に対して，やはり Lorenz 方程式が導かれる（York・York, 1981）．管の断面で物理量（例えば流体温度 T）は一様とし，独立変数は t と ϕ とする．このとき断面を通過する流量 q は ϕ に依らない（非圧縮の仮定）．この場合，（Ｉ）式の X に相当するのが流量 q であり，Y は $\phi=\pi/2$ での流体温度 $T(t,\ \phi=\pi/2)$，Z は $T(t,\ \phi=\pi)-T_w(\pi)$ に相当する．ただし，$T_w(\phi)$ が $\sin\phi$ 成分をもつと，$\dot{Y}$ の式の右辺に定数項がでてくる．この問題では管壁での摩擦が散逸項となる．

（ｃ）Baroclinic wave

回転座標系で上下２層の流体の各々に basic zonal flows があるとし，これに重ね合わさって有限振幅の傾圧波があるものとする．準地衡風近似の方程式を求め，さらに（複雑だが）適当な変数変換を行うと，やはり Lorenz system（Ｉ）が導かれる（Pedlosky・Frenzen, 1980）．$X,\ Y,\ Z$ はこのとき wave の振幅および basic zonal flow へのはね返りの補正項と関係している．この場合の外部強制は zonal flows といえよう．散逸は上下の固体壁に接する Ekman 層の存在による．Rは Ekman 数および Rossby 数に依存する．

（ｄ）レーザー発振

面白いことにレーザー発振の現象でも，Lorenz 方程式が導かれている（Haken, 1978）．レーザー原子は２つのエネルギー準位 $E_1,\ E_2(>E_1)$ をもつものとし，各準位の占有数をそれぞれ $n_1,\ n_2$ とする．このとき反転数は $\sigma=n_2-n_1$ で定義される．全反転数 D は σ をすべてのレーザー原子について加え合わせたものである．準位間の遷移あるいは原子の分極率の緩和時間に相当して，damping も存在する．外部強制の pumping があるときの平衡反転数を D_0 とすると，D_0 がある臨界値 D_{thr} より小さいときはレーザー発振が起こらず，これは定常な基本状態に対応する．$D_0>D_{\mathrm{thr}}$ になると，発振状態になり，D も feedback を受ける．この場合，X は振動電場の振幅，Y は原子の分極率変動の振幅，Z は feedback された反転数を表わす．

（ｅ）ダイナモ・モデル

力武（Rikitake, 1958）の two-disc dynamo の系でも（Ｉ）とよく似た方程式が導かれ，磁場の不規則的な反転が示され，その振舞いも Lorenz attractor によく似ていることが報告されている（Cook *et al.*, 1970）．ところが，modified single disc dynamo のモデル（Robbins, 1977）では，Lorenz system（Ｉ）そのものが導かれる．このとき，X はコイルの電流，Y は disc の動径方向の電流，Z は disc の回転角速度に対応する．外部強制は disc に与えられたトルクである．

Lorenz 系は，しばしば $Z\to C-Z$（C は定数）と変換した式で与えられることがあるから注意を要する．Pedlosky *et al.* (1980)，Haken (1978)，Robbins (1977) の文献がそうである．

文献

Cook, A.E. and P.H. Roberts, 1970: Proc. Camb. Phil. Soc., **68**, 547.

Haken, H., 1978: Synergetics (Springer), §12.2.

Lorenz, E.N., 1963: J. Atmos. Sci., **20**, 130.

Ott, E., 1981: Rev. Mod. Phys., **53**, 655.

Pedlosky, J. and C. Frenzen, 1980: J. Atmos. Sci., **37**, 1177.

Rikitake, T., 1958: Proc. Camb. Phil. Soc., **54**, 89.

Robbins, K.A., 1977: Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **82**, 309.

York, J.A. and E.D. York, 1979: J. Stat. Phys., **21**, 263.

———————, 1981: Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence, ed. H.L. Swinney and J.P. Gollub (Springer), Chap. 4.

