solitary Eddy の存在可能性を示した。この方程式に関して、更に詳細な研究が待たれる。

PSW と臨界層の問題に話を戻そう。地衡風非線形効果による PSW の理論は、Long (1964) 以後、いくつかの論文が発表されているが、大半は臨界点 ($y=y_c$ で $U=c$) がない場合に限っている。Redekopp (1977) は、PSW と臨界層の問題を初めて陽に取り上げ、Maxworthy and Redekopp (1976) の木星大赤斑の孤立波説の論拠 (大赤斑は臨界点を持つ渦なので) とした。PSW を記述する方程式を得るには、準地衡風渦位方程式に、非線形性と分散性がうまくバランスする様な時空変換 (いわゆる、Gardner-Morikawa 変換) [$\xi = \varepsilon^{1/2}(x - ct)$, $\tau = \varepsilon^{3/2}t$] を施し、流線関数 ϕ を ε で展開して [$\phi = A(\xi, \tau)\phi(y)Z(z) + \varepsilon\phi^{(2)} + \dots$], ε のオーダーごとに整理して方程式を作っていけばよい。臨界点がないければ、2次オーダーの方程式から、KdV 方程式が得られる [$A_\tau + R_0AA_\xi + S_0A_{\xi\xi\xi} = 0$]. 臨界点がある場合には、 ε の1次オーダーの y 方向のモード関数 ϕ について、 $y=y_c$ が特異点となる特異中立モードと、 $y=y_c$ で $\frac{d^2U}{dy^2} = \beta$ として正則点にする正則中立モードとに更に分けられる。この場合に2次オーダーの方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\phi \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial y} - \frac{d\phi}{dy} \phi^{(2)} \right]_{y_c} + \\ = I_0(A_\tau + R_0AA_\xi + S_0A_{\xi\xi\xi})$$

となり、臨界点における ϕ と2次オーダーの流線関数 $\phi^{(2)}$ の「ジャンプ」が問題となる。この $y=y_c$ 付近に非線形臨界層が形成されれば、「ジャンプ」はなくなり、KdV 方程式が得られる。

しかし、今回のセミナーの中心課題であった「非線形臨界層の形成」に関しては、確たる論拠がまだない様である。それならば、普通の粘性臨界層が形成された時には、如何なる状態が実現されるのか、PSW は不可能な

* Yutaka Nogami, 京都大学理学部.

のかという新たな問題がここで生じて来る。上の式は、KdV 方程式に粘性に起因する項が加わった式であるとも解釈できるので、これに何らかの強制項を加えて、左辺を打ち消すことができれば、PSW は可能と思う。「PSW と臨界層」は、今後研究すべき多くの問題を持っている。

3.5. 波動と流れの相互作用

神 部 勉*

音に関連して2つの話題をとり挙げてみた。

A) 渦による音波の発生と吸収

非定常の渦度分布 $\omega(x, t)$ があると、一般に周辺に音波が放射される。いま渦分布が局所的として、流れの代表的マッハ数が1に比して十分小さいときには、音圧の遠距離場は方向依存性のある4重極項と等方的な単極項との和として表わされる。4重極項は ω の x に関する2次モーメントの全空間積分を $Q_{ij}(t)$ とすると Q_{ij} に比例し、単極項は全運動エネルギーを $K(t)$ とすると K に比例する。このような音は渦音 (vortex sound) と呼ばれる。2次元での渦音の例としては、(a) 2つの同じ強さ、同じ向きの渦が互いの重心のまわりを回転する回転渦対によって放射される音、(b) 断面が楕円の柱の中に様な渦度分布があるとき、この楕円形はある角速度で回転するが、その運動によって放射される音、等が解析されている。軸対称の場合としては、(a) 2渦輪の正面衝突による放射音、(b) 2渦輪の相互くぐりぬけ運動による放射音が知られている。

