

昇華係数・熱適合係数を考慮した球形の 氷晶の成長について*

岩井 邦中**

要 旨

駒林 (1975) によって示された昇華係数・熱適合係数を考慮した式をもとにして球形の氷晶の成長速度、表面温度、周囲の温度場、拡散場等を表す式を導いた。成長速度の式は Fukuta・Walter (1970) によって与えられた式と一部の定数をのぞいて形式的には完全に一致した。

-15°C, 水飽和の条件で成長速度を計算したところ、昇華係数・熱適合係数を考慮すると、ある気圧以下では気圧が低くなると成長速度が小さくなる結果が得られた。一方、従来の拡散律速の式では低圧になるほど成長速度は大きくなる。

小林ダイアグラムにおける水飽和の過飽和量を検討した結果、昇華係数が小さく、粒子半径が小さいときには水飽和の過飽和量は樹枝状結晶が成長する領域に拡がることわかった。

1. はじめに

成長しつつある雪結晶の表面温度 T_s は潜熱の放出のため、結晶の表面から十分離れたところの気温 T_∞ より高くなる。したがって T_s における飽和水蒸気密度 C_s は T_∞ における飽和水蒸気密度 C_0 よりも大きくなる。付録Aに、Mason (1971) によって示されている氷晶の成長速度と表面温度およびその温度における飽和水蒸気密度を筆者が一部補足して示している。

付録Aに示した式は結晶表面に接している空気中の水蒸気密度が結晶の表面における温度での飽和水蒸気密度に等しいと仮定して論じられたものである。これを熱力学的局所平衡の仮定とよんでいる。しかし、成長しつつある場合や蒸発しつつある場合にはこの仮定は成立しないと考えられ、結晶表面近傍において、水蒸気分子と空気分子の気体運動論的な取り扱いが必要となる。このときには昇華係数と熱適合係数が導入され、蒸気密度や温度について飛躍係数あるいは飛躍距離とよばれる長さの次元をもつ量が出てくる。

昇華係数 α は単位時間に結晶表面をたたく蒸気分子が実際に結晶にくっつく割合を示す量である。熱適合係数 γ は空気分子が空気の温度と異なっている結晶に衝突して、はね返るときにどの程度、結晶の温度に適合しているかを示す量であり、次の式で与えられる。

$$\gamma = \frac{T' - T_{1S}}{T_{2S} - T_{1S}} \dots \dots \dots (1)$$

ここで T_{1S} は結晶に接する空気の温度、 T_{2S} は結晶の表面温度、 T' は、はね返った空気分子の温度である。

Fukuta (1969) は氷晶の成長速度の実験を行い、氷晶が小さいときは、付録Aに示した拡散律速の成長速度の式で表されるより、成長速度が小さくなることを示した。そして彼は、昇華係数の関数であろう1より小さい未知の因子を従来式に導入する必要があることを提唱した。

Kobayashi (1961) によると樹枝状の雪結晶は水飽和よりかなり高い過飽和度で成長することになっている。天然の雪結晶はせいぜい水飽和で成長すると考えられることから、Iwai (1983) は結晶表面における成長カイネティクスを考慮して、小林ダイアグラムの水飽和の過飽和量を検討し直す必要があることを述べた。この論文では昇華係数や熱適合係数をパラメータとして定量的に水飽和の過飽和量の検討も行う。

昇華係数と熱適合係数を考慮した球形粒子の成長速度

* On the growth of spherical ice crystal taking the sublimation and thermal accomodation coefficient into consideration.

** Kunimoto Iwai, 信州大学教育学部地学教室。

——1984年6月26日受領——

——1984年11月26日受理——

については Fukuta と Walter (1970) の研究がある。しかし、その論文では成長しつつある粒子の表面温度や蒸気密度について解析的な表現がなされていない。また周囲の気圧をかえることによって成長速度や表面温度がどのように変わるか等には触れていない。

ここでは駒林 (1975) によって与えられた式の一部を改訂して得られた式をもとにして、球形粒子の成長速度や表面温度等について、数値計算した結果を述べる。

2. 昇華係数と熱適合係数を考慮した球形粒子の成長速度、表面温度等について

2.1. 基礎方程式

水蒸気の体積拡散、放熱、昇華係数と熱適合係数を考慮したほぼ球形の結晶の成長については駒林 (1975) により、詳しく解説されており (208式)、ここで示す基礎方程式はほんの一部をのぞいて、すべてそれによっている。特に球形粒子として扱うため、球面調和関数で表されている摂動項がないだけ式が簡単化されている。

水蒸気の体積拡散および空気中における熱伝導は定常状態とすると、それらを支配する方程式および境界条件は次のように与えられる。

$$\nabla^2 C = 0 \dots\dots\dots(2)$$

C: 水蒸気密度

$$\nabla^2 T_1 = 0 \dots\dots\dots(3)$$

T₁: 空気の温度

$$\nabla^2 T_2 = 0 \dots\dots\dots(4)$$

T₂: 粒子の温度

境界条件として

$$r \rightarrow \infty \text{ のとき } C = C_\infty \dots\dots\dots(5)$$

C_∞: 結晶から十分離れたところでの水蒸気密度

$$r \rightarrow \infty \text{ のとき } T_1 = T_\infty \dots\dots\dots(6)$$

T_∞: 結晶から十分離れたところでの気温

$$r \rightarrow a \text{ のとき } C = C_{1S} \dots\dots\dots(7)$$

a: 氷球の半径

C_{1S}: 結晶に接している空気中の水蒸気密度

$$r \rightarrow a \text{ のとき } T_1 = T_{1S} \dots\dots\dots(8)$$

T_{1S}: 結晶に接している空気の温度

粒子の表面での水蒸気の連続の式として

$$D \left(\frac{\partial C}{\partial r} \right)_a = \lambda (C_{1S} - C_{2S}) \dots\dots\dots(9)$$

D: 空気中の水蒸気の拡散係数

C_{2S}: 結晶の表面温度 T_{2S} における飽和水蒸気密度

$$\lambda = \alpha \left\{ \frac{RT_{1S}}{2\pi M_w} \right\}^{1/2} = \alpha \left\{ \frac{R_v T_{1S}}{2\pi} \right\}^{1/2} \dots\dots\dots(10)$$

