

第2種地衡風運動の定常解に関する力学的研究*

田 中 博**

要 旨

第2種地衡風運動に関する方程式の定常解の特性を調べることにより、定常プラネタリー波(波数1)の南北スケールに対する考察を行った。forcingとして地形、非断熱加熱、渦粘性消散、ニュートン冷却を与え、 β 平面近似を用いた。

計算結果によると、波数1のジオポテンシャルの分布は、成層圏において準地衡風モデルによるものとはほぼ一致するのに対し、対流圏では準地衡風モデルによる解との間に差が生じた。この差異は波数1の位相において著しい。従って、対流圏におけるプラネタリー波の南北スケールは比較的小さく、第2種地衡風近似は成立しないことが示された。さらに、この南北スケールの影響は位相の鉛直変化に重要であることが指摘された。

1. はじめに

準地衡風モデルの全盛期には、それまで問題とされていたプラネタリー波の特性を記述するためにスケールアナリシスに基づくプラネタリー波に対する方程式がBurger (1958)により提唱され、Phillips (1963)により第2種地衡風運動としてそれまでの準地衡風理論(第1種地衡風運動)と区別された。

Wiin-Nielsen (1961)は第2種地衡風運動に関する方程式を解いてプラネタリースケールの自由波の特性を論じ、この方程式系がプラネタリー波に関する解のみを残し長波をフィルタリングするものであることを指摘した。しかし線形3層モデルにより得られたこの自由波の解に対し、高い評価は得られなかった。これは、プラネタリー波の自由波に関しては、長波とのnon-linear wave-wave interactionによるエネルギーのやりとりが重要であるためである。(Phillips, 1963; Saltzman, 1970)。また、粗い差分近似は解析解と異なる解を導くことがNakamura (1976)により指摘された。その後、プラネタリー波のうちでも、南北スケールが地球の半径と同程度のものに対しては、準地衡風方程式と同形の方程式が

成立することをDickinson (1968)が指摘すると、第2種地衡風運動に関する方程式を用いた研究は減少した。

一方、準地衡風理論に基づくプラネタリー波の研究は数多くなされ、Matsuno (1970)は、子午面方向の変化も考慮に入れて、その定常解を解いた。Huang・Gambo (1981)は、近年蓄積されたニュートン冷却や非断熱加熱に関する知識を取り入れて方程式を解き、得られた定常解が観測されるプラネタリー波の特徴を再現することを示した。しかし、第2種地衡風運動に関する方程式を用いたこのような研究は見られない。南北スケールの大きいプラネタリー波に対して、Burger近似は成立するはずであり、その解の構造を調べ準地衡風方程式による解と比較することは、プラネタリー波の南北スケールの特徴を検討するうえで重要と考えられる。

そこで、本論文では、Huang・Gambo (1981)とほぼ同一の境界条件およびforcingのもとに、第2種地衡風運動に関する方程式の定常解を求め、準地衡風方程式に基づくプラネタリー波の鉛直構造と比較することにより、プラネタリー波の南北スケールに関する考察を行った。

2. 方程式および資料

プラネタリー波に関するスケールアナリシスの結果Burger (1958)は、このスケールの現象に対し渦度方程式における発散項と β 項が他の項より2桁大きく互いにバランスすることを示した。ただし、摩擦項は本質的に

* A Dynamical Study on a Steady State of the Geostrophic Motion Type 2.

** Hiroshi Tanaka, University of Missouri-Columbia, Department of Atmospheric Science.

—1983年6月17日受領—

—1983年8月15日受理—

第1表 定数および引用文献

$D = -\frac{\pi}{3}$ ($=60^\circ$): 擾乱の南北スケール, Huang, Gambo (1981)

$S = 2.1 \times 10^4 (\text{m}^2 \text{s}^{-2})$: 安定度の関数, Tung, Lindzen (1979)

$K_m = K_T = 1.0 \times 10^8 (\text{m}^2 \text{s}^{-1})$: 渦粘性係数, Wiin-Nielsen・Sela (1971)

$\alpha_R = 10. \times 10^{-6} (\text{s}^{-1})$: ニュートン冷却係数, Dickinson (1973)

$F_r = 2.0 \times 10^{-6} (\text{s}^{-1})$: エクマン摩擦係数, Charney・Eliassen (1949)