以上は渦の運動による音の発生であるが、逆に音波によって渦が発生し、音波のエネルギーが流れのエネルギーに転移する場合もある。いまノズルから吹き出すジェットに重ね合わさって音波がのっているとすると、このような流れが出口から外界に出ると、ジェットの他に音波の放射が観測されるが、音の振動数が小さいときには、放射音の全エネルギー流量は、ノズル内での音波のエネルギー流量よりも少なくなる。これは、ノズル出口で音波の脈動に応じて渦が発生し、音のエネルギーが流れのエネルギーに一部転化したものとして説明される。すなわち、ジェットが媒介となって、ノズル出口で音波の吸収が起る。これは、粘性・熱伝導などの散逸性の吸収とは異なって、エネルギー保存性の吸収である。ただし、出口で渦が発生するとき、わずかながら粘性の存在が

必要である。

B) 蝸牛殻による音の周波数分析と臨界層吸収

内耳にある蝸牛殻 (cochlea) は、鼓膜で受信した音の振動を耳小骨を介して受け取り、その信号の周波数分析をするカタツムリ状の器官である。蝸牛の渦巻き断面には2つの大きな管 (前庭階・鼓室階) と小さな1つの蝸牛管があるが、断面を上下に分けて弾性的な (基底) 膜が存在する。この膜の上下振動の共鳴振動数は、蝸牛の渦巻きに沿っての位置 x の関数として $\omega_r(x)$ と表わせ、これは鼓膜から振動を受ける根元 ($x=0$) から渦巻きの先端 ($x=L$) までなめらかに減少し、 $\omega_r(L)/\omega_r(0) \approx 10^{-2}$ 程度となる。従って、ある特別の振動数 ω の振動を受けると、 $\omega = \omega_r(x)$ に相当する場所 x_r で共鳴が起り、振動が吸収される。この現象は、成層流その他で知られている critical layer absorption と同等の現象と考えられる。その特徴は、(1) 各点で ω_r より高い高周波成分がカットされる、(2) 共鳴点に近づくとき波長および群速度が急激に0に近づく、(3) 波束が共鳴点 x_r に到達するのに無限の時間がかかり、 x_r の近くで波動エネルギーの堆積が起ると共に、わずかな減衰効果でエネルギーが散逸される。従って、蝸牛の働きを現象的にみると、反射のない周波数分析器とみることができる。上に挙げた特徴は、低周波 cut-off および共鳴点で反射を起す導波管の共鳴と対立する。100 Hz 程度かそれ以下の振動については、上と異なる分析がなされている。以上B項の詳細は、James Lighthill [1981, J. Fluid Mech, 106, 149-213] を参照いただきたい。ヒトの聴覚器官とマイクロフォンとの違いは、前者が周波数分析を行なう点にあらう。これは、膜の機械的振動を神経の電気的信号に変換する際に、波形のゆがみをできるだけ少なくするためのものと考えられないだろうか。

3.6. 水平シア流に発達する浅水波

里 村 雄 彦**

渦度が重要な要素である順圧波と異なり、発散が本質的な役割を果たす重力波に対して、水平シア流は変曲点がなくても不安定となることを示した。

線型不安定の必要条件と Howard の半円定理を浅水方程式系に対して導いたのち、次の3種の平行 Couette 流の線型安定性を吟味した。即ち、(i) 両側に壁のある場合 (順圧流体では安定である)、(ii) 片側に無限大まで続く静止流体が接続している場合、(iii) 片側に静止流体、もう一方には一様流が接続している場合であ

* Tsutomu Kanbe, 九州大学工学部。

** Takehiko Satomura, 東京大学理学部。

る。

浅水方程式の解を確定特異点のまわりの巾級数で表現することにより、固有値と固有関数を精度良く求めた。結果は以下の通り：

(a) (i) の流れは $Fr \geq 2$ で不安定となり、重力波を増幅させる。この不安定は、シアのために2つの重力波の位相速度が等しくなり、「混合」した結果生じたものと解釈できた。

