



Q-map (等温位面上で解析された渦位分布図)*

——その1 Q-map の原理——

二階堂 義信**

要 旨

非断熱加熱や摩擦の効果が無い大気中では温位と Ertel の渦位が気塊に固有な量として Lagrange 的な意味で保存される。従って、等温位面上で渦位を解析すると、渦位分布のパターンは気塊の動きと完全に一致した変化を見せ、大気の運動の様子が手にとるように分かる。さらに、渦位は保存量という性質のほかに、例えば準地衡風近似など風の場と温度場等をバランスさせる条件を仮定すれば、大気の運動状態を一意的に決定づける性質をもっている。このように等温位面上で解析された渦位分布図を Q-map と呼び、実際の地球大気やモデルによる予報結果に Q-map を適用したところ、必ずしも非断熱加熱や摩擦が無視できないこれらの場合でも、現象を物理的にかつ視覚的に理解するのに有効であることが分かった。

1. はじめに

われわれは大気の3次元的な天気現象を表現・理解するために天気図という2次元的な表現に頼らざるをえない。従来、天気図といえば、標準海水面での気圧分布を表した地上天気図や、ある等圧面の高度分布を表した高層天気図などが主流になっていた。これに対して、われわれが昭和60年4月下旬から昭和61年3月末日まで試験的に毎日、東アジア・西太平洋域については00Zと12Zの2枚、北半球域については00Zの1枚、計3枚を作成していた天気図(第1図)は、いくつかの等温位面上での渦位(Potential Vorticity)分布を表したもので、これをQ-mapと呼ぶ。

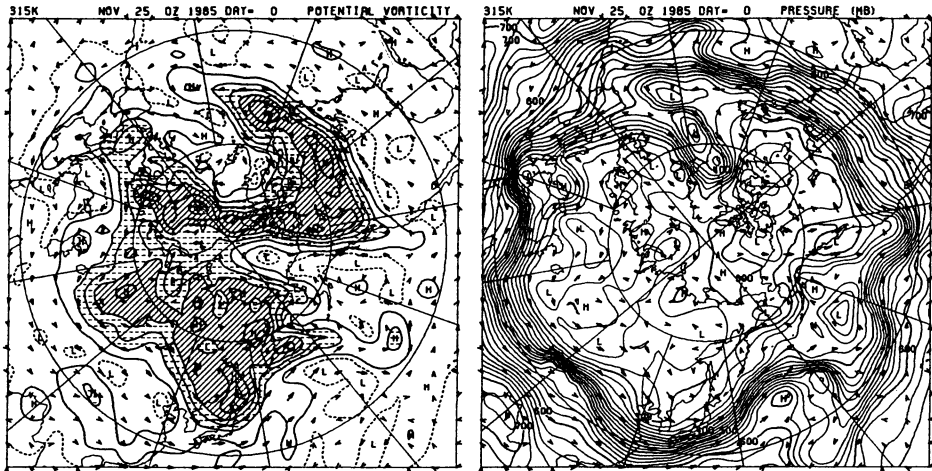
Q-map の概念自体は何も新しいものではなく、1940

年代初め Ertel (1942) や Rossby (1940) によって、adiabatic かつ frictionless の大気中(中層以上の対流圏や下部成層圏は短期間で見れば良い近似となっている。)における第3の保存量である渦位(第1, 第2の保存量は温位と比湿)という概念が考え出されて間もなく、Star and Neiburger によって初めて北米大陸の Q-map (Isentropic Potential Vorticity map) が作られている。さらに、1950年代に入ると Kleinschmidt (1950, 1951, 1955, 1957) が上部対流圏の PV anomaly (等温位面上で Potential Vorticity の強くなっているところ) という概念を用いて cyclogenesis を説明したり、Q-map の重要な基本的概念である "Invertibility Principle" (後述) を強調したりした。このように、1950年代には概念的にはほぼ完成したと思われる Q-map も、実用化には電子計算機の登場を持たなければならなかった。というのは、渦位の計算をするためには、観測で得られた指定気圧面のデータから、それらの面での温位を求め、内挿によって求める等温位面上の気圧・風速・風向・気温を

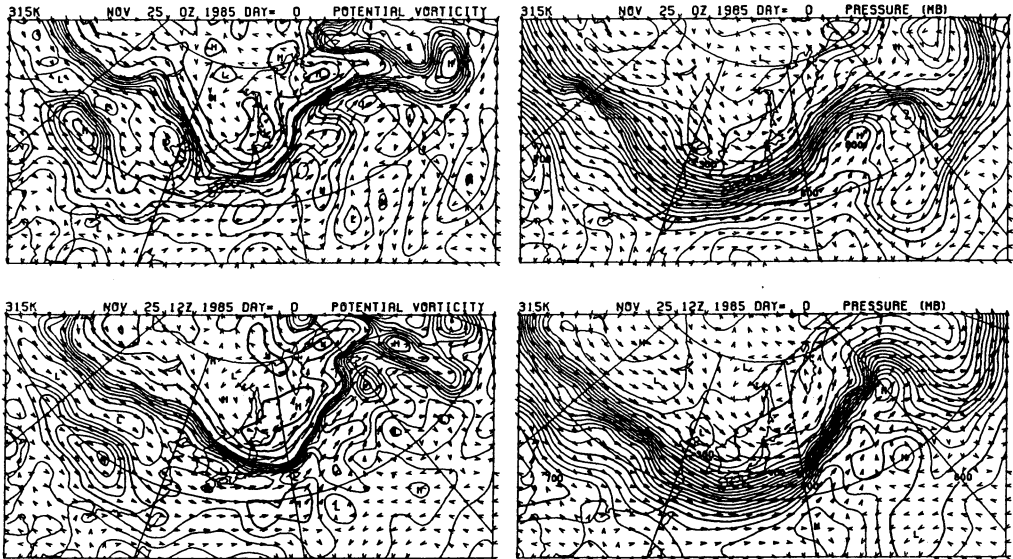
* Q-map (the potential vorticity maps analyzed on the isentropic surfaces)

** Yoshinobu Nikaidou, 気象庁予報部数値予報課、
現在 気象研究所予報研究部。

——その2 Q-map の実際——は本誌300ページから331ページ。



北半球領域 (00Z : 一日一枚)