α: 昇華係数, R: 普遍ガス定数

M_w: 水蒸気の分子量, R_v = R/M_w

粒子の表面での熱の連続の式として

$$-k_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial r} \right)_a = \varepsilon (T_{2S} - T_{1S}) \dots\dots\dots(11)$$

k₁: 空気の熱伝導率

T_{2S}: 結晶表面の温度

$$\varepsilon = C_p \rho_a \gamma \left\{ \frac{RT_{1S}}{2\pi M_a} \right\}^{1/2} = C_p \rho_a \gamma \left\{ \frac{R_a T_{1S}}{2\pi} \right\}^{1/2} \dots\dots\dots(12)$$

C_p: 空気の定圧比熱, ρ_a: 空気の密度

γ: 熱適合係数, M_a: 空気の分子量, R_a = R/M_a

(10) 式と (12) 式に出てくる T_{1S} は未知数であり、これから解かれる量であるが T_{1S} ≈ T_∞ であるので(10)式 (12) 式の中の T_{1S} に限り T_∞ で近似する。すなわち λ と ε を次のようにおく。

$$\lambda = \alpha \left\{ \frac{R_v T_\infty}{2\pi} \right\}^{1/2} \dots\dots\dots(10')$$

$$\varepsilon = C_p \rho_a \gamma \left\{ \frac{R_a T_\infty}{2\pi} \right\}^{1/2} \dots\dots\dots(12')$$

(9) 式 (11) 式を書き替えると次のようになる。

$$\left(\frac{\partial C}{\partial r} \right)_a = \frac{C_{1S} - C_{2S}}{D/\lambda} = \frac{C_{1S} - C_{2S}}{S_D} \dots\dots\dots(9')$$

$$S_D = D/\lambda \dots\dots\dots(13)$$

S_D は長さの次元をもち、水蒸気密度の飛躍距離あるいは飛躍係数とよばれる。

$$-\left(\frac{\partial T_1}{\partial r} \right)_a = \frac{T_{2S} - T_{1S}}{k_1/\varepsilon} = \frac{T_{2S} - T_{1S}}{S_T} \dots\dots\dots(11')$$

$$S_T = k_1/\varepsilon \dots\dots\dots(14)$$

S_T は S_D と同様、長さの次元をもち、温度の飛躍距離あるいは飛躍係数とよばれる (甲藤好郎, 1980)。

α = 1, γ = 1 とすると、S_D, S_T はそれぞれ、空気中における水蒸気分子および空気分子の平均自由行程の大きさである。周囲の圧力が低下すると S_D は拡散係数が圧力に逆比例して増加することにより大きくなり、S_T は空気の密度が減少することにより大きくなる。

発生した熱の輸送の式として

$$L_S \lambda (C_{1S} - C_{2S}) = \varepsilon (T_{2S} - T_{1S}) + k_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial r} \right)_a \dots\dots\dots(15)$$

L_S: 昇華の潜熱, k₂: 氷の熱伝導率

$$C_{2S} = C_0 \{ 1 + \beta (T_{2S} - T_{1S}) \} \cdot K \dots\dots\dots(16)$$

$$\beta = \frac{1}{C_0} \frac{\partial C_0}{\partial T} \div \frac{1}{T_\infty} \left(\frac{L_S}{R_v T_\infty} - 1 \right) \dots\dots\dots(17)$$

$$K = \exp \left\{ \frac{2\sigma}{\rho_l R_v T_\infty a} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

σ : 氷の表面張力, ρ_l : 氷の密度

(16) 式は結晶の表面における飽和水蒸気密度を T_∞ における飽和水蒸気密度 C_0 で Taylor 展開して 1 次の微係数までとり, さらに Kelvin の係数 K をかけたものである。

(17) 式は Clausius-Clapeyron の式に相当する。

氷球の成長速度は

$$\rho_s \frac{da}{dt} = \lambda(C_{1S} - C_{2S}) \dots\dots\dots(19)$$

ρ_s : 球粒子のバルクの密度

2.2. 成長速度, 表面温度等の式の導出

(2), (3), (4) 式のラプラスの方程式を球対称の条件下で解き, (5), (6) 式の境界条件および氷球の中心 ($r=0$) で温度が有限になる条件を入れると, それぞれの解は次の式で表される。

$$C = \frac{A_1}{r} + C_\infty \dots\dots\dots(20)$$

$$T_1 = \frac{B_1}{r} + T_\infty \dots\dots\dots(21)$$

$$T_2 = B_2 \dots\dots\dots(22)$$

ここで A_1, B_1, B_2 はそれぞれ積分定数で他の境界条件から定まる。(22) 式より, 氷球内部の温度は一定になり, B_2 は結晶表面の温度 T_{2S} に等しくなる。したがって (15) 式の右辺の第 2 項は 0 となる。(7) 式と (20) 式, (8) 式と (21) 式より

$$C_{1S} = \frac{A_1}{a} + C_\infty \dots\dots\dots(23)$$

$$T_{1S} = \frac{B_1}{a} + T_\infty \dots\dots\dots(24)$$

(9) 式と (20) 式より

$$-\frac{D}{a^2} A_1 = \lambda(C_{1S} - C_{2S}) \dots\dots\dots(25)$$

(11) 式と (21) 式より

$$\frac{k_1 B_1}{a^2} = \varepsilon(T_{2S} - T_{1S}) \dots\dots\dots(26)$$

(15), (25), (26) 式より

$$L_S \lambda (C_{1S} - C_{2S}) = \varepsilon(T_{2S} - T_{1S}) = \frac{k_1 B_1}{a^2} \dots\dots(27)$$

(25) 式と (27) より

$$B_1 = -\frac{L_S D}{k_1} A_1 \dots\dots\dots(28)$$

(25), (23), (27) 式より

$$C_{2S} = \frac{A_1}{a} \left(1 + \frac{S_D}{a}\right) + C_\infty \dots\dots\dots(29)$$

(16), (26), (28) 式より

$$C_{2S} = C_0 \left(1 - \beta S_T \frac{L_S D}{k_1} \cdot A_1\right) \cdot K \dots\dots\dots(30)$$