$\hat{Q}_0 = (-1.22 + 5.12i) \times 10^{-3} (\text{Jkg}^{-1} \text{s}^{-1})$: 非断熱加熱のフーリエ係数 (波数1), Ashe (1979)

$\hat{h} = (20.0 - 358.0i) (\text{m})$: 地形のフーリエ係数 (波数1), Derome・Wiin-Nielsen (1971)

無視できない。そこで Burger の結果を Phillips (1963) がまとめた方程式に、本論文では、Huang・Gambo (1981) が用いた forcing (非断熱加熱, 渦粘性消散, ニュートン冷却) を加えた方程式系を以下に用いた。

$$-2\Omega \sin \theta v = \frac{-1}{a \cos \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + K_m \nabla^2 u \quad (1)$$

$$2\Omega \sin \theta u = -\frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + K_m \nabla^2 v \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{a \cos \theta \partial \lambda} + \frac{\partial v \cos \theta}{a \cos \theta \partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} - w = 0 \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u \partial}{a \cos \theta \partial \lambda} + \frac{v \partial}{a \partial \theta} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} + Sw = \frac{R}{C_p} Q + K_T \nabla^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \alpha_R \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (4)$$

ここで、方程式に含まれる変数および定数の記号は慣例に従った。静的安定度のパラメータ $S = \frac{R}{C_p} \frac{\partial}{\partial z} (C_p T + \phi) = \frac{R}{C_p} gH$ は定数と仮定した。この仮定の誤差を縮小させるために $z = \ln \frac{P_0}{P}$ 系を鉛直座標に用いた。H はスケールハイトである。また、 K_m , K_T , α_R はすべて定数と仮定した。重要な定数については第1表にまとめた。

(1) 式, (2) 式から発散 δ を計算すると、

$$\delta = -\frac{\partial w}{\partial z} + w = -\frac{\cot \theta}{a} v + \frac{K_m}{f} \nabla^2 \zeta \quad (5)$$

と書ける。(5) 式から明らかなように、(1), (2) 式において渦粘性項を無視することにより得られる地衡風は地衡風発散を持つ。この点が準地衡風モデルと異なる点である。コリオリパラメータ f の緯度変化の効果は右辺第1項に含まれているので簡単のため、右辺第2項の渦粘性項は地衡風を用いて $\frac{K_m}{f^2} \nabla^2 \nabla^2 \phi$ で近似した。(4), (5) 式から w を消去すると、ポテンシャル渦度保存式

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u \partial}{a \cos \theta \partial \lambda} + \frac{v \partial}{a \partial \theta} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ & + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial}{a \cos \theta \partial \lambda} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial}{a \partial \theta} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ & + S \left(\frac{\cot \theta}{a} v - \frac{K_m}{f^2} \nabla^2 \nabla^2 \phi \right) \\ & = \frac{R}{C_p} \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - Q \right) + K_T \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ & - \alpha_R \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

を得る。

次に、(6) 式に含まれる u , v には準地衡風モデルと同様に地衡風を仮定し、(7) 式で与えられるように平均状態の上に擾乱が重なっているとして (6) 式を線形化すると、

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \phi(\lambda, \theta, z, t) = \bar{\phi}(\theta, z) + \phi'(\lambda, \theta, z, t) \\ Q(\lambda, \theta, z, t) = \bar{Q}(\theta, z) + Q'(\lambda, \theta, z, t) \end{cases} \quad (7) \\ & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{a \cos \theta \partial \lambda} + \alpha_R - K_T \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \phi'}{\partial z^2} - \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right) \\ & + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + \frac{S \cot \theta}{af} \right) \frac{\partial \phi'}{a \cos \theta \partial \lambda} - \frac{SK_m}{f^2} \nabla^2 \nabla^2 \phi' \\ & = \frac{R}{C_p} \left(\frac{\partial Q'}{\partial z} - Q' \right) \end{aligned} \quad (8)$$

となる。ここで、平均状態における非断熱加熱は平均状態における渦粘性消散およびニュートン冷却と平衡状態にあると仮定した。また、 $\bar{u} = -\frac{1}{fa} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$ の関係式を用いた。

(8) 式における係数 \bar{u} , f 等は東西方向には定数であるが、緯度 θ の関数である。(8) 式に対する定常解を求めることは可能であるが、本論文においては簡単のため (8) 式を特定の緯度に適用し、その係数は南北方向にも一定であると仮定した。これは、 β 平面近似に相当する。

