



天 気

1987年3月
Vol. 34, No. 3

101 (力学系)

力学系概観*

金久博忠**

近年、気象学において非線形力学の議論がさかんに増えてきました。特に、運動方程式の解の定性的ふるまいを調べる、力学系理論に基づいた議論がさかんです。例えば分岐現象であるとか、解の多重性であるとか、ポアンカレ写像であるとか、開折理論と言った言葉が気象の論文に見うけられる様になり、特に、カオスやカタストロフィなどは一種の流行語の観を呈しています。また、気象学会においても、気象研究ノート「気象とカタストロフィ」が刊行され、将来この流れが気象学の一分科を形成するものと思われれます。この小論は、この流れに少しでも寄与する事を目的に、力学系理論の初歩を概観し、特に、摂動が分岐現象に与える影響の解説を試みたものです。

—力学系理論とは—

大気現象を記述する微分方程式は非線形ですから解を時間の関数として解析的に求める事は一般には困難です。そこで例えば、この非線形方程式の解を摂動展開によって近似的に求める弱非線形理論や、あるいは微分方程式を差分方程式で近似して解を数値計算する方法などが在る訳ですが、力学系理論と言うのは解を時間の関数として求めるのではなく（もちろん、それができれば、それに越した事は無いのですが）その定性的ふるまいを調べるものです。例えば、ある初期値から出発した状態が、おおよそ、どの様な過程を経て、十分時間が経た後には結局どこに落ち着くのか、そういった事を調べるものであり、実践的には、この様な記述が十分価値を持つ場合が在ります。現象の定性的記述と言うものは、気象にとっては目新しいものではなく、例えば、長期予報や季候変化の予測などは、もしこれが当たれば、十分大きな社会的価値を持っています。

—この解説の構成—

上に述べた様に、この解説は摂動の分岐現象への影響に話をしばってあり、力学系理論の一部分に触れているにすぎません。従って、例えば、カタストロフィ理論に関しては3. において、その初歩を部分的に述べてありますが、カオスに関しては1. で軽く言及するにとどめてあります。

1. においては、基本的諸概念について述べます。以下の話の中心となる分岐の説明を目的としています。

分岐が生ずるのは、運動方程式を線形化して作った演算子の固有値の実部が零になる時である事が示されます。

2. においては、元の問題が、より低い次元の問題へ還元される事について述べます。中心多様体定理による方法を説明します。

元の状態空間における分岐図が、運動方程式を線形化して作った演算子の零固有空間への射影と定性的に同じである事が示されます。

3. においては、摂動の定常状態分岐への影響について述べます。

* A brief outline of the dynamical system.

** Hirotsada Kanehisa, 気象大学校.

無数の摂動の影響が比較的少数の変数で記述される事が示されます。

4. においては、摂動の周期軌跡分岐への影響について述べます。運動方程式の自律性をくずさない範囲の摂動(すなわち、時間に直接依存しない摂動)を考えます。

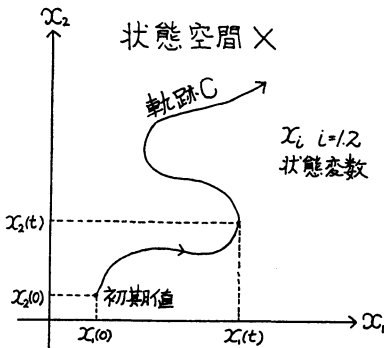
無数の摂動の影響が比較的少数の変数で記述される事が示されます。

この解説には筆者の浅学の故に、あからさまなうそが、沢山あると思います。正確な事柄に関しては、最後にあげた図書を参照して下さい。この解説では触れませんが、大変興味深く、かつ、現在精力的に研究されているものに対称性の問題があります。系がある対称性を持つ場合、その事が解の定性的ふるまいに、どのような影響を与えるか。分岐現象と対称性の問題、対称性をやぶらない摂動の問題などに関しては、特に、Golubitsky and Schaeffer (1985) を参照して下さい。また、力学系理論と気象との具体的な関わりについては、上にも述べた、気象研究ノート「気象とカタストロフィ」(松田・余田 1985年) を参照して下さい。

1. 基本概念

定義1 状態空間 (state space)