第２部　不安定論

熱対流と分岐—Bénard 対流

山田　道夫*

水平な流体層を下側から熱するとき見られる対流は，上下境界の温度差によって，静止，ロール状，六角柱セル状など様々の形態を示すことが知られている．この現象は，Bénard や Rayleigh の昔から研究されていたが，近年分岐現象の典型例として再び脚光を浴びてきた（木村竜治，1971; Busse, 1981a; Busse, 1981b）．分岐理論の立場から見るとき，対流現象の特徴は一連の分岐系列が観測できる点にある．これは系の対称性が低下した小さな容器内において特に著しい．この理由から最近は小容器内での高精度の実験研究が盛んに行われ，多くの興

* Michio Yamada，京都大学理学部物理学教室．

味深い結果が得られている．そこで，ここでは容器の大小による違いも含めて，分岐現象としての対流の素描を試みる．

まず，上下を水平な無限に広い定温剛体壁にはさまれた流体を考えよう．Boussinesq 近似が適用可能とすれば，系は2つの無次元パラメータに支配される：Rayleigh 数 Ra（鉛直温度勾配に比例）及び Prandtl 数 Pr（動粘性係数/熱伝導係数）．Ra を0から十分ゆっくり上げてゆくとしよう．はじめ静止していた流体は，Ra が臨界値 $Ra_c=1707.8$（Pr によらない）を越えると定常な対流運動を始める．これは，$Ra=Ra_c$ で分岐が起こり静止状態が不安定となるためである．流体が Boussinesq 近似で完全に記述されるならば，この定常流は2次元ロール状であり，分岐は超臨界型である（Schlüter *et al.*, 1965）．（しかし，物性値が温度と共に変化したり，密度が温度に非線型に依存することで Boussinesq近似からはずれると，臨界点近傍では六角柱セル状の定常流が安定となり，分岐は亜臨界型となる（Palm *et al.*, 1967, Busse, 1967）．これが実験の際六角柱セルも見える一因となる．この2次元ロール状対流の安定性は，70年代に Busse を中心とするグループによって，線型安定論と実験の両面から詳しく調べられた．それによると，このロール状対流は，面白いことに，$Ra(>Ra_c)$ と Pr を与えても一意に決まらず，ある範囲の大きさのものが安定に存在し得る（Rabinowitz, 1968; Busse *et al.*, 1971; Busse *et al.* 1979; Clever *et al.*, 1974）．言いかえると，与えられた外部条件のもとで（対称性によるものを除いても）連続無限個の異なる状態が安定であり得るのである．またこのロール状対流の安定限界を与える臨界モードは，定性的に異なる複数個のものが存在し，得られている安定性ダイヤグラムは非常に複雑である（Busse 1981a; Busse 1981b）．しかし筆者の知る限りでは，この分岐の非線型安定性を調べた例はなく，理論的に完全に解決されているわけではない．実験結果によれば，不安定になったロール状対流は，transient な過程を経て安定なロール状対流に至るか，あるいは全く異なった（定常又は非定常の）対流パターンに至る（Busse *et al.*, 1971; Busse *et al.*, 1979）．後者の中には，超臨界型分岐によると思われる3次元セル状の定常パターンも存在する．この3次元セルは，更に Ra を上げると振動型不安定を起こし spoke-pattern と呼ばれる美しい非定常パターンに至ることが観測されている（Busse *et al.*, 1974）．

ところで，現実に起こるロール状対流は様々の攪乱のために必ずしも2次元的でない．このような“欠陥対流”も最近研究されている（Gollub *et al.* 1981; Siggia *et al.*, 1981）ことをつけ加えておく．

次に水平長が厚さと同程度の小容器中の対流をみてみよう．この様な系では，対称性に起因する縮退が解けて各分岐が単純になり，分岐と共に分岐系列の研究が盛んである．また同じ理由により，有限次元力学系との比較も可能になる（この意味では，有名な Lorenz モデル（Lorenz, 1963）は小容器の場合に近いと思われる）．最近の高精度の実験は，物性値や境界条件の違いで，周期運動，準周期運動，周波数の locking，間欠性，倍周期分岐などを含む驚く程様々な分岐系列が存在することを明らかにした（Ahlers *et al.* 1978; Gollub *et al.*, 1980）．この中には，3つの周期を含む準周期運動さえも含まれており，これは Ruelle と Takens の理論（Ruelle *et al.*, 1971）との関連で特に興味深い．また倍周期分岐に関しては，最近の Feigenbaum 理論（Feigenbaum, 1978, 1979, 1980）（これは一次元写像 $x_{n+1}=f(x_n)$ の理論に基礎をおく）との定量的比較が精力的に進められている（Giglio *et al.*, 1981; Libchaber *et al.*, 1982）．しかし，小容器中の対流研究は始まったばかりと言ってよく，各種の分岐や分岐系列がいつ出現するかという問に対する統一的な答を得るにはまだ時間がかかりそうである．