(29), (30) 式より A_1 を求めると

$$A_1 = -\frac{a(C_\infty - C_0 K)}{\left(1 + \frac{S_D}{a}\right) + C_0 \frac{L_S D}{k_1} \frac{K}{T_\infty} \left(\frac{L_S}{R_v T_\infty} - 1\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{S_T}{a}\right)} \cdot \frac{a(S-K)}{\frac{1}{C_0} \left(1 + \frac{S_D}{a}\right) + \frac{L_S D}{k_1} \frac{K}{T_\infty} \left(\frac{L_S}{R_v T_\infty} - 1\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{S_T}{a}\right)} \dots\dots\dots(31)$$

$S = C_\infty / C_0$ で飽和度である。

この A_1 を用い, $T_{1S}, T_{2S}, C_{1S}, C_{2S}$ を求めると次のようになる。

$$T_{1S} = T_\infty + \frac{L_S D}{k_1} \cdot \frac{S-K}{\frac{1}{C_0} \left(1 + \frac{S_D}{a}\right) + \frac{L_S D}{k_1} \frac{K}{T_\infty}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{L_S}{R_v T_\infty} - 1\right) \left(1 + \frac{S_T}{a}\right)} \dots\dots(32)$$

$$T_{2S} = T_\infty + \frac{L_S D}{k_1} \cdot \frac{(S-K) \left(1 + \frac{S_T}{a}\right)}{\frac{1}{C_0} \left(1 + \frac{S_D}{a}\right) + \frac{L_S D}{k_1} \frac{K}{T_\infty}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{L_S}{R_v T_\infty} - 1\right) \left(1 + \frac{S_T}{a}\right)} \dots\dots(33)$$

$$C_{1S} = C_\infty - \frac{S-K}{\frac{1}{C_0} \left(1 + \frac{S_D}{a}\right) + \frac{L_S D}{k_1} \frac{K}{T_\infty} \left(\frac{L_S}{R_v T_\infty} - 1\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{S_T}{a}\right)} \dots\dots\dots(34)$$

$$C_{2S} = C_\infty - \frac{(S-K) \left(1 + \frac{S_D}{a}\right)}{\frac{1}{C_0} \left(1 + \frac{S_D}{a}\right) + \frac{L_S D}{k_1} \frac{K}{T_\infty} \left(\frac{L_S}{R_v T_\infty} - 1\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{S_T}{a}\right)} \dots\dots\dots(35)$$

Maxwell 型は (32)~(35) 式で飛躍距離 S_D, S_T を 0 にしたときであり, このとき $T_{1S} = T_{2S} = T_S, C_{1S} = C_{2S} = C_S$ になって付録 A で示した (A 5), (A 6) 式に一致する。

(34) 式 (35) 式を (19) 式に代入すると氷球の半径の成長速度は次の式で表される。

$$\rho_s \frac{da}{dt} = \frac{1}{a} \frac{S-K}{\frac{1}{C_0 D} \left(1 + \frac{S_D}{a}\right) + \frac{L_S}{k_1} \frac{K}{T_\infty}} \cdot \left(\frac{L_S}{R_v T_\infty} - 1 \right) \left(1 + \frac{S_T}{a} \right) \dots (41)$$

$$T_1(r) = T_\infty + \frac{a}{r} \frac{L_S D}{k_1} \frac{S-K}{\frac{1}{C_0} \left(1 + \frac{S_D}{a}\right) + \frac{L_S D}{k_1} \frac{K}{T_\infty}} \cdot \left(\frac{L_S}{R_v T_\infty} - 1 \right) \left(1 + \frac{S_T}{a} \right) \dots (42)$$

本論文では -15°C 、水飽和における成長速度を主に計算している。このとき S は 1.158 である。 K は a が $0.5 \mu\text{m}$ より大きいときは 1 とおけるので 1 とおくと (36) 式は次のようになる。

$$\frac{da}{dt} = \frac{S-1}{\rho_s(Aa+B)} \dots (37)$$

ここで A, B はそれぞれ次の通りである。

$$A = \frac{1}{C_0 D} + \frac{L_S}{k_1 T_\infty} \left(\frac{L_S}{R_v T_\infty} - 1 \right) \dots (38)$$

$$B = \frac{S_D}{C_0 D} + \frac{L_S}{k_1 T_\infty} \left(\frac{L_S}{R_v T_\infty} - 1 \right) \cdot S_T \dots (39)$$

(37) 式は簡単に積分でき、 a は次の式で表される。

$$a = \frac{-B + \sqrt{B^2 + A \left\{ \frac{2(S-1)}{\rho_s} \cdot t + A a_0^2 + 2 B a_0 \right\}}}{A} \dots (40)$$

a_0 : 初期の半径

(36) 式は Fukuta と Walter (1970) によって与えられた式と一部の定数をのぞいて形式的には全く同じである。異なっている点は (12) 式の右辺にある定圧比熱 C_p を $C_0 + 1/2 R_a$ にとり、(36) 式の分母の第 2 項のはじめの a の中の 1 をとったものである。ここで C_0 は空気定積比熱である。

Fukuta と Walter は質量の成長速度で記述していたので解析解が示されていないが半径の成長速度になおすと (40) 式の解析解が得られる。これは Carstens (1972) によっても指摘されている。 Choularton と Latham (1977) は Fukuta と Walter の式をもとに (40) 式に相当する式を導き、その式を用いて、球形氷晶の蒸発速度の実験より氷の昇華係数を算定した。

拡散律速の Maxwell の式は S_D, S_T を粒子半径 a に比べて無視したときにあたり、このとき (36) 式は付録 A の (A 4) 式に一致する。

次に氷球のまわりの水蒸気の拡散場と温度場は (20) 式 (21) 式と (31) 式 (28) 式より次のように与えられる。

$$C(r) = C_\infty - \frac{a}{r} \frac{S-K}{\frac{1}{C_0} \left(1 + \frac{S_D}{a}\right) + \frac{L_S D}{k_1} \frac{K}{T_\infty}} \dots$$