東アジア・西太平洋域 (00Z, 12Z : 一日2枚)

第1図 試験的に毎日作成されている解析 Q-map の例

計算し、これらの要素から得た等温面上の渦度と、鉛直安定度を基にして Q-map を作るという非常に面倒な作業が要求されるからである。初めて電子計算機によって Q-map が作られたのは1964年のことであり、この時のものはかなり大雑把なものだったそうであるが、高速電子計算機と精密な客観解析が利用できる現在、Q-map は渦位の保存則を活用して、実際の気象現象の診断のみ

ならず、客観解析や数値予報モデルの quality check などにも使われようとしている。

本解説では2章で Q-map の原理について理論的な背景を、3章でわれわれが実際に作成してきた Q-map に基づいて具体的な応用例について述べてあるが、Q-map は本来視覚的に大変理解しやすいものであるから、理論にあまり興味のない読者は2章に軽く目を通しただけで

も十分に3章が理解できると思われる。

2. Q-map の原理

Adiabatic かつ frictionless を仮定した大気中では

- 温位 θ
- 渦位 (Potential Vorticity) Q

が保存される。温位 θ の保存則については基本的すぎるからここでは説明しない。一般的に対流圏上部や成層圏下部では adiabatic の良い近似が成立しているので、温位の保存性が良いが、水蒸気の凝結過程を伴う現象が起きたとき、特に比湿の大きな対流圏中層以下では温位は大気の Lagrange 的な保存量として不相当である。温位の代わりに相当温位 θ_e を使えば、この領域でも保存量とはなっているが、われわれが Q-map で温位 θ を用いる目的は単に保存量としてだけでなく、鉛直高度 z に代わる座標として温位座標系, $xy\theta$ -系を定義するためにも用いているのである。総観的規模では、大気は絶対不安定にはならないはずであるから、温位 θ は高度 z の一価関数となり鉛直座標として有効であるが、一方相当温位は湿潤な条件付き不安定領域では高度 z の多価関数となって鉛直座標としては使えない。Diabatic heating によって温位の保存性が破れている場合に Q-map がどうなるかということについては後で述べる。

2.1 渦位の保存則

次に、渦位 Q の保存則について説明する。渦位は直観的に把握しがたい物理量であるから、まずわかりやすい模式的な説明から始めよう。

2つのたがいに接近した等温位面 θ と $\theta + d\theta$ に挟まれた気柱を考える。気柱の底面積を dS 、厚さを dh 、等温位面に垂直な単位ベクトルを \mathbf{n} 、気体の密度を ρ 、絶対渦度ベクトルを $\boldsymbol{\zeta}_a$ とすると (第2図)、adiabatic である限り温位の保存性より気柱は運動しても常にその上面と下面はそれぞれ $\theta + d\theta$ と θ の等温位面上にある。したがって、

$$d\theta = |\nabla\theta| dh = \text{一定} \dots\dots\dots(1)$$

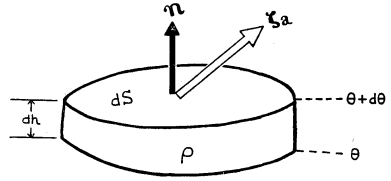
ここで、すべての物理量は物質に固定した Lagrange 的な見方をしているから、 dS 、 dh 、 \mathbf{n} 、 ρ 、 $\boldsymbol{\zeta}_a$ はすべて気柱の運動につれて変化している。

また、気体常数を R 、定圧比熱を C_p とすると、温位 θ は

$$\theta = T(P_0/P)R/C_p$$

$$P_0 = 1,000 \text{ mb}$$

と表される。気体の状態方程式



第2図 渦位保存則の説明図

$$P = \rho RT$$

とあわせて考えると、等温位面 (つまり $\theta = \text{一定}$ の面) 上では密度 ρ は気圧 P のみの関数になっている。このとき、 ρ が P のみの関数のとき循環が Lagrange 的に保存されるという Kelvin の循環の定理より、等温位面上で

$$\boldsymbol{\zeta}_a \cdot \mathbf{n} dS = \text{一定} \dots\dots\dots(2)$$

質量保存則より

$$\rho dS dh = \text{一定} \dots\dots\dots(3)$$

\mathbf{n} の定義は

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\theta}{|\nabla\theta|} \dots\dots\dots(4)$$

(2) に (3)、(4) を代入すると

$$\frac{\boldsymbol{\zeta}_a \cdot \nabla\theta}{\rho |\nabla\theta| dh} = \text{一定}$$

さらに (1) を代入すると

$$Q \equiv \frac{\boldsymbol{\zeta}_a \cdot \nabla\theta}{\rho} = \text{一定} \dots\dots\dots(5)$$

この物理量が Ertel の Potential Vorticity (渦位) と呼ばれる量で、循環の保存則のなかで、流れに伴う渦管の断面積の変化を安定度の変化に置換えたものである。

もう少し数学的に厳密に渦位の保存則を証明すると、大気の運動方程式より

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \dots\dots\dots(6)$$

ここで \mathbf{v} は大気の慣性系での速度。両辺に ∇x を掛けて渦度方程式を作ると。

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\zeta}_a}{dt} - (\boldsymbol{\zeta}_a \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{v})\boldsymbol{\zeta}_a \\ = -\nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \times \nabla P \end{aligned} \dots\dots\dots(7)$$

質量保存則の方程式より。

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \end{aligned} \dots\dots\dots(8)$$

(7), (8) より

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\zeta}_a}{\rho} \right) - \frac{(\boldsymbol{\zeta}_a \cdot \nabla)\mathbf{v}}{\rho} = \frac{\nabla\rho}{\rho^3} \times \nabla P \dots\dots\dots(9)$$

また

$$\frac{d\theta}{dt} \equiv \dot{\theta} \quad \dots\dots(10)$$

とおくと, (10) 式の両辺の gradient をとって

$$\frac{d}{dt} \nabla\theta + \nabla\mathbf{v} \cdot \nabla\theta = \nabla\dot{\theta} \quad \dots\dots(11)$$