文　献

Ahlers, G. and R.P. Behringer, 1978: The Rayleigh-Bénard instability and the evolution of turbulence, Suppl. Prog. Theor. Phys., 64, 186-201.

Busse, F.H., 1967: The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extreme principle, J. Fluid Mech., 30, 625-649.

———, and J.A. Whitehead, 1971: Instabilities of convection rolls in a high Prandtl number fluid, J. Fluid Mech., 47, 305-320.

———————, 1974: Oscillatory and collective instabilities in large Prandtl number convection, J. Fluid Mech., 66, 67-79.

———, and R.M. Clever, 1979: Instabilities of convection rolls in a fluid of moderate Prandtl number, J. Fluid Mech., 91, 319-335.

———, 1981a: Transition to turbulence in thermal convection with and without rotation, in “Transition and turbulence”, ed. Richard E. Meyer, Achademic Press, 43-61.

———, 1981b: Transition to turbulence in

Rayleigh-Bénard convection, in "Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence" ed. H.L. Swinney and J.P. Gollub, Springer, 97-137.

Clever, R.M. and F.H. Busse, 1974: Transition to time-dependent convection, J. Fluid Mech., 65, 625-645.

Feigenbaum, M.J., 1978: Quantitative universality for a class of nonlinear transformations, J. Stat. Phys., 19, 25-52.

————, 1979: The universal metric properties of nonlinear transformations, J. Stat. Phys., 21, 669-706.

————, 1980: The transition to aperiodic behavior in turbulent systems, Commun. Math. Phys., 77, 65-86.

Giglio, M., S. Musazzi and U. Perini, 1981: Transition to chaotic behavior via a reproducible sequence of period-doubling bifurcations, Phys. Rev. Lett., 47, 243-246.

Gollub, J.P. and S.V. Benson, 1980: Many routes to turbulent convection, J.F.M., 100, 449-470.

————, and J.F. Steinman, 1981: Doppler imaging of the onset of turbulent convection, Phys. Rev. Lett., 47, 505-508.

木村竜治, 1971: 対流実験の系譜, 天気, 18, 505-520.

Libchaber, A., C. Laroche and S. Fauve, 1982: Period doubling cascade in mercury, a quantitative measurement, J. de Phys. Lett., 43, L-211-L-216.

Lorenz, E.N., 1963: Deterministic nonperiodic flow, J. Atmos. Sci., 20, 130-141.

Rabinowitz, P.H., 1968: Existence and nonuniqueness of rectangular solutions of the Bénard problem, Arch. Ration. Mech. Anal., 29, 32-57.

Ruelle, D. and F. Takens, 1971: On the nature of turbulence, Commun. Math. Phys., 20, 167-192.

Siggia, E.D. and A. Zippelius, 1981: Dynamics of defects in Rayleigh-Bénard convection, Phys. Rev., A24, 1036-1049.

Schlüter, A., D. Lortz and F. Busse, 1965: On the stability of steady finite amplitude convection, J. Fluid Mech., 23, 129-144.

Palm, E., T. Ellingsen and B. Gjevik, 1967: On the occurrence of cellular motion in Bénard convection, J. Fluid Mech., 30, 651-661.