(8) 式は、南北スケールが鉛直スケールに比べ十分大

きい場合の準地衡風ポテンシャル渦度保存式に対応する。すなわち、準地衡風方程式におけるポテンシャル渦度 q は、

$$q = f + \zeta + \frac{f_0}{S} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

であり、プラネタリー波に対して一般に $\left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right|$

である。さらに、 $\left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right|$ の時は、

$$q \doteq f + \frac{f_0}{S} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

したがって、線形方程式は次式のようになる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{a \cos \theta \partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi'}{\partial z^2} - \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right) + \frac{S}{f_0} \beta v + v \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{a \partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{a \partial \theta} \right) \right] = 0 \quad (11)$$

上式に、渦粘性摩擦、非断熱加熱の影響を考慮すると

(8) 式を得る。本研究の目的は、言い換えれば、 $\left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right|$

$\ll \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right|$ の仮定の影響を調べることである。

(8) 式の定常解を解くために必要な2つの境界条件を以下のように設定した。

$z=0$ で

$$w = -\frac{\bar{u}_s}{H} \frac{\partial h}{a \cos \theta \partial \lambda} + \frac{F_r}{f^2} r^2 \phi \quad (12)$$

$z=z_{top}$ で

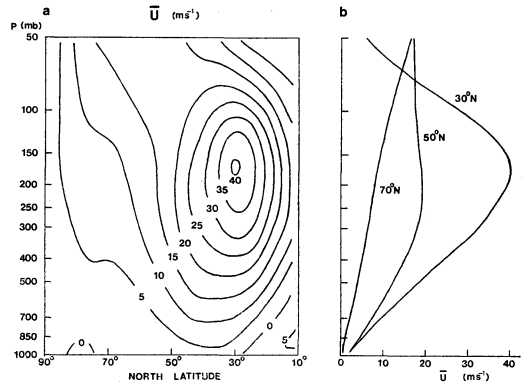
$$w=0$$

ここで (12) 式の右辺第1項は地形効果による上昇流、第2項はエクマン収束による上昇流を示す。

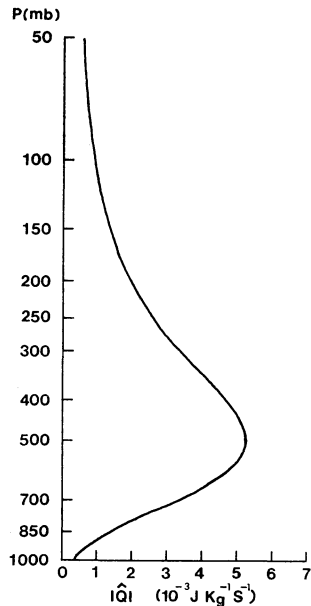
ϕ' に東西波数 k 、南北波数 $l = \frac{\pi}{D}$ の波動解を仮定して変数を分離し、鉛直方向には差分を用いて (8) 式を数値的に解いた。大気の上端を $z_{top} = 8.0$ (約60 km) とし、上端における波の反射を消すために、 $z > 4.0$ の領域には Huang・Gambo が用いたと同様の人工的なダンピングを与えた。差分 Δz は0.1に設定した。

この方程式を解くにあたり、 \bar{u} の分布は、30 mb 以下については1979年に行われた FGGE Level IIIb データの SOP-1, GFDL Version を与え、その上層に対しては、Matsuno (1970) と同様の分布を与えた。 \bar{u} の鉛直子午面分布および、30°N, 50°N, 70°N における鉛直分布を第1図に示す。 \hat{Q} に対しては、Huang・Gambo が Murakami (1972) より引用したものと同様の (14) 式で与えられる鉛直分布を用いた。

$$\hat{Q} = \hat{Q}_0 \exp \left[- \left(\frac{P - \bar{P}}{b} \right)^2 \right] \quad (14)$$



第1図 平均带状風の鉛直子午面分布(a), 鉛直分布(b).

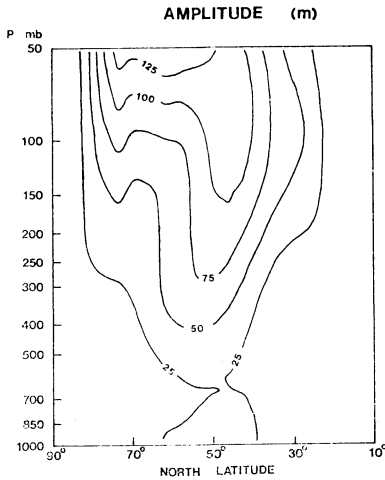


第2図 非断熱加熱の振幅の鉛直分布(波数1).