ところで

$$[\nabla\mathbf{v} \cdot \nabla\theta]_i \equiv \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \quad (i=1, 2, 3)$$

の意味だから

(9)・ $\nabla\theta$ +(11)・ ζ_a/ρ は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta_a \cdot \nabla\theta}{\rho} \right) = \frac{\nabla\theta \cdot (\nabla\rho \times \nabla P)}{\rho^3} + \frac{\zeta_a \cdot \nabla\dot{\theta}}{\rho} \quad \dots\dots(12)$$

となる。 θ は P と ρ のみの関数だから

$$\nabla\theta \cdot (\nabla\rho \times \nabla P) = 0 \quad \dots\dots(13)$$

(12), (13) より

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta_a \cdot \nabla\theta}{\rho} \right) = \frac{\zeta_a \cdot \nabla\dot{\theta}}{\rho} \quad \dots\dots(14)$$

特に, 大気が adiabatic の時は $\dot{\theta}=0$ だから, (14) より

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta_a \cdot \nabla\theta}{\rho} \right) = 0 \quad \dots\dots(15)$$

つまり, Ertel の Potential Vorticity

$$Q \equiv \frac{\zeta_a \cdot \nabla\theta}{\rho} \quad \dots\dots(16)$$

は Lagrange 的に保存される。 気象現象のような回転流体の場合には, 絶体渦度ベクトル ζ_a よりも相対渦度ベクトル ζ を用いることの方が便利である。 また, 総観規模で見ると, 大気は hydrostatic equilibrium の状態にあると見做せるから, このとき (16) は温位座標系で次のように表すことができる。

$$Q = -g(f + \zeta_0) / \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \quad \dots\dots(17)$$

ここで, g は重力加速度, f は Coliris Parameter, ζ_0 は relative isentropic vorticity で, 等温位面上の相対渦度の鉛直成分である。 すなわち, 風ベクトル x, y の成分をそれぞれ (u, v) とすると

$$\zeta_0 \equiv \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_\theta - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_\theta \quad \dots\dots(18)$$

で定義される。

以下で示す Q-map に描かれている渦位 Q は全て, (17) 式に基づいて計算された等温位面上の渦位である。 Diabatic heating のある場合についても上と同様にして

温位座標系での Q の式を導出することができる。(14)

より

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta_a \cdot \nabla\theta}{\rho} \right) = \frac{\zeta_a \cdot \nabla\dot{\theta}}{\rho} \quad \dots\dots(19)$$

$$\frac{dQ}{dt} = Q \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} \quad \dots\dots(20)$$

ここで, $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla_\theta + \partial\dot{\theta}/\partial\theta$, $[\mathbf{v} \cdot \nabla_\theta \equiv u(\partial/\partial x)_\theta + v(\partial/\partial y)_\theta]$ であるが, われわれは Q-map を見る際には, 等温位面上の Q の動きを見るわけだから, (20) を等温位面上で見た時の表現に変えると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_\theta \right) Q = Q^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{\dot{\theta}}{Q} \right) \quad \dots\dots(21)$$

となる。 この式は, diabatic heating の効果がある時に Q-map を解釈するのに重要な式である。

渦位と言えば, 今ここで述べた Ertel の Potential Vorticity Q よりも, むしろ準地衡風の渦位 q をさすことの方が多し。 準地衡風の渦位 q は, ある点の Coliris parameter を f , 等圧面上での相対渦度を ζ , 平均場の Coliris parameter を f_0 , 温位を θ , 比容を α , geopotential の平均場からのずれを Ψ' とすると

$$q \equiv f + \zeta + f_0 \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial \Psi'}{\partial P} \right) \quad \dots\dots(22)$$

$$S = -\bar{\alpha} \frac{d(\ln \bar{\theta})}{dP} \quad \dots\dots(23)$$

で定義される。 Q と q は厳密には等しくなく, Q が大気の 3 次元的な運動に沿って完全に保存されるのに対して, q は地衡風 (2 次元的な流れ) で流した時に等圧面で保存されているに過ぎない。 q の動きが実際の大気と違っているばかりでなく, 準地衡風という概念, つまり等圧面上では大気の安定度は一定という仮定をしているため, 例えば, 後で示されている第 9 図のように圏界面付近に大きな q の値を持った気塊が存在する時, いわゆる “tropopause folding” が起こって対流圏に安定度がそれより数倍も大きい (言い換えると S の値が数倍も大きい) 成層圏の大気が侵入した状態の時には, 等圧面上で S を一定と見做して (22) 式から計算された q の値そのものが誤った値になるという問題がある。 しかし, これらの問題点はあるものの, (22) 式の定義は線形の形をしていて解析的には取り扱いやすい形をしているので, 以下の理論的な議論では Q の近似として q を用いる。

2. 2 Invertibility Principle

渦位には Lagrange 的な保存性のほかに, もう 1 つ “Invertibility Principle” という重要な性質がある。 これは, ある balance condition (例えば, 準地衡風近似と

か non-linear normal-mode initialization) を仮定すると、渦位の空間分布と境界条件を与えただけで、大気の物理的状态 (風向, 風速, 気圧, 気温等) は完全に決定できるというものである。1例として準地衡風近似の場合を考えてみよう。この場合、速度ベクトル \mathbf{v} は、鉛直方向の単位ベクトルを \mathbf{k} とすると

$$\mathbf{v} = \frac{1}{f_0} \mathbf{k} \times \nabla \Psi' \quad \dots\dots(24)$$

で表せられるから、渦度の鉛直成分 ζ は

$$\zeta = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Psi' \quad \dots\dots(25)$$

で表せられる。ここで

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)_P + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)_P$$

これを (22) に代入して変形すると

$$\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Psi' + f_0 \left[-\frac{1}{S} \frac{\partial \Psi'}{\partial P} \right] = q - f \quad \dots\dots(26)$$