熱対流の水平パターンの決定について

吉崎　正憲*

1. 序

衛星写真に写った雲のパターンを調べてみると，筋状の雲とセル状の雲がよく観測される．これらは室内実験で見られる2次元ロールと六角形セルによく対応していて，自然界には少なくとも2つの対流パターンがあるように思われる．ではなぜこのようなパターンが選択されるのであろうか？ここでは熱対流の“形”の分岐を問題に取り上げた．

2. レーリー対流

まず最初に単純な状況における対流を考える．(R1) 流体の物質定数が温度によらず一定である．(R2) 無限に広がる水平固体壁に囲まれた流体層を考え，下から一様に加熱して上から一様に冷却する．この2つの条件を満たす状況で起こる対流をレーリー対流と呼ぶ．

非線型項を無視した線型理論では，じょう乱の水平成分と垂直成分が変数分離されて，上下の境界条件やレーリー数（R）の垂直分布が水平成分に反映しないため，色々な水平パターンが縮退してしまい，どのパターンが実現するか決定できない．したがって，“形”の分岐を調べるためには非線型理論が必要である．

非線型の強さの度合いをRの臨界レーリー数（R_0）からのずれ，つまり $\Delta=R-R_0$ で表すと，弱非線型理論は Δ が非常に小さい場合に適用できる理論である．この場合，非常に小さい値をもつパラメータ ε で，上昇流 w, R および時間 t を

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n w^{(n)},\quad R-R_0=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n R^{(n)},\quad t=\varepsilon^2\tau$$

と展開できる．特に

$$w^{(1)}=\Big(B(\tau)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}a_0x\cos\frac{1}{2}a_0y$$
$$+C(\tau)\cos a_0y\Big)W(z)$$

と仮定する．ここで a_0 は臨界波数，$W(z)$ は臨界点における垂直構造を表わす．これらを支配方程式に代入して，ε について整理して，可解条件を用いると，B と C に関する振幅方程式が得られる．

$$a\frac{dB}{d\tau}=\Delta B-bB^3-(4b-c)BC^2 \tag{1}$$

$$a\frac{dC}{d\tau}=\Delta C-\frac{1}{2}(4b-c)B^2C-cC^3 \tag{2}$$

* Masanori Yoshizaki, 東京大学海洋研究所.

係数 a, b, c はプラントル数の関数であるが，正値をとる．この振幅方程式の定常解として，少なくとも，伝導のみの静止の解，六角形セルの解（$\bar{C}=\bar{B}/2$）および2次元ロール（$\bar{B}=0$, $\bar{C}\neq 0$）の解がある．これらの安定性を吟味すると，$\varDelta>0$ の場合には2次元ロールは安定であるが，六角形セルは不安定である事がわかる．つまり，レーリー対流では2次元ロールしか実現しない事になる．

3. レーリー対流の変形

レーリー対流の条件を変えて，温度分布が z の2次関数の場合を考える．再び B と C の振幅方程式を求めると，

$$a\frac{dB}{d\tau}=\varDelta' B+dBC-bB^3-(4b-c)BC^2 \qquad (3)$$

$$a\frac{dC}{d\tau}=\varDelta' C+\frac{1}{4}dB^2-cC^3-\frac{1}{2}(4b-c)B^2C \qquad (4)$$

となる．定数 d の項は温度分布が z の2次関数である事からでてきた項である．この定常解も静止解，六角形セルの解および2次元ロールの解を持つ．これらの安定性を調べると，d が0でないために，3つの臨界値 $\varDelta_1'$, $\varDelta_2'$, $\varDelta_3'$（$\varDelta_1'<0<\varDelta_2'<\varDelta_3'$）が存在して，$\varDelta_1'<\varDelta'<\varDelta_3'$ で六角形セルは安定であり，$\varDelta_2'<\varDelta'$ で2次元ロールは安定である事がわかる．特に $\varDelta_2'<\varDelta'<\varDelta_3'$ で2つの解が同時に安定である事に注意しよう．また，d が正の場合はセルの中心に上昇気流をもつ六角形セルが実現して，逆に d が負の場合は下降流のセルが実現することもわかる．

同じ事が流体の物質定数（例えば拡散係数）が温度依存性をもつ場合や表面張力が働く場合に起こる．つまり，垂直方向に非対称を作る要因がある場合は六角形セルが実現しやすいのがわかる．それは，六角形セルがプリューム的な構造を持っている事に帰因する．

文献

Busse, F.H., 1967: On the instability of two-dimensional convection in a layer heated from below, J. Math. Phys., 46, 140-149.

———., 1981: Transition to turbulence in Rayleigh-Benard convection, In "Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence, edited by H.L. Swinney and J.P. Gollub", Springer-Verlag, 97-137.