3. 結果

3.1. Maxwell 型の水飽和の過飽和量の気圧依存性および成長速度

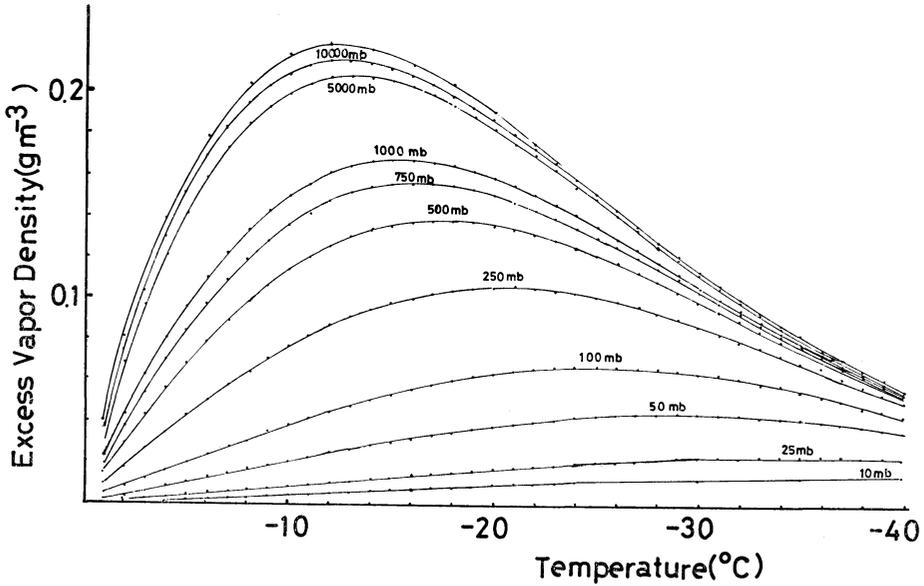
拡散律速の Maxwell 型のときの水飽和の過飽和量 $\Delta C = C_\infty - C_s$ の気圧依存性を温度の関数として表したものを第 1 図に示す。図からわかるように、水飽和の過飽和量は気圧によって変化し、気圧が低いほど小さくなる。また気圧が低いほどその極大の温度は低温側にずれる。これは低圧になるほど拡散係数が増加し、成長速度が大きくなるため表面温度 T_s が高くなり、その結果、表面での飽和蒸気密度 C_s が大きくなって、過飽和量 $C_\infty - C_s$ が小さくなるためである。

第 2 図に -15°C 、水飽和の条件下での Maxwell 型の成長速度を示す。パラメータは気圧である。初期の大きさを $0.75 \mu\text{m}$ にとり、316 秒までの結果を示している。図からわかるように成長速度は気圧が低いほど大きい。第 1 図に示したように低圧になるほど水飽和の過飽和量 (ΔC) は減少するが拡散係数の増加の割合の方が大きいいため、 $D \cdot \Delta C$ は低圧ほど大きくなる。Maxwell 型の成長速度は $D \cdot \Delta C$ の平方根に単純に比例するため低圧になるほど成長速度が大きくなる。

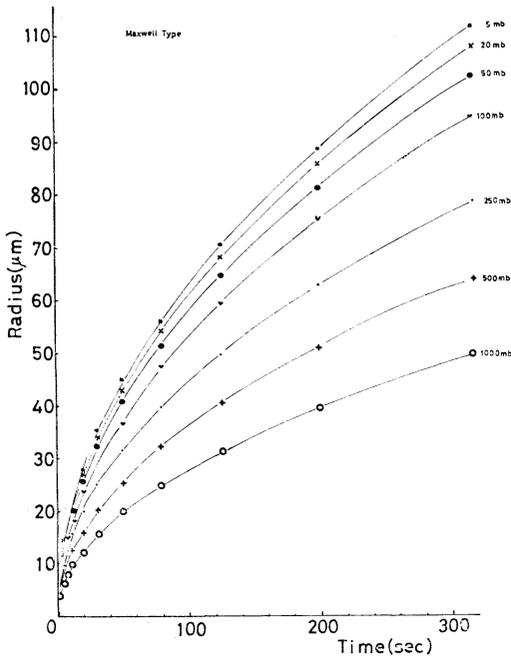
3.2. 昇華係数・熱適合係数を考慮したときの成長速度

第 3 図に昇華係数 α 、熱適合係数 γ を 1 としたときの -15°C 、水飽和における成長速度を示す。パラメータは周囲の気圧である。100 mb までは Maxwell 型とほぼ一致しているが 50 mb 以下では Maxwell 型に比べて成長速度が小さくなっている。特に半径の小さい初期段階ではこの傾向が目立っている。これは、半径が小さく、低圧のときは S_D, S_T が a に比べて無視できないためである。上の結果から、結晶の表面をたたく分子が全部くっつくとしても、それは Maxwell 型を意味するものではないことがわかるだろう。

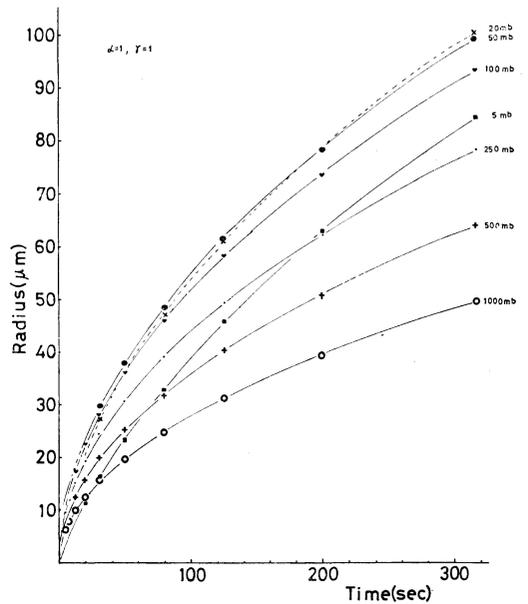
第 4 図に $\alpha = 0.014, \gamma = 1$ のときの成長速度を示す。全体として、 $\alpha = 1$ のときに比べて成長速度が小さくなっているが傾向としては $\alpha = 1$ の場合と同様に、低圧に