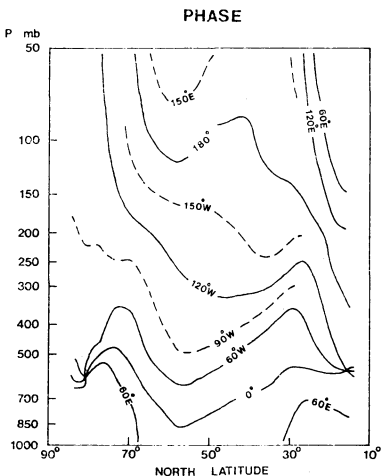
ここで、 $b=300$ mb $\bar{P}=500$ mb である。第1表に示された \hat{Q}_0 に対する東西波数1の $|\hat{Q}|$ の鉛直分布を第2図に示す。また、地上風 \bar{u}_s に対しては、Held (1983) と同一の南北分布を用いた。その他の定数の値および引用先は第1表にまとめられている。これ等はいずれも Huang・Gambo (1981) とほぼ同一の値である。

3. 結果

forcing がない場合の第2種地衡風運動に関する方程式 (8) は Wiin-Nielsen (1961) が指摘するように、東



第3図 ジオポテンシャル高度の振幅の鉛直子午面分布 (波数1).



第4図 第3図と同様の位相の鉛直子午面分布 (波数1).

西波数に依存しない方程式となる。forcingを与えた場合は波数依存となるが、この方程式はもともとプラネタリー波についてのみ成立する式である。従って、東西波数1について適切な解が得られない場合には波数2についても同様に適切な解が得られないことが予想される。そこで本論文では東西波数1についてのみ検討した。

第3図、第4図は、上述の計算を10°Nから4°間隔で86°Nまで行い、合成して作図した東西波数1の振幅と位相の鉛直子午面分布図である。(8)式において南北方向に関する波動解の仮定をとり除き、定常解を解い

たものでない点に注意されたい。ここで、地形および非断熱加熱のフーリエ係数 \hat{h} , \hat{Q} は、Huang・Gamboが45°Nに適用したも (ただし、これは30°Nから60°Nの平均値である) と同一の値をすべての緯度に適用した。

第3図によると、振幅は対流圏においては40°~50°N、成層圏においては50°~60°Nで最大となる。成層圏における振幅の最大は極夜ジェット的位置と一致する。18°N以南および、86°Nの振幅は10m以下である。波数1の応答のしかたが適用される緯度により図のように異なるのは带状流の変化によると推定される。また、振幅は700 mb付近で最小を示し、高さとともに増大し、図には示されていないが、高度約40 kmで最大(約400m)に達する。45°Nの100 mb付近には振幅の節構造が現れているが明瞭でない。振幅のこのような鉛直子午面分布は、観測(van Loon, et al., 1973)とほぼ一致するが、値は全体的に小さい。

一方、第4図によると、位相は高さとともに西に傾きエネルギーの上方伝播が生じていることがわかる。下部成層圏では位相は適当な傾きを示しているのに対し、中緯度の対流圏においては位相の傾きは観測されているものより急である。また、対流圏の30°Nから55°Nにかけて、位相は緯度とともに西に変化し非現実的であるが、これは(8)式において渦粘性摩擦項以外に南北微分が現れないためと推定される。高緯度および低緯度の対流圏中層には等位相線の合流が見られるが、これは観測と一致する。

上述の結果を準地衡風モデルによる結果(Huang・Gambo, 1981; Nakamura, 1976)と比較すると、対流圏中・下層における位相の傾きが大きすぎる点が最大の相違であることが指摘できる。振幅および成層圏における特徴に対し、両者の間に差異はあまり見られない。

4. まとめ

本論文では、第2種地衡風運動(プラネタリー波)に関する方程式(Burger, 1958)の東西波数1に対する定常解の特性を調べた。境界条件およびforcingとして、地形、非断熱加熱、渦粘性消散、およびニュートン冷却を与えた(Huang・Gambo, 1981)。その結果は以下のようにまとめられる。