(26) 式の左辺を見ると、 x, y, P のそれぞれ 2 階微分の線形結合となっている。 P を f_0/\sqrt{S} で scaling すると (26) 式の左辺は geopotential の平均場からの deviation に xyz -系の 3 次元 Laplacian を作用させたものであることがわかる。したがって (26) 式の右辺で q の分布を与えると、 Ψ' は一種の Poisson 方程式を解くことによって求められる。 xyz -系の代わりに xyz -系の場合は鉛直方向の scaling factor は N を Brunt-Väisälä frequency とすると f_0/N で表される。ただし、(26) の Poisson 方程式を解くときの境界条件は地表面付近で傾圧性のある場合や、地形効果を入れる場合には注意を要するが、ここでは省略する。 Invertibility Principle は準地衡風近似だけでなく、non-linear normal-mode initialization でも原理的には可能なようであるが、実際に行われた例はない。

(26) 式でもわかるように、一般的に Ψ' は q の分布を与えたときに Poisson 方程式の解になっているが、Laplacian には smoothing operator の作用があるので、 Ψ' の形は q の分布を空間的に smoothing したようなものになっていて、 q の分布よりも contrast が低く見にくい表現になっている。このことは、静電場の問題で類推するとよくわかる。静電場では電位 ϕ が電荷密度 ρ_e を与えたときの Poisson 方程式の解になって、それぞれ Q-map の場合の Ψ' と q に対応している。電荷密度として Dirac の δ -関数的な点電荷を与えても、電位は滑らかな、ひろがりをもった分布をしているのはよく知られた事実である。同様に、あるはっきりとした q の分布

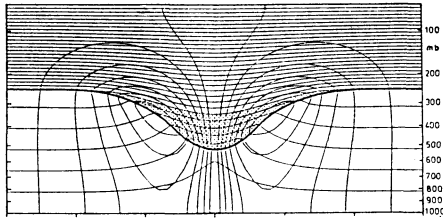
をしている大気の状態も通常の天気図では geopotential Ψ を通して見ているため、あたかもピントのボケた写真を眺めているのと同じようなことになっている。Q-map が通常の天気図よりも見やすい理由の 1 つがここにある。

2.3 IPV anomaly

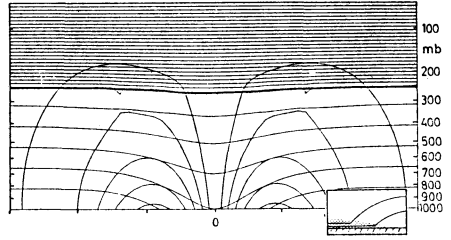
(17) 式からわかるように、大気中に何ら perturbation がない時 (基本場) でも、 Q は一様でなく、Coliris parameter f の緯度による変化に従って高緯度になるほど大きな値になる。もし、この基本場の状態を Q-map で表せば極を中心として同心円状に Q の等値線が描けるはずだが、実際の場合には第 1 図に示されているように Q の等値線は極を中心とした同心円ではなく、大きく南北方向に波打っていたり、あるいは孤立した閉曲線になっている。これは、言うまでもなく同じ緯度にあっても場所によって相対渦度 ζ_a や安定度 $\partial\theta/\partial p$ が変化しているためである。これら、等温位面上での渦位 Q の基本場からの偏差を IPV anomaly と呼び、特に正 (負) の IPV anomaly を High-Q (Low-Q) と呼ぶ。では、IPV anomaly とは一体どのような構造をしているのだろうか。最も単純な例として、軸対称で定常状態の場合を考える。

第 3 図は Thorpe (1985) によって理論的に計算された、そのような IPV anomaly の 4 例であって、それぞれ (a) は上空に High-Q のある場合、(b) は上空に Low-Q のある場合、(c) は地表面に High-Q を置いた場合、(d) は地表面に Low-Q を置いた場合である。これらの図において描かれている細い実線は 5 K ごとに引かれた等温位線と 3 m/s ごとに引かれた等風速線を表し、太い実線は tropopause を表している。風向は (a) と (c) が cyclonic, (b) と (d) が anticyclonic になっている。計算は、Coliris parameter を一定と仮定し、基本場として 10 km より上に下層よりも 6 倍安定度の大きい層を模擬的な成層圏として置いて、なされている。第 3 図からわかる、IPV anomaly の一般的な性質は

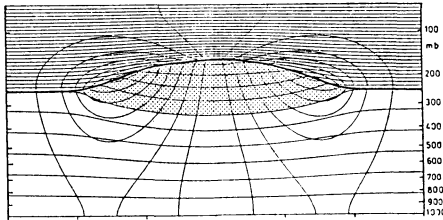
- (i) IPV anomaly によって induce された循環は、上層から下層まで同じ向きで、High-Q の場合 cyclonic, Low-Q の場合 anticyclonic になっている。
- (ii) IPV anomaly によって induce された循環の水平方向の scale を L とすると、垂直方向には fL/N の scale を持つ。ここで、 N は Brunt-



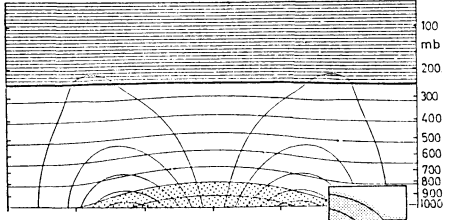
(a) 上空にあるHigh-Q



(c) 地表面近くのHigh-Q



(b) 上空にあるLow-Q



(d) 地表面近くのLow-Q

第3図 理論的に求めた定常・軸対称な IPV anomaly の構造

図中の細い実線は 5 K 毎に引かれた等温位線と 3 m/s 毎に引かれた等風速線を表す (Hoskins *et al.* (1985) より図を引用)

Väisälä frequency ($N=gd(\ln \theta)/dz$)

(iii) 正の(負の) IPV anomaly では、渦度だけでなく、安定度についても正の(負の) anomaly を持つ。言いかえると、High-Q (Low-Q) では安定度が高い(低い)。

(iv) IPV anomaly の上部および下部では安定度は、その内部と逆の anomaly になっている。つまり、High-Q (Low-Q) の上部・下部の大気の安定度は低い(高い)。