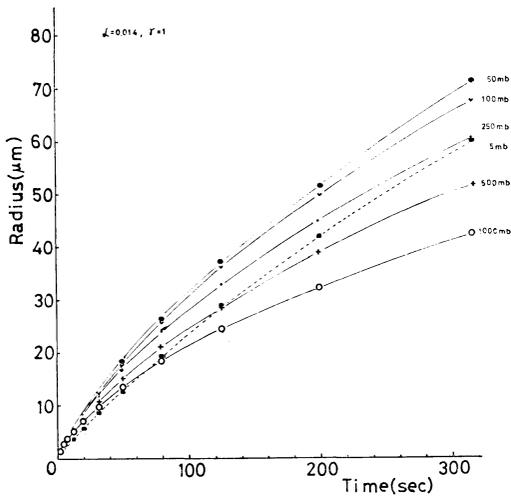
第1図 Maxwell 型で成長するときの水飽和の過飽和量 $C_{\infty} - C_s$ (A6 式による) の圧力依存性。最上部の線は同じ温度の過冷却水と氷の飽和蒸気密度差。



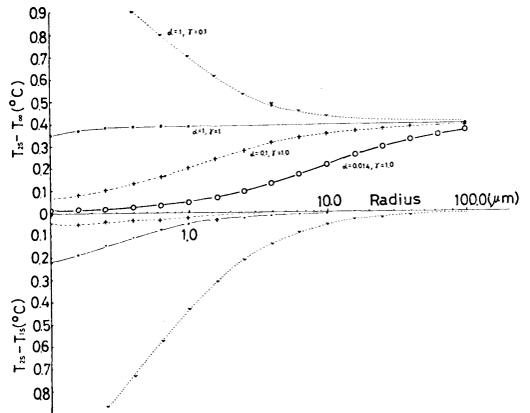
第2図 Maxwell 型の気圧をかえたときの -15°C 水飽和における半径の時間変化 ((37)式で $B=0$ としたとき)。



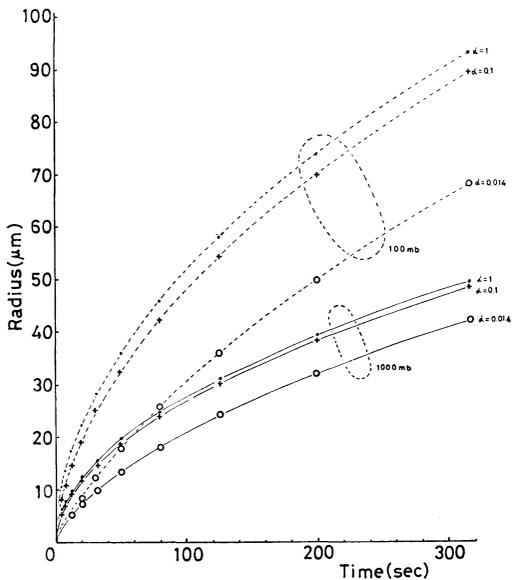
第3図 $\alpha=1, \gamma=1$ のときの -15°C 、水飽和における半径の時間変化。



第4図 $\alpha=0.014, \gamma=1$ のときの -15°C , 水飽和における半径の時間変化.



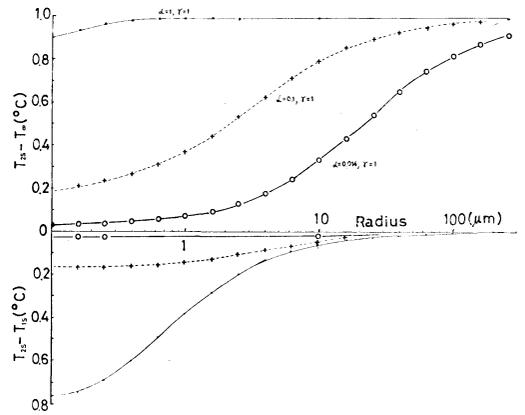
第6図 1,000 mb, -15°C , 水飽和で成長する水球の表面温度と周囲の温度差 $T_{2S}-T_\infty$ および温度の飛躍 $T_{2S}-T_{1S}$ の水球の半径による違い.



第5図 1,000 mb, 100 mb の気圧下での -15°C , 水飽和における半径の時間変化. α をパラメータにしている.

なると成長速度が小さくなっている.

第5図に 1,000 mb と 100 mb の気圧下で -15°C , 水飽和での成長速度を示す. $\gamma=1$ とし, α をパラメータとしている. 1,000 mb のとき, $\alpha=1$ と 0.014 では昇華係数が70倍異なっているにもかかわらず成長速度には



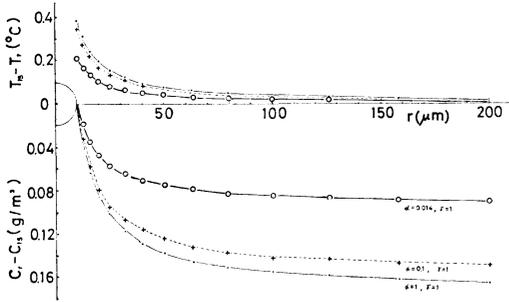
第7図 第6図と同様であるが 250 mb の場合.

それほど差はない. 100 mb のときは全体として成長速度が大きいため昇華係数の違いによる成長速度の差が大きくなっているようにみえる.

3.3. 表面温度について

第6図に 1,000 mb, -15°C , 水飽和で成長するときの結晶の表面温度 T_{2S} と周囲の温度 T_∞ との差および温度と飛躍を表す T_{1S} との差を水球の半径の関数として表したものを示す.

α が小さく, 半径が小さいときは結晶の表面温度と周囲の温度との差は小さい. すなわち, 結晶の表面温度は周囲の温度とほぼ等しい. これは α が小さく, 半径が小さいときは S_D, S_T が a に比べて無視できないため,



第8図 1,000 mb, 15°C, 水飽和における半径 10 μm の氷球のまわりの温度場と拡散場。

成長速度が小さくなるからである。α=1, γ=1 のときは Maxwell 型とほぼ一致しており、表面温度は半径にほとんどよらない。

α=1, γ=0.1 の場合、半径が小さいとき、熱が逃げにくいことから表面温度は周囲に比べてかなり高くなる。半径が 100 μm より大きくなると、α によらないで Maxwell 型に近づく。