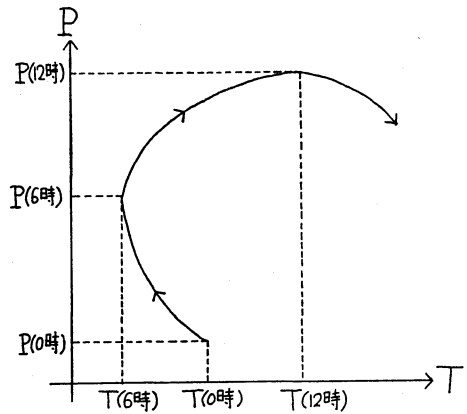
系の状態を表現する変数 x を状態変数と言い、 x が構成する空間 X を状態空間と言う。初期 (時間=0) における状態 $x=x(0)$ を初期値と言い、 $x(0)$ から出発する未来 ($t>0$) の $x=x(t)$ の集合 $C=\{x(t)|t>0\}$ を軌跡と言う。



第1図 状態空間の説明図

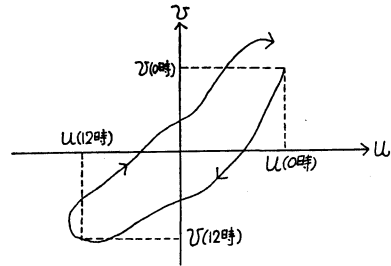
例 ある地点における気圧 $P(t)$ 、気温 $T(t)$ を状態変数とする状態空間を考えよう。例えば零時を初期として、次の日の昼に高気圧が通過したとすれば第2図の様な軌跡となるであろう。

な軌跡となるであろう。



第2図 状態空間の例

例 ある地点における風速の東西成分 $u(t)$ 、南北成分 $v(t)$ を状態変数とする状態空間を考えよう。おだやかな大規模場におおわれ、局地循環が卓越したとすれば第3図の様な軌跡となるであろう。



第3図 状態空間の例

定義2 運動方程式 (equation of motion)

系の状態の時間変化を記述する方程式は、運動方程式と呼ばれ、次の形に書かれる。

$$\frac{dx}{dt} + f(x, t) = 0$$

例 流体力学の運動量保存式、

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v - \frac{1}{\rho} \nabla \tau = 0$$

の応力項 $-\nabla \tau / \rho$ を他の諸式 (質量保存式など) を使って v で表現すれば、移流項 $v \cdot \nabla v$ は既に v で表現されているから、

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f(v, t) = 0$$

となる。すなわち、速度場 v を状態変数とする、運動方

程式となる。この場合の状態空間は無限次元関数空間となるが、 v および $f(v, t)$ を適当な基底で展開し、その展開係数を $v_i, f_j(v, t), i=1, 2, 3, 4, \dots$ とすれば、上式は、

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + f_i(v, t) = 0 \quad i=1, 2, 3, 4, \dots$$

となる。すなわち、速度場 v の展開係数 v_i を状態変数とする運動方程式となる。

例 Newton の運動方程式、

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

は、 $d\mathbf{x}/dt = \dot{\mathbf{x}}$ とすると、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dot{\mathbf{x}} \\ -\frac{1}{m} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = 0$$

となる。すなわち、 \mathbf{x} および $\dot{\mathbf{x}}$ を状態変数とする、運動方程式となる。この場合の状態空間は6次元空間 (\mathbf{x} が3個と $\dot{\mathbf{x}}$ が3個) となる。

定理1 軌跡の存在と一意性

運動方程式によって、初期値 $x(0)$ から出発する軌跡は一意に決定される。

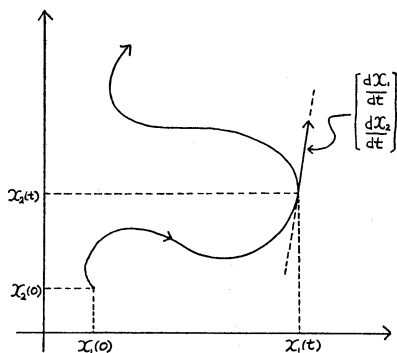
例えば、状態空間が2次元の場合、運動方程式は、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, t) \\ f_2(x_1, x_2, t) \end{pmatrix} = 0$$