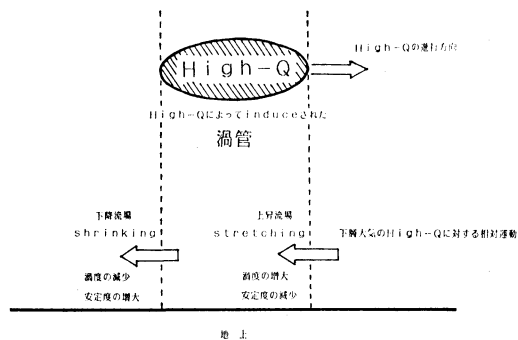
上記の4つの性質は第3図に描かれているような、軸対称・定常状態の IPV anomaly だけでなく、後で実際の例を見てもわかるとおり、一般の IPV anomaly についてもあてはまる。(ii)の性質については、前節の終わりの方で述べたように、(26)式を xyz -系で表したとき、鉛直方向に f/N で scaling すると左辺が3次元空間の Laplacian operator になること、それに渦位の invertibility principle からも理解できる。(iii)の性質は、もし IPV anomaly が渦度だけ、または安定度だけの anomaly でできていると仮定すると、周囲と温度風のバランスがなりたたなくなることから明らかであらう。

つまり、渦度と安定度とは渦度を保存するという条件で相互に関係しているのである。(iv)の性質は IPV anomaly がそれ自身よりもずっと鉛直方向に大きな scale で渦度を作るため、IPV anomaly の上部・下部の渦位で anomaly のない領域でも、渦度は IPV anomaly と同じ sense の anomaly になっていて、渦位は渦度と安定度の積だから、必然的にこれらの領域では安定度で逆の anomaly になっていなければならないということを考えれば明らかであろう。(ii)から推測できる興味深い性質として、ある IPV anomaly が Q を保存しながら南北に動いた時、 f が変化するので鉛直方向の scale が変化すること、それよりもっと重要なこととして、IPV anomaly が成層圏から対流圏に移流した時、 N が著しく小さくなるため成層圏にあったときはあまり下層まで影響をもたらさなかった IPV anomaly が対流圏に入ると鉛直スケールが大きくなって地表まで影響を及ぼすということなどが考えられる第3図の(c)(d)で描かれている地表付近の IPV anomaly に関しては、地表付近の暖かい(冷たい) anomaly は cyclonic な (anticyclonic) な循環を作ると覚えておくと便利が良い。

このほか、第3図(a)の中央部で安定度の高い成層圏の大気が対流圏の中まで侵入している、いわゆる“tropopause folding”を High-Q が引き起こしていることに注意したい。

2. 4 IPV anomaly と上昇流の関係

気象の関係者、とりわけ天気予報に携わる者にとって風向、風速、気温、気圧の四要素と同等、あるいはそれ以上に興味の対象となるのが雲の発生や降水現象など天気変化を引き起こす上昇流ではないだろうか。数値予報モデルを利用するまでもなく、中・高緯度における総観規模の上昇流場なら 500 mb 等圧面天気図等でトラフを検出すれば、その前面に存在することが先験的に、また準地衡風近似の理論からも予想できる。では、Q-map を前にした時、これから上昇流場を読み取ることができだろうか。実際、これは容易なことで、Q-map に関して何ら理論的な知識を持たずとも、Q-map と地上天気図や衛星画像などと比較すれば、上昇流場が上部対流圏の High-Q の前面におおよそあることが推察できよう。この理由を理論的に説明すると、いま上層ほど西風が強くなるという鉛直シアのある中・高緯度圏の偏西風帯で上部対流圏に High-Q がある場合を考える(第4図)。この時の大気の物理的状態は、2.2 で述べた invertibility principle によって、渦位の分布を与えただけで、それ以前の状態に関係なく、診断的に決定できる。もし、この上部対流圏の High-Q 以外に顕著な IPV anomaly がなければ、第3(a)図に描かれたような、上層の High-Q によって induce された cyclonic な渦管が High-Q から地上まで伸びたような状況になる。渦位は Lagrange 的に保存される量だから、High-Q は強い偏西風によって東に流され、それに伴って induce された渦管も東に移動する。風は鉛直シアを持っているから、High-Q の東側(移動方向の前面)にあたる下層の大気は High-Q の移動につれて次々と渦管に侵入してゆく。渦管に入った下層の大気の渦度は増加する。しかし、ここでも渦位 Q の保存則はなりたっているから、(17)式を見てわかるように、渦度が増加したぶんだけ、安定度 $(-\partial\theta/\partial p)$ が減少しなければならない。安定度の減少は気塊の stretching を意味する。このため、下層では地表の境界条件によって上昇流が発生する。下層の大気が渦管から抜けでるところでは、同様の理由で下降流場になる。このようにして、上部対流圏の High-Q の移流の前面で上昇流場、後面で下降流場になる理由が説明できる。この性質は、対流圏中層の正渦度移流の場で



第4図 上部対流圏の High-Q と上昇流の関係

上昇流ができるという広く一般に使われている性質と見掛上似ている。しかし、渦度は渦位と違って気塊と異なった動き方をするし、保存もされない。その上、 ω 方程式を見ればわかるとおり、上昇流は渦度移流の効果だけでなく温度移流の効果にも影響されるのであって、渦度移流だけで判断するのは本来不正確なのである。それに対し、渦位は(17)式のように渦度と安定度の積であるから、渦度移流と温度移流の効果を同時に考慮していることになる。この時、われわれが考えなければならないのは、渦位 Q の保存による気塊の安定度の変化と invertibility principle による全体の流れの場だけで、非常に simple な考え方になる。なぜ、上部対流圏の High-Q が重要なのかと言えば、そこが偏西風の最も強いところにあたり、なおかつ渦位 Q の値が対流圏の中で最も大きいため、渦位移流が最大になっていることと、その大きな渦位によって induce された渦管の scale が大きく、対流圏全体にわたってその周辺の流れの場を支配する力を持っていることによるためである。

上述の定性的な議論は、渦位 Q の保存による渦管の stretching や shrinking に基づいて行われているのであって、準地衡風近似の仮定は入っていないから、中・高緯度だけでなく低緯度地方にも適用できるが、定量的な議論をするために以下では Ertel の渦位 Q の代わりに解析的に扱いやすい形をした準地衡風近似の渦位 q を用いる。

(22), (25) より

$$q = f + \frac{1}{f_0} \nabla^2_h \Psi' + f_0 \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \frac{1}{S} \frac{\partial \Psi'}{\partial p} \right\} \dots (27)$$