(b) (ii) の流れは $Fr \geq 1$ で不安定となり、壁付近に束縛されたモードと、遠方へ重力波として伝播するモードの2種類の重力波を増幅させる。

(c) (iii) の流れは常に不安定である。 Fr が小さいときには順圧不安定波が、 Fr が大きいときには遠方へ伝播する重力波が、中間の Fr では両方の波が増幅する。

(d) 増幅する重力波の構造は順圧波と異なり、基本流の速度の大きい所ほど下流に傾いている。

(e) 変曲点のない水平流では、摂動の渦位は零であり、基本流の渦位も変化しない。

変曲点のない浅水では、 $U=c$ の所は見かけの特異点であり、解は正則である。故に、少なくともこの不安定は、臨界層における過剰反射によっては説明できないであろう。

3.7. 変形半径より大きな孤立渦の時間発展

松 浦 知 徳*

最近、海洋学者や気象学者の間で、惑星スケールの運動の非線形の力学が脚光を浴びている。特に、中規模渦や黒潮リングの存在は、一般の非線形力学系の渦の発展をモデル化し理解しようとする者にも、新たな展望を示したといえる。この分野の研究は、Bretherton and Karwe (1975), Firing and Beardsley (1976), McWilliams and Flierl (1979) と Mied and Lindemann (1979) 等によってなされてきた。上記の著者等は、準地衡流渦位方程式又はプリミティブ方程式の数値的解法を採用している。

ここでは、スケールがロスビーの変形半径より充分に大きな渦に焦点を絞って調べてみた。したがって、我々は準地衡流渦位方程式を盲目的に採用することはできない。そこで、対象とする現象が中緯度で速度が数 $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ の運動で、水平スケールが変形半径より大きなものの発展方程式を導くと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial T} + \gamma J(\nabla^2 \zeta^{(0)}, \zeta^{(0)}) - \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \zeta^{(0)}) \\ - \varepsilon \gamma \zeta^{(0)} \frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial x} + 2y \frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

となる。ここで $\zeta^{(0)}$ は水位（流線）を表わし、 ε , γ は $O(1)$ の定数である。この (1) 式は2次元の発展方程式であり、 y 依存性をなくすと2項、5項が消え、 $K-dV$ 方程式となる。第3項が分散項、第4項が非地衡流効果に起因する非線形項で、いわゆる突っ立ちの効果をもつ。

初期値としてつぎの3つに分けて、それぞれの場合の渦の時間発展を数値解析により追った。a) 静かな海洋中に海面の盛り上がりガウス関数をした渦を入れる。b) 東から西へ向かう一様な地衡流の存在する海洋中に、海面の盛り上がりガウス関数をした渦を入れる。c) 西から東へ向かう一様な地衡流の存在する海洋中に、海面の盛り上がりガウス関数をした渦を入れる。結果として、時計回りの渦と反時計回りの渦の発展に大きな違いのあることが明らかになった。非地衡流効果から予想される様に、時計回りの渦の方が、反時計回りの渦に比べて長時間個性を保つことがわかる。海面の凹である反時計回りの渦に対しては、(1) 式の左辺第3項（分散項）と第4項（非線形項）は同じ符号をもち、互いに打ち消し合わない。一方、海面が凸である時計回りの渦に対しては、(1) 式の左辺第3項と第4項はほぼ打ち消し合い、それらは長時間孤立渦の特徴を保つ。このバランスは1次元のよく知られた重力波の孤立波のものをもちこしているわけである。反時計回りの渦が、時計回りの渦に比べてはるかにすみやかに惑星渦として分散し、個性を失っていく理由はここにある。初期値としてb)の場合、すくなくとも計算時間内ではほぼ2次元の孤立渦としてふるまっている。これはおもに(1)式の左辺第2項（移流項）と第3項（分散項）がほぼ打ち消し合うためである。この場合の渦と渦の衝突の実験によれば、この種の2次元渦はきわめて頑丈である。つぎにc)の初期値の場合、(2)式の左辺の移流項と分散項は打ち消し合わない。したがって、波動的ふるまいが顕著になる。波動的ふるまいは流れのパターンの下半面に顕著である。これは(1)式の β 効果に関連した第5項が、線形のシア流の役割をしていることによる。長波の位相速度で動いている座標系に関して、位相が東向きとなる惑星波は、臨界層に会うため東向流中へ深く浸入していけないが、西向流へは自由に伝播していけるためではないかと