———. and J.A. Whitehead, 1971: Instabilities of convection rolls in high Prandtl number fluid, J. Fluid Mech., 47, 305-320.

———. and R.M. Clever, 1979: Instabilities of convection rolls in a fluid of moderately Prandtl number, J. Fluid Mech., 91, 319-335.

Chandrasekhar, S., 1961: Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Oxford at the Clarendon Press, 654 pp.

Clever, R.M. and F.H. Busse, 1974: Transition to time dependent convection, J. Fluid Mech., 65, 625-645.

Koschmieder, E.L., 1966: On convection on a uniformly heated plane, Beitr. Phys. Atmos, 39, 1-11.

Krishnamurti, R., 1970a, b: On the transition to turbulent convection, Part I; The transition from two- to three-dimensional flow, Part 2, The transition to time-dependent flow, J. Fluid Mech., 42, 295-307, 309-320.

Newell, A. and J.A. Whitehead, 1969: Finite bandwidth, finite amplitude convection, J. Fluid Mech., 38, 279-303.

Niino, H., 1982: A weakly non-linear theory of barotropic instability, J. Met. Soc. Japan, 60, 1001-1023.

Segel, L.A. and J.T. Stuart, 1962: On the question of the preferred mode in cellular thermal convection, J. Fluid Mech., 13, 289-306.

Stork, K. and U. Muller, 1972: Convection in boxes: experiments, J. Fluid Mech., 54, 599-611.

Stuart, J.T. and R.C. DiPrima, 1978: The Eckhaus and Benjamin-Feir resonance mechanisms, Proc. Roy. Soc. Lond., A362, 27-41.

Westreid, J., Y. Pomeau, M. Dubois, C. Normand and P. Berge, 1978: Critical effects in Rayleigh-Benard convection, J. Physique Lett., 39, 725-731.

Yoshizaki, M., 1979: Finite-amplitude thermal convection in a shear flow with a curved vertical temperature profile, I. Theory. J. Met. Soc. Japan, 57, 548-559.

（このレビューを書くにあたって，下記のレビューを参考にした．）

木村竜治，1971: 対流実験の系譜，天気，18，505-520.

Palm, E., 1975: Nonlinear thermal convection, Ann. Rev. Fluid Mech., 7, 39-61.

順圧不安定の実験と理論

新野　宏*

シア層型の速度分布を持つ流れの順圧不安定が超臨界型不安定であること，又この流れには安定な有限振幅波が存在することが，最近弱非線型理論によって明らかに

* Hiroshi Niino，気象研究所．

された (Niino, 1982a). ここでは，より非線型性の強い領域での有限振幅波の振舞を見るために Niino (1982c) が行った室内実験の結果を紹介する.

回転台（角速度 Ω）の上に，深さ H の密閉された円筒容器をのせ，水を満たす．容器の底面の半径が a より小さい領域を角速度 $\Delta\Omega$ で，その外側を $-\Delta\Omega$ で回転することによって，半径 a の所に鉛直境界層（$E^{1/4}$-layer; Stewartson, 1957）を作り出し，その安定性を調べた.

理論的考察によれば，このようにして作り出した$E^{1/4}$-layer の安定性は，レイノルズ数

$$R\equiv a\Delta\Omega\sqrt[4]{\frac{H^2}{4\nu^3\Omega}}$$

と無次元化された $E^{1/4}$-layer の半径

$$\gamma\equiv a\left(\frac{4\Omega}{\nu H^2}\right)^{1/4}$$

のみに依存する (cf. Yamagata・Kimura (1973), Kimura (1976) のジェットの安定性の実験では，基本流の構造が $E^{1/4}$ に関する相似性を持たない)．しかし，今回の実験では $\gamma\approx25\sim50$ と大きく，曲率の効果は重要でないことが示せる (cf. Hide・Titman (1967) では，$\gamma\approx2.8\sim12$)．従って，安定性は R のみに依存すると考えて良い.

実験結果は，ある R に対して実現した渦の個数 n を無次元波数 $k=\frac{n}{a}\sqrt[4]{\frac{\nu H^2}{4\Omega}}$ に直して整理した．実験から求めた臨界レイノルズ数と臨界波数は，線型安定論の結果とよく一致する.