(27) を p と t で偏微分して f_0 を掛けると

$$f_0 \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial p} = \nabla^2_h \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial p} \right) + f_0^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} \left\{ \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial p} \right) \right\} \dots (28)$$

また準地衡風近似の熱力学第1法則の方程式より

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial p} \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial p} \right) + S\omega = 0 \quad \dots\dots(29)$$

ここで \mathbf{v} は (24) で表される地衡風ベクトル (28), (29) で $(\partial \Psi' / \partial p)$ を消去すると

$$\left[\nabla^2_h + \frac{f_0^2}{S} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right] \left(\omega + \frac{1}{S} \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial p} \right) \right) = - \frac{f_0}{S} \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial p} \quad \dots\dots(30)$$

q の保存則から

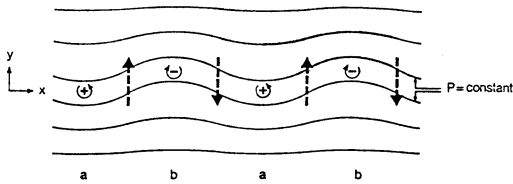
$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla q = 0 \quad \dots\dots(31)$$

$$\tilde{\omega} \equiv \omega + \frac{1}{S} \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial p} \right) \quad \dots\dots(32)$$

とおくと, (30), (31) より

$$\left[\nabla^2_h + \frac{f_0^2}{S} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right] \tilde{\omega} = \frac{f_0}{S} \frac{\partial}{\partial p} [\mathbf{v} \cdot \nabla q] \quad \dots\dots(33)$$

地表面の気圧を p_0 とすると, $p=0$ と p_0 で $\omega \sim 0$ だから (33) 式の左辺はおおむね ω と逆の符号をもつ, したがって (33) 式から上層ほど正の渦位移流が大きい時は上昇流場になる. 上層ほど強い西風が吹く偏西風帯では, 対流圏上部で渦位が大きいから, ここでは上部対流圏の High-Q の移流の前面で上昇流が発生するのが理解できよう. ω と $\tilde{\omega}$ は等しくないから, (33) 式も概念的



第5図 Rossby 波西進の IPV thinking による説明 (Hoskins et al. (1985) より図を引用)

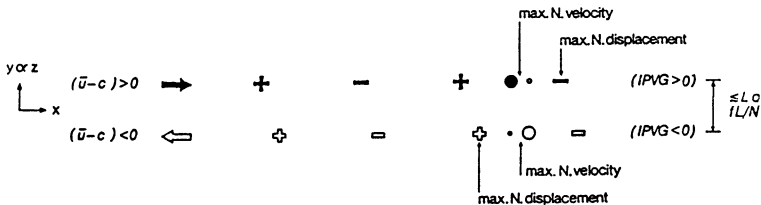
に理解しておけばよいわけで, 厳密な ω の値は数値予報が利用できる現在, 数値予報モデルによって計算されたものを用いるのが良い.

2.5 IPV thinking

気象のさまざまな現象も, Q-map で見れば, 渦位が保存されるという性質を通して, より簡単に理解することができる. この考え方を IPV thinking という.

まず1例として, β 平面で barotropic な大気を考えてみよう. 東へ x 座標, 北へ y 座標をとると, 渦位 Q の変化は β 効果だけによるから y のみだけに係りし (Q は北が大きく, 南に行くにしたがって減少する), Q-map では等値線が x 座標に平行にならんでいる. この基本場に小さな perturbation として, 正と負の IPV anomaly を置くと, 第5図のように Q の等値線は南北に波打つ. 正 (負) の anomaly の周囲には, 2.3 で述べたように, それぞれ cyclonic (anticyclonic) な循環が発生し, その結果として第5図で太い破線で示したような流れができて, 全体として波の位相を西に移動させようとする (Q が保存されるから). これが Q-map で見たときの Rossby 波の西進である. 同様にして, Q が北に向かって減少している時は, 波が東進するのがわかる.

次に, Q の分布の異なった2つの領域でそれぞれ伝播している Rossby 波が相互に作用しあった場合を考える. 第6図で中央より上半分では北に向かって (y 方向へ) Q が増加している領域, 下半分は南に向かって ($-y$ 方向へ) Q が増加している領域とする. 波の代表的なスケールを L とすると, この2つの領域が水平方向にならんでいる場合には相互の距離が L 以下, 鉛直方向に重なっている場合は相互の距離が fL/N 以下とすると (f は Coriolis parameter, N は Brunt-Väisälä frequency), 2つの領域の波はたがいに干渉する. さきほど述べたように, 上の領域では Q の gradient は北向きだから Rossby 波は媒質に対し西進し, 下の領域では東進する. 逆に波から見れば, 上の領域では物質の流れは波に対し



第6図 互いに異なる渦位の南北傾度の符号を持った場での Rossby 波の干渉 (Hoskins et al. (1985) より図を引用)