* Tomonori Matsuura, 九州大学応用力学研究所。

考えている。

3.8. 回転系の臨界高度（線形論）

山 中 大 学*

3.8.1. 序

安定成層回転流体に境界で強制された中立波動の鉛直伝播を考察し、その場合の臨界高度 $\hat{\omega} = \pm f$ ($\hat{\omega}$: Doppler 周波数, f : Coriolis 因数) の意義を述べる。

3.8.2. 波の鉛直伝播構造

非粘性・Boussinesq 近似・等温・重力安定成層・ f 平面・線形の擾乱方程式系を、基本場として地衡風平衡・静力学平衡・温度風平衡・線形鉛直シアをもつ東西流を仮定して解く。東西 (x)・南北 (y) 方向および時間 (t) 依存部は正弦波として分離でき、鉛直流 w の式は、
 $w = \tilde{w}(z) \cdot e^{ikx + ily - i\omega t}$,

$$\tilde{w} = \tilde{w}(\hat{\omega}) \cdot \exp \left[- \int \frac{\hat{\omega} f_0 \left(f_0 + i \frac{l}{k} \hat{\omega} \right)}{\hat{\omega}^2 (\hat{\omega}^2 - f_0^2)} d\hat{\omega} \right] \quad (1)$$

$$\frac{d^2 \tilde{w}}{d\hat{\omega}^2} + J' \frac{(\hat{\omega}^2 - \gamma^2)(\hat{\omega}^2 + \delta^2)}{\hat{\omega}^2 (\hat{\omega}^2 - f_0^2)^2} \tilde{w} = 0 \quad (2)$$

と書ける。上式で鉛直座標 (z) は波の基本流に対する Doppler 周波数で置き換えられており、 k と l は x および y 方向の波数、 J' は 3 次元擾乱に対する Richardson 数 $J' = J \left(1 + \frac{l}{k} \right)$ で、 k, l, J, f_0 は定数、また γ, δ も k, l, J, f_0 による定数である。(2) 式において、 $\hat{\omega} = 0$ は見かけの特異点で、残る $\hat{\omega} = \pm f_0$ がこの場合の臨界高度 (CL) となる。一方 $\hat{\omega} = \pm \gamma$ は転移高度 (TL) と称し、 J が大なるに従い CL に近づき、 l/k が大なるに従い $\hat{\omega} = 0$ に近づく、(1), (2) 式の近似解は WKB 法で得られ、局所分散関係:

$$\left. \begin{aligned} \left(m - \frac{lf_0 U_z}{\hat{\omega}^2 - f_0^2} \right)^2 &= \frac{N^2(k^2 + l^2)}{\hat{\omega}^2 - f_0^2} \\ &+ \frac{f_0^2 U_z^2 (k^2 + l^2)}{(\hat{\omega}^2 - f_0^2)^2} + \frac{2k^2 f_0^2 U_z^2}{\hat{\omega}^2 (\hat{\omega}^2 - f_0^2)} \\ &\dots\dots\dots |\hat{\omega}| > f_0, f_0 > |\hat{\omega}| > \gamma \\ \left(m - \frac{lf_0 U_z}{\hat{\omega}^2 - f_0^2} \right)^2 &= 0 \dots\dots\dots |\hat{\omega}| < \gamma \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