(1) forcingに対応して、中・高緯度の成層圏に東西波数1の最大振幅が現れ、対流圏の下層に振幅の極小が形成される。振幅の値が量的に小さい点を除けば、これ

は観測によるものとはほぼ一致する。

(2) 位相は中緯度において高さとともに西に傾き、観測と一致するが、対流圏中・下層において傾きが大きすぎる。

本研究の結果を準地衡風方程式に基づく定常解 (Huang・Gambo, 1981) と比較すると次のようになる。

対流圏では波数1に対し擾乱の南北スケールが十分に大きいとの仮定が必ずしも成立しないので、準地衡風モデルとの間に差異があるが、成層圏ではこの仮定(対流圏から成層圏への波の鉛直伝播の条件と等しい)が成立するので、本研究のような Burger 近似を用いても準地衡風モデルの結果とあまり差異はない。対流圏における両者の差異は位相において著しい。

Phillips (1963) は第2種地衡風運動に関し、 β 平面近似および変数分離の仮定は不適な仮定であり、現象の南北方向の変化は複雑であると述べている。本論文で用いた方程式は Phillips の指摘を満足していないが、解の特徴は観測される特徴とほぼ一致していた。今後の、 β 平面近似を用いない研究による検証が望まれる。

謝 辞

本論文の執筆にあたり、U.S.A. ミズリー大学大気科学教室の E.C. Kung 教授にはデータおよび計算機使用に際し御便宜をはかって頂き、S.E. Mudric 教授には、多くの御助言を賜りました。深謝致します。

なお、本研究は National Science Foundation の GARP Grant NSF ATM-8108216 の援助のもとで、日米共同研究の一環として行なわれた。

文 献

- Ashe, S., 1979: A nonlinear model of the time-average axially asymmetric flow induced by topography and diabatic heating, *J. Atmos. Sci.*, **36**, 109-126.
- Burger, A.P., 1958: Scale consideration of planetary motions of the atmosphere, *Tellus*, **10**, 195-205.
- Charney, J.G., and A. Eliassen, 1949: A numerical method for predicting the perturbations of the middle latitude westerlies, *Tellus*, **1**, 38-54.
- Derome, J. and A. Wiin-Nielsen, 1971: The response of a middle latitude model atmosphere to forcing by topography and stationary heat sources, *Mon. Wea. Rev.*, **99**, 564-576.
- Dickinson R.E., 1968: A note on geostrophic scale analysis of planetary waves, *Tellus*, **20**, 548-550.
- _____, 1973: Method of parameterization for infrared cooling between altitude of 30 and 70 kilometers, *J. Geophys. Res.*, **78**, 4451-4457.
- Held, I.M., 1983: Stationary and quasistationary eddies in the extra-tropical troposphere; Theory. Large-scale dynamical processes in the atmosphere, B. J. Hoskins and R. P. Pearce, Eds., *Academic Press*.
- Huang Rong-Hui and K. Gambo, 1981: The response of a model atmosphere in middle latitude to forcing by topography and stationary heat sources, *J. Met. Soc. Japan*, **59**, 220-237.
- Matsuno, T., 1970: Vertical propagation of stationary planetary waves in the winter northern hemisphere, *J. Atmos. Sci.*, **27**, 871-883.
- Murakami, T., 1972: Equatorial stratospheric waves induced by diabatic heat sources, *J. Atmos. Sci.*, **29**, 1129-1137.
- Nakamura, H., 1976: Some problems in reproducing planetary waves by numerical models of the atmosphere, *J. Met. Soc. Japan*, **54**, 129-146.
- Phillips, N.A., 1963: Geostrophic motion, *Rev. Geophys.*, **1**, 123-176.
- Saltzman, B., 1970: Large-scale atmospheric energetics in the wavenumber domain, *Rev. Geophys. Space Phys.*, **8**, 289-302.
- Tung, K.K., and R.S. Lindzen, 1979: A theory of stationary long waves, Part I: A simple theory of blocking, *Mon. Wea. Rev.*, **107**, 714-734.
- van Loon, H., R.L. Jenne and K. Labitske, 1973: Zonal harmonic standing waves, *J. Geophys. Res.*, **78**, 4463-4471.
- Winn-Nielsen A., 1961: A preliminary study of the dynamics of transient planetary waves in the atmosphere, *Tellus*, **13**, 320-333.
- _____, and J. Sela, 1971: On the transport of quasigeostrophic potential vorticity, *Mon. Wea. Rev.*, **99**, 447-459.