次に，実現した R と k の組合せ (R, k) を R-k 平面上でプロットすると，(R, k) は線型安定論で不安定な領域よりもずっと狭い領域内に分布する．この領域は有限振幅波が安定な領域と考えることができる．R及びkが共に $\Omega^{-1/4}$ に比例するという特徴を利用して，n 個の渦が実現している状態で Ω を変えながら渦の個数の変化を見る実験を行うことにより，有限振幅波の安定領域をより精密に求めた．一般に，Rが大きくなるにつれて実現波数は減少する傾向が見られる．又，安定領域の境界は side-band 不安定 (Stuart・DiPrima, 1978; Niino, 1982b; Yoshizaki, 1982) によって規定されているように見える．安定領域を決定したことにより，波数選択における履歴現象を実験で示すことが可能になった．例えば，あるRの値に対してn個の渦が実現している時，Rの値を一度変化させて再び元の値に戻すことによりm個の渦が実現する状態に変えることも，十分な予測をもって行うことができるようになった.

今回のセミナーでは，その数学的取扱いの容易さの為に，Lorenz モデル (1963) のような極度に切断されたスペクトルモデルに基づいた議論が多かった．しかし，順圧不安定のように side-band 不安定によって，レイノルズ数と共に卓越波数が次第に変化する場合も自然界には多く見られる．このような不安定現象に対して切断されたスペクトルモデルを用いる際には十分な注意が必要であろう.

文　献

Hide, R. and C.W. Titman, 1967: Detached shear layers in a rotating fluid, J. Fluid Mech., 29, 39-60.

Kimura, R., 1976: Barotropic instability of a boundary jet on a sloping bottom, Geophys, Fluid Dyn., 7, 205-230.

Lorenz, E., 1963: Deterministic nonperiodic flow, J. Atmos. Sci., 20, 130-141.

Niino, H., 1982a: A weakly non-linear theory of barotropic instability, J. Met. Soc. Japan, 60, 1001-1023.

————., 1982b: A note on the stability of finite-amplitude solution of the generalized Landau equation, J. Met. Soc. Japan, 60, 1024-1033.

Niino, H., 1982c: Finite-amplitude waves of barotropic instability ——A laboratory experiment——, in preparation.

Stewartson, K., 1957: On almost rigid rotations, J. Fluid Mech., 3-15.

Stuart, J.T. and R.C. DiPrima, 1978: The Eckhaus and Benjamin-Feir resonance mechanisms, Proc. Roy. Soc. London., **A**362, 27-41.

Yamagata, T. and R. Kimura, 1973: A simple laboratory model for investigating the dynamic instability of a nearly two-dimensional jet in a rotating fluid, J. Met. Soc. Japan, 51, 420-434.

Yoshizaki, M., 1982: Stability of finite-amplitude baroclinic waves in a two-layer channel flow, Part II, Moderately non-linear regime, J. Met. Soc. Japan, 60, 620-637.

ロスビー波の臨界層と攪乱方程式の連続固有値

山田　道夫*　後藤　金英**

昨年，大槌での第2回地球流体夏のセミナーでは「臨界層」がテーマに取り上げられ，多くの議論が戦わされた

* Michio Yamada, 京都大学理学部物理.

** Kanefusa Gotoh, 京都大学数理解析研究所.

(田中浩他, 1981). いくつかの議論の要点は，理論的側面から見れば次の問題に帰すると思われる：どのような粘性項を考えた場合に，非粘性解と粘性解の非粘性極限は一致するか？ 一般の定常平行流に対する線型擾乱方程式の場合，この問題が困難な一因は，非粘性解と比較すべき粘性方程式の形式解さえ得られていないことにある．流体力学の分野においても，この種の形式解は比較的最近いくつかの場合について得られたにすぎない (Grosch *et al.*, 1978; Gustavsson, 1979; Salwen *et al.*, 1981). 大槌での議論に刺激されて，我々はβ面上の粘性形式解を求めロスビー波の粘性臨界層との関係を考察した (Yamada *et al.*, 1982). その結果を報告したい．

β面上の2次元平行流 ($U(y)$, 0) に対する擾乱方程式は，粘性 $\nu\Delta\boldsymbol{u}$ が存在する場合，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta\Phi+\left(\beta-\frac{d^2U}{dy^2}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\nu\Delta^2\Phi(\beta>0) \tag{1}$$