て東に流れ、下の領域では西に流れる。したがって2つの領域の波が干渉してできた disturbance の速さを c 、zonal flow の速さを \bar{u} (場所によって変化して、第6図の場合、上の領域の方がより速い) で表すと、上の方では $(\bar{u}-c) > 0$ 、下の方では $(\bar{u}-c) < 0$ となり、disturbance に対する物質の流れは第6図でそれぞれ黒い太矢印、白い太矢印で示したようになる。以後は disturbance とともに動く座標系から見た表現をしているので注意していただきたい。ここで、第5図で考えたのと同じように、第6図で上の領域では黒の+印で、下の領域では白の+印で示したような正と負の IPV anomaly を置いてみる。そうすると正と負の anomaly はそれぞれ cyclonic, anticyclonic な循環を induce する結果、上の領域では大きい黒丸で、下の領域では大きい白丸で示した部分がおのおの独立していれば最も北向きの変位が大きくなるが、上の領域と下の領域は干渉しあう距離にあるので、第6図に示されたような上と下の anomaly の phase の差が $1/4$ 波長以下の時は、たがいに北向きの変位をより強め合う結果となる。この時、anomaly の動きは次の2つの効果によって影響される。1つは zonal flow によって速度 $(\bar{u}-c)$ で単に流されるだけの advection の効果、もう1つは anomaly の induce した循環が、渦位傾度があるために、異なった渦位の値を持った空気を運んできて、anomaly 自身がそれによって影響される generation の効果で、例えば上の領域の正の anomaly が induce した cyclonic な循環は、北に向かって増加している渦位傾度のため anomaly の右側(下流側)に Low-Q を運んでくるが、そのため正の anomaly は左側(上流側)に移動しようとする効果である。いまの場合、強い北向きの変位のために、advection よりも generation の効果が効いて、上の領域では Low-Q の移流により正の anomaly は zonal flow で東に流されるのを妨げられ、一方下の領域では High-Q の移流により正の anomaly は西に流されるのを妨げられる。この結果、2つの anomaly はたがいに結びついて1つの disturbance として発達する。第6図の場合よりも anomaly のずれが大きい時、つまり、もし phase のずれが $1/4$ 波長よりも大きい時を考えると、今度は上の anomaly によって induce された変位と、下の anomaly によって induce された変位の向きが逆になり、たがいに干渉して変位を打ち消し合うようになる。それぞれ anomaly は変位が打ち消されたために zonal flow に流されて、上の正の anomaly は東へ、下のものは西に動

いてたがいに接近し、phase のずれが $1/4$ 波長以下になると前述のように相互に結びついて、1つの disturbance としてまとまる(詳細は Bretherton (1966) 参照)。2種類の異なった Q の gradient を持った場にある Rossby 波が干渉して1つにまとまるという現象が、水平面内の干渉である時は順圧不安定を表し、鉛直面内での干渉である時、傾圧不安定を表している。

2.6 Instability

前節でも少し触れたが、地球の大気ではさまざまな instability が存在し、それに伴って擾乱が発達する。そのうち、総観規模擾乱に関係するものとしては Eady (1949) によって述べられた instability と Charney・Stern (1962) によるものがあるが、Q-map ではこれらの instability はどのように表現されるだろうか。

Eady-mode の instability は主に下層の境界面付近の傾圧性によって発生する傾圧不安定であるが、実際に作成される Q-map では大気下層の傾圧性のために等温位面が地表面と交差していること、下層の観測データは $1,000$ mb の次は 850 mb と粗いこと、そして下層では境界面との摩擦や非断熱加熱の効果が大きく渦位 Q が保存されないことなど最下層の表現に問題を抱えている。このため、Q-map では Eady-mode の instability が発生するのを見出すのは非常に困難である。

一方、Charney-mode は内部ジェット的不安定性など大気の中層以上で発生するから Q-map での検出は容易であるし、しかも地上擾乱の発達にも大きく影響を及ぼすから、もう少し詳しく述べてみる。

以下の議論では準地衡風近似で考えるので、大気の状態は流線関数 ϕ を用いて表すことができる。

ここで

$$\Psi' = f_0 \phi \quad \dots\dots(34)$$

Ψ' はこれまで使われてきたのと同じ意味である。

いま、基本的な流れの場として東西流を仮定し、そこでの小さな perturbation を考える。以下では、前者に対応する物理量には $\bar{\quad}$ (バー) を付け、後者に対応する物理量には $'$ (ダッシュ) を付けると

$$\phi = \bar{\phi}(y, p) + \phi'(x, y, p, t) \quad \dots\dots(35)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u} + u', \quad v = v' \\ \bar{u} &= -\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y}, \quad u' = -\frac{\partial \phi'}{\partial y}, \quad v' = \frac{\partial \phi'}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(36)$$

このとき、(22) より

$$\left. \begin{aligned} q &= \bar{q} + q' \\ \bar{q} &= f + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{S} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial p^2} \\ q &= \nabla^2 h \phi' + \frac{f_0^2}{S} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial p^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(37)$$

(簡単のために、 $S = \text{一定}$ と仮定する)

(34)~(37) を使って、(31) の線形化した方程式を求めると

$$\begin{aligned} \frac{\partial q'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial q'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} &= 0 \quad \text{より} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\nabla^2 \phi' + \frac{f_0^2}{S} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial p^2} \right) \\ + \frac{\partial \phi'}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} &= 0 \quad \dots\dots(38) \end{aligned}$$

(29) も同様にして

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) + v' \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial p} \right) \\ + \frac{S}{f_0} \omega = 0 \quad \text{より} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) - \frac{\partial \phi'}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} + \frac{S}{f_0} \omega = 0 \dots\dots(39) \end{aligned}$$

次に

$$\phi' \equiv \Phi(y, p) e^{ik(x-ct)} \quad \dots\dots(40)$$

で表せると仮定する。 Φ と c は複素数である。

(40) を (38) に代入して整理すると

$$-k^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{S} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \Phi = 0 \quad \dots\dots(41)$$

境界条件として

$$y = y_1, y_2 \quad \Phi = 0 \quad \dots\dots(42)$$

また (40) を (39) に代入して $p=0, p_0$ で $\omega=0$ の条件を入れると

$$(\bar{u}-c) \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \Phi = 0 \quad \dots\dots(43)$$

Φ^* を Φ の共役複素数とすると (41) より

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} \int_0^{p_0} \left(-k^2 \Phi^* \Phi + \Phi^* \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{S} \Phi^* \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} \right. \\ \left. + \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \Phi^* \Phi \right) dp dy = 0 \quad \dots\dots(44) \end{aligned}$$

(44) の積分内の第 2, 3 項については部分積分し、境界条件 (42), (43) を使って整理すると

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} \int_0^{p_0} \left\{ -k^2 |\Phi|^2 - \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|^2 - \frac{f_0^2}{S} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right|^2 \right. \\ \left. + \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} |\Phi|^2 \right\} dp dy \\ + \frac{f_0^2}{S} \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \right) \frac{|\Phi|^2}{\bar{u}-c} \right]_0^{p_0} dy = 0 \dots\dots(45) \end{aligned}$$