を与える (m : 局所鉛直波数) が、この解法は TL 近傍で精度を失い、CL 近傍では解の独立性を逸する。前者については円筒関数による接続、後者については Fro-

benius 法による解の導出が可能で、結果的に CL を正則および非正則とする独立解各 1 個を得る。基本シア $U_z > 0$ の場合、下側の CL $\hat{\omega} = f_0$ では正則解は群速度の意味で上伝成分であって完全透過し、非正則解は下伝成分で (無限小の damping の仮定下) に

$$\alpha \equiv \exp \left[-2 \frac{l}{k} \pi \right] \quad (4)$$

をファクターとする減衰を受ける。 $\hat{\omega} = -f_0$ では上伝が非正則、下伝が正則となって同様のことが起こる。区間 $\gamma > \hat{\omega} > 0$ および $0 > \hat{\omega} > -\gamma$ ではそれぞれ下伝成分および上伝成分のみが存在可能で、2 個の TL $\hat{\omega} = \gamma$ および $-\gamma$ はそれぞれ上伝成分および下伝成分の反射高度となる。

3.8.3. 運動量鉛直フラックスと臨界高度

この場合の運動量鉛直フラックスの水平一波長の平均をつくると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{M}_{13}}{\bar{M}_{23}} \right) &\equiv \left(\frac{(u - f_0 \eta + U_z \zeta) w}{(v + f_0 \xi') w} \right) \\ &= \pm \left(\frac{1}{l} \right) \frac{U_z}{4 \left(1 + \frac{l^2}{k^2} \right)} I_m [\tilde{w}^* \tilde{w}] = \text{一定} \quad (5) \end{aligned}$$

となる (但し $D\xi'/Dt \equiv u$, $D\eta/Dt \equiv v$, $D\zeta/Dt \equiv w$ はそれぞれ速度の x, y, z 成分の擾乱、複号は CL の外側で正をとる)。これは Jones (1967) の得たものと一致する。さらに各区間の接続条件から、

$$\bar{M}_{13} = \begin{cases} -\frac{U_z(1-\alpha)}{4 \left(1 + \frac{l^2}{k^2} \right)} |C_{-(up)}|^2 \leq 0 \\ \dots\dots\dots \hat{\omega} < -f_0 \\ 0 \dots\dots\dots -f_0 < \hat{\omega} < f_0 \\ \frac{U_z(1+\alpha)}{4 \left(1 + \frac{l^2}{k^2} \right)} |C_{+(bt)}|^2 \geq 0 \\ \dots\dots\dots \hat{\omega} > f_0 \end{cases} \quad (6)$$

(但し $C_{-(up)}$, $C_{+(bt)}$ はそれぞれ上端の下伝成分、下端の上伝成分の振巾による)、また

$$\bar{M}_{23} = \frac{l}{k} \bar{M}_{13} \quad (7)$$

が得られる。

3.8.4. 臨界高度による波の吸収の解釈

波について 2 次の運動方程式をつくると、 $\frac{d}{dz} M_{13}$, $\frac{d}{dz} M_{23}$ はそれぞれ x 成分, y 成分の式の外力項とな

* Daigaku Yamanaka, 名古屋大学水圏科学研究所。

り, 一方 Coriolis 項 $-fV^{(2)}$, $+fU^{(2)}$ はそれぞれ x , y 成分に入る。もし定常状態が出現し, その際無限遠での気圧擾乱が有限である仮定が許されるならば, その時の2次の速度場 $U_{\infty}^{(2)}$, $V_{\infty}^{(2)}$ はそれぞれ $-\frac{d}{dz} \bar{M}_{23}$,

$\frac{d}{dz} \bar{M}_{12}$ で与えられ, (7) より,

$$\frac{U_{\infty}^{(2)}}{V_{\infty}^{(2)}} = -\frac{l}{k} \quad (8)$$

となる ($d\hat{\omega} = -kU_z dz$ より $U_{\infty}^{(2)} > 0$, $V_{\infty}^{(2)} < 0$)。この仮定が成り立つ式と元の方程式とから

$$\frac{\partial^2}{\partial f^2} (\bar{V}^{(2)} - V_{\infty}^{(2)}) + f_0^2 (\bar{V}^{(2)} - V_{\infty}^{(2)}) = 0 \quad (9)$$

を得るが, (9) は無限小の damping を仮定すると, $\bar{V}^{(2)} \rightarrow V_{\infty}$ を与える。以上は1つの仮説であるが, (4) の吸収率および CL における無限小 damping の必要性の存在と矛盾しない結果を与える。