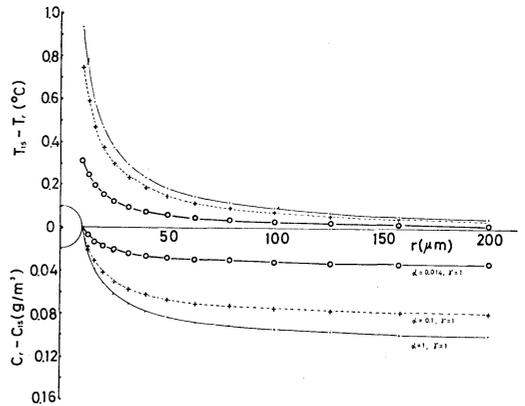
第7図に第6図と同様であるが 250 mb の例を示す。1,000 mb のときに比べて、拡散係数が大きくなるため成長速度が大きくなるので、表面温度 T_{2S} は周囲の温度 T_{∞} よりかなり高くなる。α=1, γ=1 のとき、温度飛躍 $T_{2S}-T_{1S}$ は半径が小さいところでもかなり大きい。これは気圧が低くなったことにより、 S_D, S_T が α に比べて無視できなくなったためである。α=0.014 の場合も S_D, S_T は α に比べて無視できないが $T_{2S}-T_{1S}$ は大きくない。これは成長速度が小さいので、もともと T_{2S} が高くないためである。半径が 200 μm よりも大きくなると、α によらないで Maxwell 型に近づく。

3.4. 氷球のまわりの温度場と拡散場

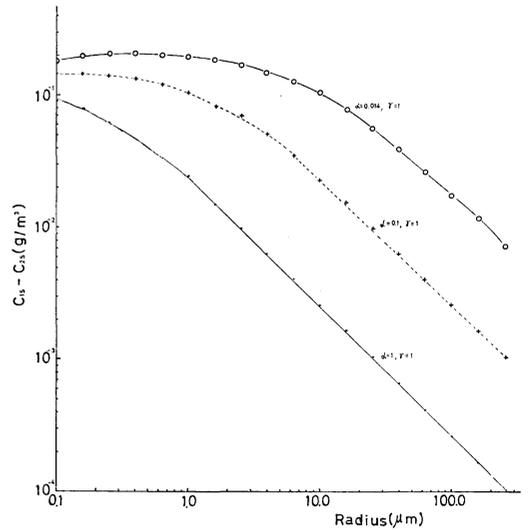
第8図に 1,000 mb, -15°C, 水飽和のときの半径 10 μm の氷球のまわりの温度場と拡散場を α をパラメータとして表す。 T_r, C_r は中心から r の距離の気温および水蒸気密度である。

α=0.014 のときは α=1.0 のときに比べて、温度勾配も水蒸気密度勾配も小さい。中心から約 100 μm 離れると気温も水蒸気密度も無限遠の値に近い。

第9図に第8図と同様であるが 250 mb のときの例を示す。1,000 mb のときに比べて温度勾配は大きくなり、水蒸気密度勾配は小さくなっている。水蒸気密度差が 1,000 mb のときに比べて小さいにもかかわらず第3図、第4図で示したように 250 mb での成長速度が大きい



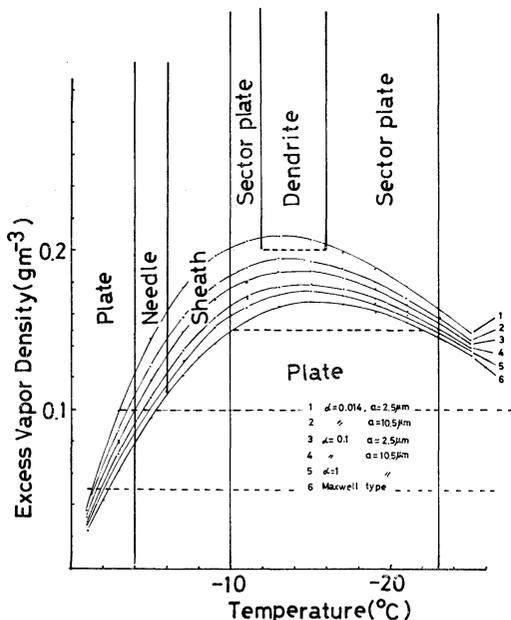
第9図 第8図と同様であるが 250 mb の場合



第10図 1,000 mb, -15°C, 水飽和で成長している氷晶の水蒸気密度飛躍 $C_{1S}-C_{2S}$ の半径による違い。昇華係数をパラメータとしている。

は拡散係数が4倍大きくなっているためである。

第10図に 1,000 mb, -15°C, 水飽和のときの水蒸気密度飛躍 $C_{1S}-C_{2S}$ を半径の関数として表す。α=0.014 のときは半径が数 μm の大きさまで $C_{1S}-C_{2S}$ は大きさにほとんどよらない。数 μm より大きくなると、大きさとともに減少している。α=1 のときは 0.1 μm より、ほぼ単調に減少している。 $C_{1S}-C_{2S}$ は α が小さいほど大きい。半径が大きくなると $C_{1S}-C_{2S}$ は小さくなる。すなわち $C_{1S} \approx C_{2S}$ になり、Maxwell 型に近づく。



第11図 1,000 mb, 水飽和で成長する氷球の過飽和量 $C_{\infty}-C_{2S}$ の温度変化. 昇華係数と半径をパラメータとしている. 小林ダイアグラムの結晶形を一部分示している.

3.5. 昇華係数・熱適合係数を考慮したときの水飽和の過飽和量

第11図に 1,000 mb における水飽和のときの過飽和量 $C_{\infty}-C_{2S}$ を昇華係数と粒子の大きさをパラメータとし、温度の関数として表したものを示す. $\alpha=0.014$, $a=2.5 \mu\text{m}$ のときには -15°C で過飽和量は $0.2 \text{ gr}/\text{m}^3$ をこえる. 図には Kobayashi (1961) による結晶形も示している.

4. 議論

拡散律速の Maxwell 型と昇華係数・熱適合係数を考慮した成長速度を比較すると次のような違いがあった. たとえ α が最大の 1 であり, $\gamma=1$ としても, ある気圧以下では半径の小さい段階で, Maxwell 型に比べて昇華係数・熱適合係数を考慮した成長速度は小さくなる. これは気圧が低くなると S_D , S_T が半径に比べて無視できなくなり, (36) 式で示した式の分母が大きくなるためである. 言い方をかえると, 昇華係数・熱適合係数を考慮すると拡散律速の Maxwell 型に比べて成長に対し

て表面での抵抗が大きくなることを意味している.