$\left[\right]_0^{p_0}$ は $\left[\right]$ 内の $p=p_0$ と $p=0$ での値の差である。

c の実部を c_s , 虚部を c_i とすると $c = c_r + ic_i$

(45) がなりたつとき、(45) 式の左辺の虚部は 0 に等しいから

$$\begin{aligned} c_i \left\{ \frac{f_0}{S} \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \right) \frac{|\Phi|^2}{|\bar{u}-c|^2} \right]_0^{p_0} dy \right. \\ \left. + \int_{y_1}^{y_2} \int_0^{p_0} \frac{|\Phi|^2}{|\bar{u}-c|^2} \cdot \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} dp dy \right\} = 0 \quad \dots\dots(46) \end{aligned}$$

Instability が発生する必要条件は $c_i \neq 0$ だから

$$\begin{aligned} \frac{f_0}{S} \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \right) \frac{|\Phi|^2}{|\bar{u}-c|^2} \right]_0^{p_0} dy \\ + \int_{y_1}^{y_2} \int_0^{p_0} \frac{|\Phi|^2}{|\bar{u}-c|^2} \cdot \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} dp dy = 0 \quad \dots\dots(47) \end{aligned}$$

さらに $p=0, p_0$ で

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \right) = 0 \quad \dots\dots(48)$$

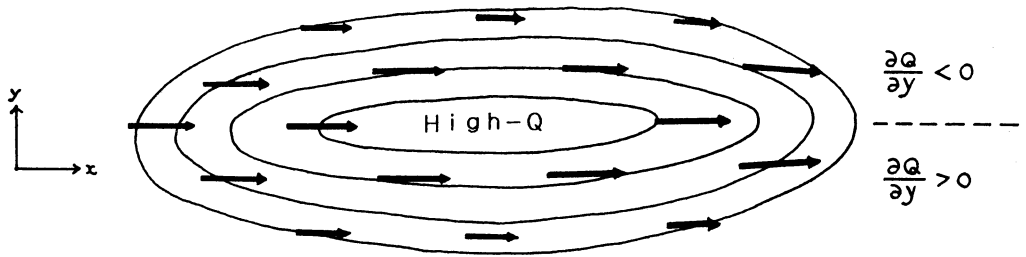
の場合には

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_0^{p_0} \frac{|\Phi|^2}{|\bar{u}-c|^2} \cdot \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} dp dy = 0 \quad \dots\dots(49)$$

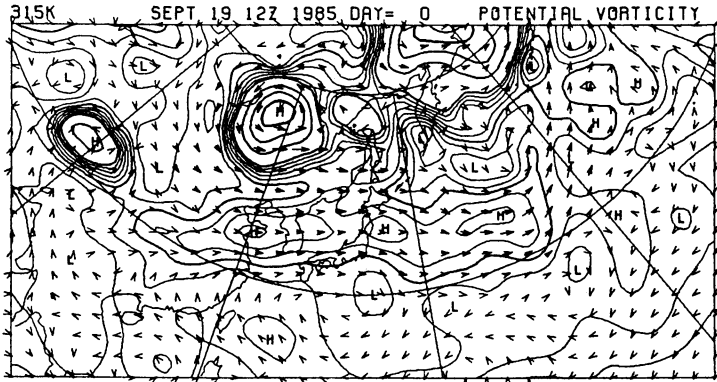
(49) が満たされるためには $(\partial \bar{q} / \partial y)$ が積分領域内で符号を変えなければならない。言いかえると、

instability の起きる条件は $(\partial \bar{q} / \partial y) = 0$ になるところがあることである。

確かに、前節で述べた第 6 図でも上半分と下半分の領域で渦位の南北傾度の符号が逆転している。温度風の関係から考えて、条件 (48) は上下の境界面では温度傾度のないことを意味する。上の境界条件はともかく、下の境界条件は現実には地表面で大きな温度傾度があることを考えると、大変不都合なものと思えるかもしれない。しかし、(48) は境界面上での条件であって、そのすぐ近傍についてはなんら制限をしていないで、第 3 図(c), (d) の右下隅に描かれているように、地表面上では温位が一定で、すぐ上では温位傾度があり、その間の無限小の区間に Dirac の δ 関数的な無限大の安定度を持つ層を考えれば、確かに (47) 式の左辺の第 1 項の積分は 0



(a) 概念図



(b) 実例

第7図 Charney-mode の instability が起きる場の Q-map. (a) 概念図と (b) 実例. (a) で太い矢印は風ベクトル, 細い閉曲線は等渦位線を表し, x 軸は東向きに, y 軸は北向きにとつてある.

になって (49) が成り立つし, 下層に温位傾度を作ることができる. さらに, もっと極端に, 内部の領域はすべて $(\partial \bar{q} / \partial y) = 0$ とし, 上下の境界付近に今言った δ 関数的に温位傾度を持つ層を作った場合も instability は発生し, この時は Eady-mode の instability になる.

Instability の条件は渦位分布の単純な条件で表されているから, Q-map で見ると容易に見ることができるはずだ. その形を模式的に表すと第7図 (a) のようになる. 条件は zonal flow の基本場における小さな perturbation を仮定して導き出しているから, IPV anomaly の東西 scale は南北 scale よりもずっと大きくなくてはならない. 実際の場合で, 東西流が卓越していて渦位の南北傾度の符号が逆転する状況は前線帯などに見られる. その1例を第7図 (b) に示す. この図では北緯30度, 東経110度の華中あたりから黄海, 朝鮮半島, 日本

海, 東北地方から北緯35度, 東経170度の太平洋上にかけて秋雨の前線帯に沿って instability の条件 $\{(\partial \bar{q} / \partial y) = 0\}$ を満たす領域が延びている. 確かに, 理論どおり, この領域では擾乱は発生しやすいが, あまり発達はない. 実際には, むしろ不安定領域で発生した弱い擾乱が, バイカル湖東方に見られる強い High-Q と coupling して大発達することが多く, linear theory で導きだされた instability の条件は, あくまで知識として覚えておく程度でよい.

(17) 式や (22) 式を見てもわかるとおり, 渦位 Q には渦度の項と傾圧性の項がともに含まれている. 先程述べた instability が渦度による効果で起きている場合は傾圧不安定, 傾圧性の効果によって起きている場合は傾圧不安定となり, この2つの不安定を Q-map では統一的に見ることができる利点を最後に強調しておく.