3.8.5. 結論

f_0 一定の回転成層流体では, CL において, TL での反射波と同じ向きに伝わる成分の吸収が起こる。吸収率は波の東西波長が南北波長より長くなるに従って大きく, すなわち基本東西風加速への貢献も大と考えられる。

3.9. 赤道波の臨界層

宮原三郎*

熱帯成層圏で観測される赤道波 (mixed Rossby-gravity wave と Kelvin wave) の弱い鉛直シア流中での伝播の性質について, 数値的及び解析的な研究について紹介した。

Lindzen (1970) にしたがって, 弱い鉛直シア流中の赤道波を記述する方程式が, $\hat{\omega}$ (ドップラーシフトした周波数) が零あるいは $\pm f$ となる所で singular である事を示した。 $\hat{\omega}=0$ はいわゆるクリティカルレベルであり, $\hat{\omega}=\pm f$ は一様回転の場合の慣性重力波のクリティカルレベル (Jones, 1967) に対応する。他方, 非一様回転の場合においては, $\hat{\omega}=\pm f$ は, 平均流がない場合やあるいは y 方向のシアしか存在しない場合には,

見かけの特異点である事が知られている。

Lindzen (1970) の数値計算によると, 赤道波は $\hat{\omega}=0$ 付近では吸収されるが, $\hat{\omega}=\pm f$ 付近では吸収されず, 解は regular である。

まず, $\hat{\omega}=0$ 付近での波の性質について, シアを微小パラメータとして展開する摂動法 (Lindzen, 1971, 1972; Andrews and McIntyre, 1976) を紹介した。この手法によると, 波が定常な場合, 散逸がなければ y 方向に積分した wave action flux (momentum flux) は, クリティカルレベルに遭遇するまでは, 保存される事が示される。また散逸がある場合には, クリティカルレベル付近で急激な吸収が起こる事も示される。この手法によるクリティカルレベルの向う側への解の接続の可能性について, 若干の討論が行われた。

また, $\hat{\omega}=\pm f$ の付近での赤道波の性質について, 特性曲線を用いて調べる方法について紹介した。一様回転の場合, $\hat{\omega}=\pm f$ は特性曲線群の漸近線となり, 解はそこで singular である。また β 平面では $\hat{\omega}=\pm f$ 面は傾く為, この場合には特性曲線群の漸近線とはならず, 解は regular である。しかしながら, f の変化が小さい時には面の傾きが小さく, ある程度 (有限) の特性曲線の集中が起こる。この場合, 解は数学的には regular であるが, 空間的変動が激しく, 粘性等が存在する実在の流体では, その影響が大きくなり, 物理的には波の吸収が起こる。これらの結果に対して, 弱い鉛直シアに基づく項の省略により, 得られた方程式の性質 (特異点の位置や特性曲線の性質) が変化する可能性があるのではないかとの疑問がだされた。

文 献

- Andrews, D.G. and M.E. McIntyre, 1976: J. Atmos. Sci., 33, 2049-2053.
 Jones, W.L., 1967: J. Fluid Mech., 30, 439-448.
 Lindzen, R.S., 1970: J. Atmos. Sci., 27, 394-407.
 ———, 1971: J. Atmos. Sci., 28, 609-622.
 ———, 1972: J. Atmos. Sci., 29, 1452-1462.

* Saburo Miyahara, 九州大学理学部.