Kobayashi (1958) は細い糸の上で気圧をかえて氷晶を成長させ, 70 mmHg 以下になると, 低圧になるほど成長速度が小さくなることを報告している. 彼はその解釈として成長速度は $D \cdot \Delta C$ に比例するとし, 低圧になるほど D は大きくなるがそれよりも ΔC の方が速やかに減少したためであるとした. 成長速度が $D \cdot \Delta C$ に比例するとの考えは暗黙のうちに Maxwell 型を考えていることになる. Maxwell 型の場合, 第 2 図に示したように成長速度は低圧になるほど大きくなる. したがって, Maxwell 型を仮定する限り, D の増加より ΔC の減少の方が大きいという Kobayashi の解釈には無理があるように思える. すでに述べたように, 昇華係数・熱適合係数を考慮するとある気圧以下では低圧になるほど成長速度が小さくなる. したがって, (36) 式で示した昇華係数・熱適合係数を考慮した成長速度の式を用いると, Kobayashi (1958) による実験結果を説明するのに都合がよい.

なお, 氷晶が熱伝導率のよい下地の上で成長する場合は, 昇華で発生した熱は空気中へ伝導で逃げるよりも下地を通して逃げる方が大きくなり, (36) 式の分母の第 2 項は 0 に近くなる. このときはここで示さないが成長速度は気圧が低いほど大きくなる. この場合, さらに低圧になると拡散係数 D が大きくなり, (36) 式は次のようになる.

$$\rho_S \frac{da}{dt} = \alpha \cdot C_0 (S - K) \sqrt{\frac{R_0 T_{\infty}}{2\pi}} \dots\dots\dots(43)$$

これは, これまでよく知られている自由分子領域における成長速度である. Isono と Iwai (1971) は銅の上で低圧の条件下で氷晶を成長させ, (43) 式をもとにして昇華係数 α の値を求めた. それによると $-50^{\circ}\text{C} \sim -80^{\circ}\text{C}$ で α は約 0.07 であった.

昇華係数の値はこれまでの測定では 0.001 から 1 までの広範囲にわたっており, まだ確定した値はない (Chou-larton・Latham, 1977; Pruppacher・Klett, 1978: により昇華係数の値がまとめられている). 最近, Kuroda と Gonda (1984) は 250 torr と 0.3 torr の圧力の下での成長速度の実験から -30°C での昇華係数を算出し, 昇華係数は気圧や過飽和度, 結晶面によっても異なることを示している.

1,000 mb, -15°C で α の値が約 70 倍異なっている 1 と 0.014 の場合, 成長速度にそれほど差がないのは, $\alpha=0.014$ のときには $\alpha=1$ のときに比べて第10図で示したように水蒸気密度飛躍 $C_{1S}-C_{2S}$ が大きくなり, 成

長速度は両者の積である $\alpha \cdot (C_{1S} - C_{2S})$ に比例するからである。

第11図に昇華係数を考慮したときの 1,000 mb 水飽和の過飽和量を示した。 $\alpha = 0.014$, $\gamma = 1$, 半径 $2.5 \mu\text{m}$ のとき、水飽和の線は小林ダイアグラムで明らかに樹枝状結晶の成長する領域に入っている。小林ダイアグラムにおける水飽和の線は Maxwell 型の場合に相当し、このときは樹枝状結晶の成長する領域とかなり開きがある。上に示したように、昇華係数と熱適合係数を導入した式を用いることによって、自然の雲の中の過飽和度はせいぜい水飽和であり、この水飽和の中で樹枝状結晶が成長する事実と実験結果のくい違いを説明することができる。

さらに針状結晶についても、 $\alpha = 0.014$ とすると水飽和で十分、成長できることになる。ここで示したものは球形の氷晶であり、樹枝状結晶や針状結晶と異なるがそれらの先端部の典率半径は小さく、半径の小さい球形氷晶と同様、表面温度は周囲の温度に近くなり、過飽和量 $\Delta C = C_\infty - C_{2S}$ が大きくなると考えられる。

なお、ここで $\alpha = 0.014$ とおいたのは Delaney 他 (1964) により得られた値を採用したことによる。粒子のまわりの温度場と拡散場で半径 $10 \mu\text{m}$ の粒子の表面から 0.1 mm 離れると無限遠の値に近くなることを示した。このことは結晶が 0.2 mm 離れると水蒸気をうばい合う相互作用が小さくなることを意味する。Iwai (1983) は二枚板結晶あるいはつづみ型結晶の二枚の板状結晶をつなぐ角柱の C-軸方向の長さが 0.2 mm をこえると、両端にある板状結晶の大きさはほぼ等しくなることを示した。そして、 0.2 mm 離れると結晶間で水蒸気をうばい合う相互作用がなくなるであろうと推定した。上で示した結果はこの推定とよく一致している。

1,000 mb と 250 mb の圧力の下での拡散場を比較した結果、250 mb においては 1,000 mb における水蒸気密度勾配より小さくなることを示した。これは Gonda (1980) が定性的に示したように拡散係数が大きくなると結晶のまわりの蒸気密度勾配が小さくなることと一致しており、拡散係数が大きいほど結晶の形態が安定化することと関連がある。

付録 A

Mason (1971) の教科書の (5.1), (5.3) および (3.9 a) 式を本論文の記号で書き直すと次のようになる。記号は付録 B にまとめて記す。

1985年2月

$$\frac{dm}{dt} = 4 \pi CD(C_\infty - C_S) \dots\dots\dots (A 1)$$

$$L_S \frac{dm}{dt} = 4 \pi C k_1 (T_S - T_\infty) \dots\dots\dots (A 2)$$

$$C_S = C_0 \left\{ 1 + \frac{1}{T_\infty} \left(\frac{L_S}{R_v T_\infty} - 1 \right) (T_S - T_\infty) \right\} \dots\dots\dots (A 3)$$

(A 1), (A 2), (A 3) 式より C_S, T_S を求め

$$m = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_S \text{ とおくと次の式が得られる。}$$

$$\rho_S \frac{da}{dt} = \frac{1}{a} \frac{S-1}{\frac{1}{C_0 D} + \frac{L_S}{k_1 T_\infty} \left(\frac{L_S}{R_v T_\infty} - 1 \right)} \dots\dots\dots (A 4)$$

$$T_S = T_\infty + \frac{L_S D}{k_1} \frac{S-1}{\frac{1}{C_0} + \frac{L_S D}{k_1 T_\infty} \left(\frac{L_S}{R_v T_\infty} - 1 \right)} \dots\dots\dots (A 5)$$

$$C_S = C_\infty - \frac{S-1}{\frac{1}{C_0} + \frac{L_S D}{k_1 T_\infty} \left(\frac{L_S}{R_v T_\infty} - 1 \right)} \dots\dots\dots (A 6)$$