となる．ここで Φ は擾乱の流れ関数．Fourier-Laplace 変換を用いると，(1) の解は次の形に得られる．

$$\Phi(x,y,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{i\alpha x}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{pt}\hat{\Phi}(p)dp\right]d\alpha \tag{2}$$

$\hat{\Phi}(p)$ の pole は (1) の離散固有値に対応する．この離散固有値に対する解析はよく知られた Orr-Sommerfeld 方程式 ($\beta=0$) の場合と類似なので，ここでは立ち入らない．$\hat{\Phi}(p)$ の特異点は実は poles だけではない．$|y|=\infty$ で一様流になる $U(y)$ に対しては，$\hat{\Phi}(p)$ の分岐点が常に存在し，分岐線上の積分が (2) に寄与する．この積分の被積分関数は，(1) の連続固有値に対応し，$y\to\pm\infty$ で減衰しない波動を表わすことが証明できる．結局 (1) の形式解は模式的に書けば次のようになる．

$$\Phi(x,y,t)=\sum_{\text{poles}}[\text{離散固有値に属する固有関数}]e^{pt}+\int_{\text{cuts}}[\text{連続固有値に属する固有関数}]e^{pt}dp \tag{3}$$

$\nu\neq0$ の場合，連続固有値に属する固有関数 (連続モード) は常に時間的に減衰するモードとなることが分かる．従って，主流の安定性問題には連続モードはそれほど重要ではない．しかし，擾乱の初期値問題を完全に解くためには，(3) 式から分かるように，連続モードまで含めて考えなければならない．

さて，非粘性極限 ($\nu\to0$) を考えよう．実はこの時，連続モードは中立安定となって，$|y|=\infty$ でロスビー波と一致することが分かる．そこで，この非粘性極限の連続モードをロスビーモードと呼ぶことにする．ロスビーモードの波形はロスビー波に対する主流のシアーの効果を反映している，と考えることもできる．例えば $U(y)=\tanh y$ の場合，ロスビーモードは次の3種類のものから成る：1. $y=+\infty$(北) でロスビー波と一致し，$y=-\infty$(南) で0に収束するもの，2. $y=\pm\infty$ で共にロスビー波と一致するもの，3. $y=-\infty$ でロスビー波と一致し，$y=+\infty$ で0に収束するもの．これらのうち1.と3.は，主流がロスビー波に不透明な壁として作用し南北伝搬を妨げている場合に対応している．

ところで，ロスビー波が主流とエネルギーのやりとりをするためには，対応するロスビーモードが臨界層を伴うことが必要である．$U(y)=\tanh y$ の場合，このようなロスビーモードは上記1.の種類のものしか無い．これは $y=\infty$(北) から入射したロスビー波にのみ臨界層が発生することを示している．以上の結論は，一般に $U(-\infty)<U(y)<U(+\infty)$ をみたす $U(y)$ について成立する．また $U(-\infty)=U(+\infty)$ となるようなジェットの場合，東向きジェット ($U(+\infty)<U(y)$) についてはロスビーモードは臨界層を伴わないが，西向きジェット ($U(y)<U(+\infty)$) については，常に臨界層を伴うロスビーモードが存在する．

以上の事柄を前提として，例えば $U(y)=\tanh y$ の場合について，$y=+\infty$(北) から入射してきた波束を考えよう．このような波束は (3) のように分解される．波束が進行し主流の影響を受けると，波束の一部 (上記2.に対応) は $y=-\infty$(南) 側へ透過し，残りの部分 (上記1.に対応) は臨界層を伴って，過剰反射されるか又は一部分吸収され，透過しない．

最後にいくつかの注意を述べておきたい．第一，以上議論した連続モードは，Case (1960) によって見出された連続モードとは異なるものである．Case のモードは $|y|=\infty$ で0に収束しなければならない．第二，Lindzen・Tung (1978) は，不安定モードの存在をロスビー波過剰反射のメカニズムで説明しようとした Linden *et al.*, 1978; 新野宏, 1981). 彼らの議論では，ロスビー波は離散固有値の裏に隠れた存在だが，我々の解析ではロスビーモードも離散固有値と対等な連続固有値に属しており，その意味では，一方が他方を励起することはない．

文献

Case, K.M., 1960: Stability of inviscid plane couette flow, Phys. of Fluids, 3, 143-148.