3. 10. 内部重力波の臨界層

田中 浩*

臨界層は不安定擾乱の発生層であると同時に、外部から伝播してくる波動の吸収層でもある。吸収層としての内部重力波臨界層の線型理論は、Bretherton 及び Booker and Bretherton によって確立された。とはいえ厳密な意味では依然として不透明な部分が存在することが今回のセミナーで指摘された。それについて若干のコメントをしておきたい。

一定シア ($U(Z)=Z$) 中を伝播する内部重力波の無次元化された線型基礎方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + ikZ\right)^2(\phi_{zz} - k^2\phi) = k^2 R_i \phi \quad (1)$$

と書ける。ここで $\phi(Z, t)$ は流線関数、 R は水平方向の波数、 R_i はリチャードソン数である。この方程式に Laplace 変換

$$\phi(Z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \Psi(Z, p) e^{pt} dp \quad (2)$$

を施すこと

$$\Psi_{zz} + \left\{ \frac{R_i}{(Z - Z_p)^2} - k^2 \right\} \Psi = 0 \quad (3)$$

が得られる。ただし $Z_p = ip/k$ である。 $t < 0$ のときは外部からの波動強制は存在しない。 $t = 0$ で底面に波動状の強制を switch on する。このために $t > 0$ では境界条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Psi &= \gamma e^{i\delta} / p \cdots \cdots Z = -Z_0 \text{ (bottom)} \\ \Psi &= 0 \cdots \cdots Z = Z_0 \text{ (top)} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで γ, δ は $O(1)$ の定数である。すると(3)の解は

$$\Psi(Z, p) = \frac{\gamma e^{i\delta}}{p} \left\{ \frac{\phi_b(Z_0 - Z_p) \phi_a(Z - Z_p)}{\phi_b(Z_0 - Z_p) \phi_a(-Z_0 - Z_p)} - \frac{\phi_a(Z_0 - Z_p) \phi_b(Z - Z_p)}{-\phi_a(Z_0 - Z_p) \phi_b(-Z_0 - Z_p)} \right\} \quad (5)$$

となる。ここで $\phi_{a,b}(Z)$ は(1)で $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ とした方程式

$$\phi_{zz} + \left(\frac{R_i}{Z^2} - k^2 \right) \phi = 0 \quad (6)$$

の2個の解であり、ベッセル関数で表わされる。

解(5)において、 $p=0$ は波動の強制が無限時間続くことによって生じる極 (pole) である。有限時間の強制では、極は存在しない。この他にいくつかの岐点 (branch

point) がある。まず $p = -ikZ$ (または $Z_p = Z$) という岐点は、臨界層に関係するもので重要である。その他に top の境界条件に伴う岐点 $p = -ikZ_0$ (または $Z_p = Z_0$) が存在する。しかしこれは transient wave を表わしており、たとえ発生しても、十分時間が経過すれば消滅して、流体全体にはほとんど何の寄与も与えないと仮定できる。その他に(5)の分母を0にするような極が存在するかもしれない。しかし $R_i \gg 1/4$ (すなわち成層が十分に安定) でかつ強制された波動が十分小さければ、Howard の安定性の議論からそのような極は存在しないと考えられる。従ってわれわれは $p=0$ という極と $p = -ikZ$ という岐点だけを考えればよい。

解(5)を(2)に代入して $\phi(Z, t)$ を求める際に、 $t < 0$ では $R_e(p) > 0$ 、 $t > 0$ では $R_e(p) < 0$ でなければ(2)の積分は収束しない。すなわち積分路は発散を避けるようにとる必要がある。このことは、Laplace 変換にはすでに Rayleigh damping に対応する処置が施こされていることを意味する。このようにして得られた $t \rightarrow \infty$ における解 (すなわち極 $p=0$ のまわりの解) は、無限小 Rayleigh damping を入れた定常解と一致するはずである。だがこれはあくまでも $p=0$ の極と $p = -ikZ$ の岐点が分離できる外部領域、すなわち臨界高度 ($Z=0$) から十分離れた領域でいえることである。外部領域の解を outer solution という。もし極と岐点が非常に接近している (すなわち $Z \approx 0$) と、 $t \rightarrow \infty$ でも定常解は存在しないで、無限に減衰する非定常解のみが存在する。これが臨界層内部の解、すなわち inner solution である。