となり、時間 t における軌跡の接線方向の vector は、

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} \text{ であり、これが } - \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t), t) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), t) \end{pmatrix}$$

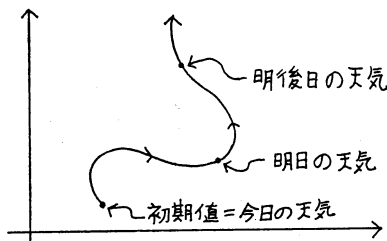
で与えられる。すなわち、時間 t における状態 $x_i(t), i=1, 2$, によって次に進むべき方向と大きさが指定され、未来の軌跡が決定される。



第4図 定理1の説明図

注意 定理1の命題が成立しない様な $f(x, t)$ も存在するが、その様な関数は、ここでは考えない。

備考 為すべき事は、現在の知識から未来を知る事である。例えば、今日の天気から明日の天気を知る事である。言い換えると、今日の天気と言う初期値から出発する軌跡を、運動方程式を解いて求める事である。



第5図 定理1備考の説明図

定義3 自律系 (autonomous system)

定義2における運動方程式中の $f(x, t)$ が、時間 t を含まない時、すなわち、運動方程式が、

$$\frac{dx}{dt} + f(x) = 0$$

である時、この系を自律系と言う。以下、1. においては、状態空間が2次元の自律系を論ずる。

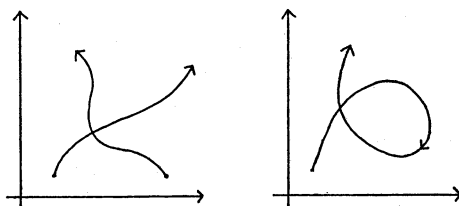
注意 非自律系に対しては、時間 t を、もうひとつ別の状態変数 y とみなし、

$$t = y, \quad dy/dt = 1 \text{ として、} \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y) \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

とすれば自律系に還元できる。この場合、状態空間の次元は1増える。

定理2 軌跡の非交叉性

軌跡は交わらない。例えば第6図の様な事は起こらない。



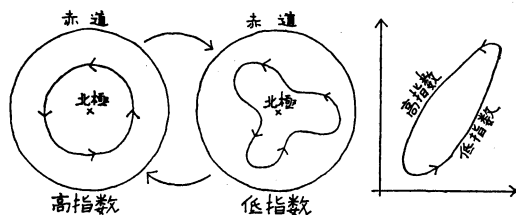
第6図 定理2の説明図

すなわち、異なる2つの初期値から出発した軌跡は交

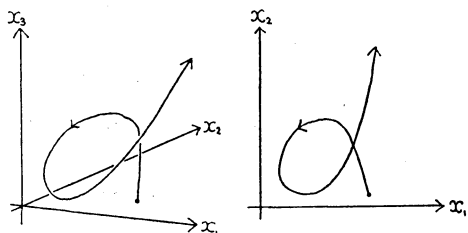
わからないし、1つの初期値から出発した軌跡が自らと交わる事もない。

なぜならば、定理1より、任意の点 x から出発する軌跡は、ひとつであり、かつ定義3より、その点 x を通過する時間に関係なく一意に決定されるが、もし交叉するとすれば交叉点において矛盾が生ずる。

注意 3次元以上の状態空間の2次元部分空間への射影は、もちろん交わり得る。



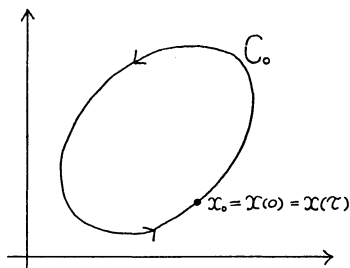
第9図 周期軌跡の例



第7図 定理2注意の説明図

定義4 周期状態 (periodic state)

状態空間 X の点 x_0 から出発した軌跡が時間 τ の後に再び x_0 に戻るならば、定理2より、この軌跡は x_0 を通る閉曲線 C_0 となる。この時、 x_0 を周期 τ の周期状態と言い、 C_0 を周期軌跡と言う。