付録 B

本論文で用いた記号を下に記す。

a : 氷球の半径, C : 形状因子(静電容量), C : 水蒸気密度, $C_0: T_\infty$ における飽和水蒸気密度, C_∞ : 無限遠における水蒸気密度, C_r : 中心から r の距離における水蒸気密度, C_{1S} : 結晶表面に接する空気中の水蒸気密度, $C_{2S}: T_{2S}$ における飽和水蒸気密度, C_S : Maxwell 型の際の表面の飽和水蒸気密度, C_p : 空気 の定圧比熱, C_v : 空気 の定積比熱, D : 空気中の水蒸気 の拡散係数, k_1 : 空気 の熱伝導率, k_2 : 氷 の熱伝導率, $K: \exp(2\sigma/\rho_1 R_v T_\infty a)$, L_S : 昇華の潜熱, m : 氷晶の質量, M_a : 空気 の分子量, M_w : 水蒸気 の分子量, R : 普遍ガス定数, $R_a: R/M_a$ (空気 のガス定数), $R_v: R/M_w$ (水蒸気 のガス定数), $S: C_\infty/C_0$ (飽和度), $S_D: D/\lambda$ (水蒸気密度の飛躍係数), $S_T: k_1/\epsilon$ (温度の飛躍係数), T_1 : 空気 の温度, T_2 : 氷晶の温度, T_r : 中心から距離 r の気温, T_S : Maxwell 型の際の結晶の表面温度, T_{1S} : 結晶に接する空気 の温度, T_{2S} : 結晶の表面温度, t : 時間, α : 昇華係数, $\beta: \frac{1}{C_0} \frac{\partial C_0}{\partial T} \approx \frac{1}{T_\infty} \left(\frac{L_S}{R_v T_\infty} - 1 \right)$, γ : 熱適合係数, $\epsilon: C_p \rho_a \gamma (R_a T_\infty / 2\pi)^{1/2}$, $\lambda: \alpha (R_v T_\infty / 2\pi)^{1/2}$, σ : 氷の表面張力, ρ_a : 空気 の密度, ρ_1 : 氷の密度, ρ_S : 氷球のバルクの密度。

文 献

Carstens, J.C., 1972: Comments on "Kinetics of

- hydrometeor growth from a vapor-spherical model", *J. Atmos. Sci.*, **29**, 588-591.
- Choularton, T.W. and J. Latham, 1977: Measurement of deposition coefficient for ice and its application to cirrus seeding, *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **103**, 307-318.
- Delaney, L.J., R.W. Houston and L.C. Eagleton, 1964: The rate of vaporization of water and ice, *Chem. Eng. Sci.*, **19**, 105-114.
- Fukuta, N., 1969: Experimental studies on the growth of small ice crystals, *J. Atmos. Sci.*, **26**, 522-531.
- ・L.A. Walter, 1970: Kinetics of hydrometeor growth from a vapor-spherical model, *Ibid.*, **27**, 1160-1172.
- Gonda, T., 1980: The influence of the diffusion of vapor and heat on the morphology of ice crystals grown from the vapor, *J. Crystal Growth*, **49**, 173-181.
- Isono, K.・K. Iwai, 1971: Growth rate and habit of ice crystals in air at low pressure, *J. Met. Soc. Japan*, **49**, Special Issue, 836-844.
- Iwai, K., 1983: Three-dimensional structure of plate-like snow crystals, *Ibid.*, **61**, 746-755.
- 甲藤好郎, 1980: 伝熱概論, 養賢堂, 1-453.
- Kobayashi, T., 1958: On the habit of snow crystals artificially produced at low pressure, *J. Met. Soc. Japan*, **36**, 193-208.
- , 1961: The Growth of snow crystals at low supersaturation, *Phil. Mag.*, **6**, 1363-1370.
- 駒林 誠, 1975: 雪結晶の形を表現する微分方程式 気象研究ノート, No. 123, 日本気象学会, 119-155.
- Kuroda, T. and T. Gonda, 1984: Rate determining processes of growth of ice crystals from the vapour phase, Part: Investigation of surface kinetic process, *J. Met. Soc. Japan*, **62**, 563-572.
- Mason, B.J., 1971: The physics of clouds, Clarendon Press Oxford, 1-617.
- Pruppacher, H.R. and J.D. Klett, 1978: Microphysics of clouds and precipitation, Reidel Pub. Comp., 1-714.

第3回アジア流体力学会議の開催のお知らせ

(The Third Asian Congress of Fluid Mechanics)

主催：アジア流体力学会議委員会, 第3回アジア流体力学会議組織委員会

開催日：1986年9月1日(月)～5日(金)

会場：日本都市センター

東京都千代田区平河町 2-4-1

主な分野：1. 気体力学, 2. 境界層, 3. 乱流・流れの安定性, 4. 数値流体力学, 5. 水理学・河川工学, 6. 産業における流体力学・水力機械, 7. 空力音響学・空力弾性学, 8. 熱物質輸送・燃焼, 9. 多相流・反応性流体, 10. 生理流体力学, 11. 地球流体力学・宇宙流体力学, 12. プラズマ・電磁流体力学, 13. 環境流体力学, 14. その他

日程：

予備登録締切：1985年3月31日

論文 (extended abstract) 提出締切：1985年9月30日

論文採否の通知：1985年12月

(予備登録には first circular についている用紙を使用し, 庶務高木宛郵送して下さい。論文提出に関する詳細は second circular(1985年6月発送)に掲載されます。)

登録料 20,000円 (論文集の代金を含む)。その他 banquet 8,000円, outing 2,000円を予定しています。

連絡先：予備登録宛先および circular の請求先は下記へ。

〒183 東京都府中市幸町 3-5-8

東京農工大学一般教育部 高木隆司

TEL. 0423-64-3311

(組織委員会庶務担当 高木隆司)