Outer solution は

$$\phi(Z, t) = \phi_{\text{steady}} + \phi_{\text{transient}} \quad (7)$$

のように書ける。外部領域のある一定高度で見ると、 $\phi_{\text{transient}}$ は kZ という振動数で振動しながら、かつゆっくり振幅を減少してゆき、 $t \rightarrow \infty$ では $\phi_{\text{transient}}$ は消失する。残された ϕ_{steady} は、ロスビー波の特異点における対数特性とは若干異なり、指数的対数特性 (Exponential の中に対数が入る) を示す。もし臨界層に無限小の dissipation を考えて特異性を消してやれば、 $Z > 0$ と $Z < 0$ で $-\pi$ の位相の差が存在し、したがってレイノルズ応力の gap が生じる。このように臨界層をはさんでレイノルズ応力の gap が生じることは、臨界層の内部での平均場の加速を意味する。このように臨界層は加速を行なう領域であり、現実にとどのような機構で加速が行なわれるか、すなわち wave transie-

(767 頁に続く)

* Hiroshi Tanaka, 名古屋大学水圏科学研究所。

- Sensing (R.G. Reeves ed.), American Society of Photogrammetry.
- Moore, R.K. and A.K. Fung, 1979: Radar Determination of Winds at Sea, Proc. IEEE, 67(11), 1504-1521.
- Moore, R.K., A.K. Fung, G.J. Dome, and I.J. Birrer, 1978: Estimates of Oceanic Surface Wind Speed and Direction Using Orthogonal Beam Scatterometer Measurements and Comparison of Recent Sea Scattering Theories, NASA Contractor Report 158908, NTIS No. N78-30474.
- Moore, R.K., Y.S. Yu, A.K. Fung, D. Kaneko, G.J. Dome, and R.E. Werp, 1979: Preliminary Study of Rain Effects on Radar Scattering from Water Surface, IEEE, OE-4(1), 31-32.
- Okamoto, K., T. Ojima, H. Masuko, S. Yoshikado, H. Inomata, and N. Fugono, 1980: Airborne Microwave Sensors for Remote Sensing of Precipitation, Preprint of IAF' 80, B 71.
- Skolnik, M.I., 1970: Sea Echo, Chapter 26 in Radar Handbook (Skolnik ed.), McGraw-Hill.
- Stogryn, A., 1967: The Apparent Temperature of the Sea at Microwave Frequencies, IEEE, AP-15(2), 278-286.
- Swift, C.T., 1980: Passive Microwave Remote Sensing of the Ocean-A Review, Boundary-Layer Met., 18(1), 25-54.
- Tiuri, M.E., 1966: Radio-Telescope Receivers, Chapter 7 in Radio Astronomy (J.D. Kraus ed.), McGraw-Hill Book Co.
- Valenzuela, G.R., 1978: Theories for the Interaction of Electromagnetic and Ocean Waves-A Review, Boundary-Layer Met., 13(1-4), 61-85.
- Wilheit, Jr., T.T., 1978: A Review of Application of Microwave Radiometry to Oceanography, Boundary-Layer Met., 13(1-4), 277-293.
- , 1979: A Model for the Microwave Emissivity of the Ocean's Surface as a Function of Wind Speed, IEEE, GE-17(4), 244-249.
- Walsh, D., 1976: Remote Sensing in Oceanography, Chapter 17 in Remote Sensing of Environment (J. Lintz, Jr. and D.S. Simonett ed.), Addison-Wesley.
- Wentz, F.J., 1978: Estimation of the Sea Surface's Two-scale Backscatter Parameters, NASA Contractor Report 145255, NTIS No. N78-20946.

(750 頁より続く)

nce か, dissipation かあるいは nonlinearity かを問題にすることは, 収支的観点からすれば有効とは思えない. Nonlinearity を別とすれば, Rayleigh damping による dissipation と wave transience は物事の表裏の関係にすぎない.

セミナーでは Rayleigh damping ではなく, viscosity

との関連が問題にされた. Wave transience と viscosity との関係は必ずしも明確ではない. Hazel によれば, 粘性臨界層の吸収特性は非粘性の極限の場合と全く同じになるといっている. 多分これは本当だろうが, 粘性臨界層の4個の内部粘性解を解析的に求められない限り, 疑問は残り続けるであろう.