第8図 周期軌跡の説明図

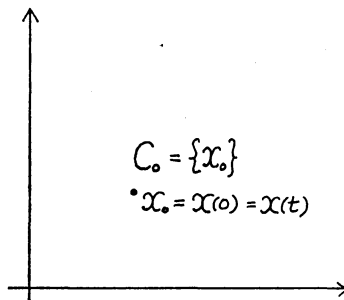
x_0 が周期状態であるならば、この閉曲線上の任意の点もまた、周期状態である。定理2より周期軌跡 C_0 の内部から出発した軌跡は外部に出る事はなく、外部から出発した軌跡が内部に入る事もない。

例 総観気象学で言う所の、低指数循環と高指数循環の交替なども、近似的に周期現象と見做せるであろう。

定義5 定常状態 (stationary state)

周期状態の中で特に周期 $\tau=0$ のものを定常状態と言う。言い換えると、 x_0 が定常状態であるとは、もし初期

値 $x(0)$ が x_0 であれば、すべての $t>0$ に対して $x(t) = x_0$ となる事である。この時の周期軌跡 C_0 は1点 x_0 のみから成る。



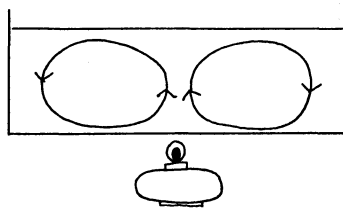
第10図 定常状態の説明図

定常状態は、もちろん運動方程式の解であるが、 $dx_0/dt = 0$ であるから、次の式を満たす。

$$f(x_0) = 0$$

以下、定常軌跡も含めた意味で、周期軌跡と言う言葉を使う。

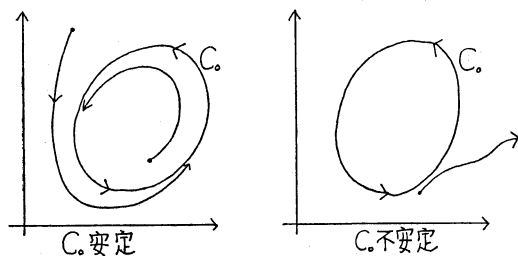
注意 定常状態とは時間と共に変化しない状態の事であり、運動のない状態の事ではない。例えば、洗面器に水を入れて下から火であぶる時、対流が起こっているとす(すなわち運動がある)。この対流の様子(すなわち糸の状態)が時間がたっても変わらないのが定常の意味である。



第11図 定義5注意の説明図

定義6 安定性 (stability)

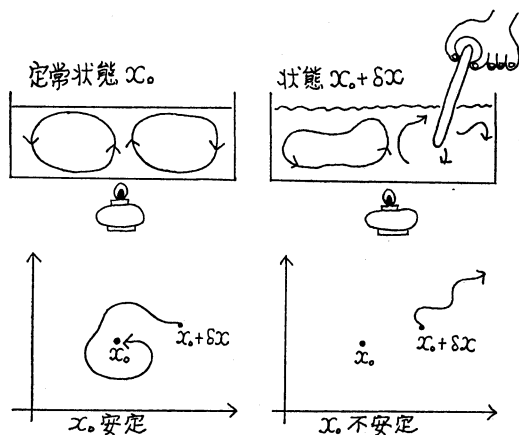
周期軌跡 C_0 から少し離れた任意の点から出発した軌跡が C_0 に接近する時、 C_0 は安定であると言われ、逆に、 C_0 の近くに点 x が存在して、これを初期値とする軌跡が C_0 から遠ざかる時、 C_0 は不安定であると言われる。



第12図 安定性の説明図

注意 安定性の概念は、もっともっと複雑であるが、本論では、これで十分である。

例 定義5の注意の対流 (定常状態 x_0 とする) に擾乱を加えよう。例えば棒で少しかきまぜよう (この状態を $x_0 + \delta x$ とする)。時間が経過して、元の対流状態 x_0 に落ち着けば x_0 は安定であり、そうでなければ不安定である。