Grosch, C.E. and H. Salwen, 1978: The continuous spectrum of the Orr-Sommerfeld equation, Part 1, The spectrum and the eigenfunctions, J. Fluid Mech., 87, 33-54.

Gustavsson, L.H., 1979: Initial-value problem for boundary layer flows, Phys. of Fluids, 22, 1602-1605.

Lindzen, R.S. and K.K. Tung, 1978: Wave Over-reflection and Shear Instability, J. Atmos. Sci., 35, 1626-1632.

新野 宏, 1981: 順圧不安定の力学, 天気, 28, 53-82.

Salwen, H. and C.E. Grosch, 1981: The continuous spectrum of the Orr-Sommerfeld equation, Part 2, Eigenfunction expansions, J. Fluid Mech., 104, 445-465.

田中 浩他, 1981:第2回地球流体夏のセミナー「臨界層」の報告, 天気, 28, 739-767.

Yamada, M. and K. Gotoh, 1982: in preparation.

第3部 ブロッキング

地形が入った順圧大気モデルにおけるプラネタリー波の時間変動

楠 昌司*

北半球の中緯度の偏西風帯には，主に大規模山岳による力学的効果，大陸と海洋との温度差による熱的効果により励起されたプラネタリー波が存在している．卓越する東西波数は数日から数十日のタイムスケールで交代しており，時には波の振幅が著しく増大しいわゆるブロッキングが発現し異常気象を招くことがある．単純化した大気モデルを用い，このような波動の時間変動に対し，大規模山岳がどのような役割を担っているのか調べた．

β平面，準地衡風，順圧大気のチャネルを考え，底に中緯度帯の現実的な地形を入れた．波の時間変化は，移流・非線型，地形による渦管の伸縮，β効果，エクマン粘性を考慮した渦度方程式で記述した．西風の帯状流については，波が地形を感じて生ずる帯状流に対する山の抵抗，エクマン粘性，外的強制力を含んだ運動方程式で時間変化を記述した．

さらに流線関数と地形を空間スペクトルに展開し，各モードの振幅に対する時間発展方程式を導いた．

南北方向のモードとして基本モードのみを採用すると，波と波との非線型相互作用が禁止され，定常解が解析的に求まった．しかし，ある一定の西風の強制力に対し唯一の解が決まるだけで，Charney・DeVore (1979) や Charney・Shukla・Mo (1981) が主張した解の分岐による多重平衡解は存在しない．即ちブロッキングに対応する解は得られないことがわかった．

次に波と波との非線型相互作用の効果を見るために，南北方向のモードとして基本モードの他に第2モードも取り入れた系について調べた．しかし，方程式系が非線型で複雑になり解析的な定常解が得られないので，数値実験を行った．線型論では波数3が卓越するパラメータを選び，大気の静止状態を初期値として時間積分したところ，波数2と3とが15～20日の周期で交互に卓越することがわかった．従って，大規模山岳によって励起されたプラネタリー波は，ここで考慮したような波の非線型相互作用によって時間変動している可能性がある．

文献

Charney, J.G. and J.G. DeVore, 1979: Multiple flow equilibria in the atomosphere and blocking, J. Atomos. Sci., 36, 1205-1216.

———, J. Shukla and K.C. Mo, 1981: Comparison of a barotropic blocking theory with observation, J. Atmos. Sci., 38, 762-779.

* Shoji Kusunoki, 東京大学理学部地球物理学教室.

回転流体中の複数の平衡解・周期解とそれらの安定性

余田 成男*

地球規模での大気や海洋の運動が，非線型性により複数の平衡状態をとりうることを，低次の力学モデルを用いて調べた．

β平面上の底面に凹凸のある無限水路を考える．凹凸が水深に比べて十分小さいとすると，2次元・非圧縮流体の準地衡風渦位の式は次のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2-F)\,\varphi+J(\varphi,\nabla^2\varphi+h)+\beta\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-k\nabla^2(\varphi-\varphi^*) \quad (1)$$

* Shigeo Yoden, 京都大学理学部.