第13図 安定及び不安定定常状態の例

定理3 安定性の判定規準

x_0 を定常状態とし、 2×2 行列

$$\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

の固有値を $\lambda_i, i=1, 2$ とする。この時、次の命題が成り立つ。

もし、すべての λ_i に対して $Re \lambda_i > 0$ ならば x_0 は安定であり、もし、 $Re \lambda_i < 0$ となる λ_i が存在すれば x_0 は不安定である。ただし Re は実部を意味する。

なぜならば、定常状態 $x_{0i}, i=1, 2$ 、と少し異なる状態 $x_{0i} + \delta x_i(0)$ を初期値とする状態 $x_{0i} + \delta x_i$ を考えると、これは運動方程式の解であるから、

$$\frac{d}{dt}(x_{0i} + \delta x_i) + f_i(x_0 + \delta x) = 0$$

となるが、 δx_i の2次以上の項を無視すれば

$$\frac{d}{dt} \delta x_i + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j} \delta x_j = 0$$

となり、これを解いて

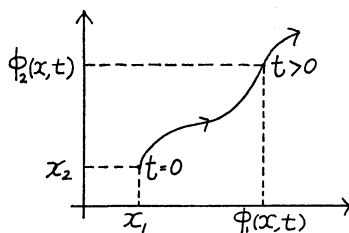
$$\delta x_i(t) = \sum_{j=1}^2 e^{-t \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j}} \delta x_j(0)$$

となる。すべての λ_i に対して $Re \lambda_i > 0$ であれば任意の $\delta x_i(0)$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta x_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^2 e^{-t \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j}} \delta x_j(0) = 0$$

となり、 x_0 は安定となる。

定常ではない周期軌跡の安定性については少し複雑である。初期値 x_i から出発した、時間 t における状態を $\phi_i(x, t)$ と書く。



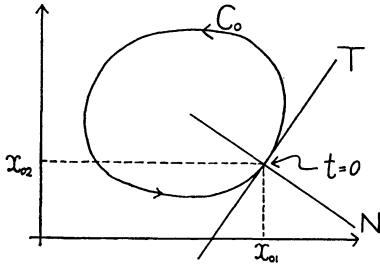
第14図 定理3の説明図1

C_0 を周期 τ の周期軌跡とする。 x_{0i} を C_0 上の点とし、この時の時間を $t=0$ とする。 x_{0i} を原点として状態空間 X を接線方向の空間 T と、その補空間 N に分割する。

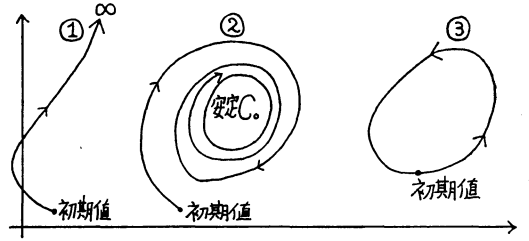
この時、 2×2 行列、

$$\frac{\partial \phi_i(x_0, \tau)}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1(x_0, \tau)}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1(x_0, \tau)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi_2(x_0, \tau)}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2(x_0, \tau)}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

の N への射影の固有値 λ に対して、もし、 $|\lambda| < 1$ な



第15図 定理3の説明図2



第16図 定理4の説明図

らば C_0 は安定であり, $|\lambda| > 1$ ならば C_0 は不安定である。

なぜならば, C_0 上の点 x_{oi} と少し異なる状態 $x_{oi} + \delta x_i(0)$ を初期値とする, 時間 t における状態は $\phi_i(x_{oi} + \delta x(0), t)$ であるから, 一周期 τ の後には $\phi_i(x_{oi} + \delta x(0), \tau)$ となる. 一方, $\phi_i(x_{oi}, \tau) = x_{oi}$ であるから, δx_i の2次以上の項を無視すれば,

$$\begin{aligned} \delta x_i(\tau) &= \phi_i(x_{oi} + \delta x(0), \tau) - x_{oi} \\ &= \phi_i(x_{oi} + \delta x(0), \tau) - \phi_i(x_{oi}, \tau) \\ &= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \phi_i(x_{oi}, \tau)}{\partial x_j} \delta x_j(0) \end{aligned}$$

となる. もし $\partial \phi_i(x_{oi}, \tau) / \partial x_j$ の N への射影の固有値 λ に対して, $|\lambda| < 1$ であれば,

$$|\partial x_i(\tau) \text{ の } N \text{ への射影}| < |\partial x_i(0) \text{ の } N \text{ への射影}|$$

となり, C_0 は安定となる. C_0 に近づくか, C_0 から遠ざかるかと言う事には, N への射影だけが問題となる。

注意 定常状態の安定性の場合, 無視した非線形項を考慮すると, $\delta x_i(t)$ の $t \rightarrow \infty$ でのふるまいは,

$$e^{-t(\lambda_i + \delta \lambda_j)}$$

で決定されるであろう. ただし $\delta \lambda_i$ は非線形項による λ_i の補正であり, $|\lambda_i| \gg |\delta \lambda_i|$ である. もし, $Re \lambda_i \leq 0$ であれば, $Re(\lambda_i + \delta \lambda_i) = Re \lambda_i + Re \delta \lambda_i \leq 0$ となり, 非線形項を無視した場合とかわらないが, もし $Re \lambda_i = 0$ ならば, $Re(\lambda_i + \delta \lambda_i) = Re \delta \lambda_i$ となり, これの符号は非線形項により異なる. すなわち, $Re \lambda_1 = 0, Re \lambda_2 > 0$ の場合, 安定性は, 非線形項を調べないとわからない。

周期軌跡の安定性の場合も同様に, $|\lambda| = 1$ の場合, 安定性は, 非線形項を調べないと, わからない。

定理4 軌跡の漸近的ふるまい

状態空間 X の任意の点 x から出発した軌跡は, ①無限遠へ発散するか, ②安定な周期軌跡に接近するか, ③それ自身, 周期軌跡を形成するかのいずれかである。

注意 上記の3つ以外に, homoclinic cycle と呼ばれる

ものの可能性もあるが, これは現実的には, ほとんど存在しない。

定理4は2次元自律系に特有のものであり, 状態空間の次元が増すと, 軌跡が strange attractor と呼ばれる非周期的状態に接近して行く可能性が生じる. この不規則な現象は, chaos と呼ばれる。

備考 系の運動方程式が無限遠への発散を許さないものであれば, X のどこの点から出発しようとも, 十分時間が経過した後は, 軌跡は安定な周期軌跡のいずれかに十分近づくか, あるいは, それ自身, 周期軌跡である. ところで, 問題を解くとは未来を知る事である. 従って, 問題を解くためには安定な周期軌跡を求める事が重要な課題となる。

定義7 助変数を持つ系

定義3の運動方程式中の f がある助変数 μ の関数である時, この系を助変数を持つ系と言う。

$$\frac{dx}{dt} + f(x, \mu) = 0$$

以下, 助変数を持つ系を考える。

例 定義2の例の流体方程式は外力(例えば太陽の入射)が在る場合には, その強さを表わす変数を μ として

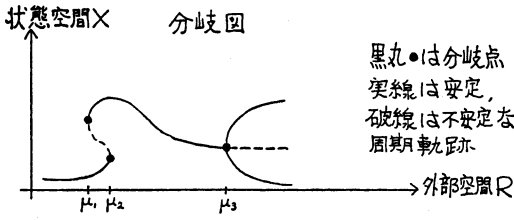
$$\frac{\partial v}{\partial t} + f(v, \mu) = 0$$

となる. μ は外力の強さを表すので外部変数と呼ばれ, それが構成する空間 R は外部空間と呼ばれる。

定義8 分岐 (bifurcation)

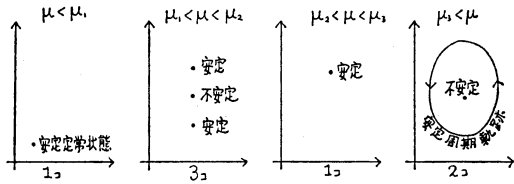
周期軌跡 C_0 は外部変数 μ の関数となるが, 一般に, 存在する C_0 の数は μ の値によって異なる. これを示す図を分岐図と言い, μ の変化に伴って C_0 の数が変化する所を分岐点と言う。

$\mu < \mu_3$ に在るのは定常状態, $\mu_3 < \mu$ には安定周期軌跡と不安定定常状態が在るとすると $\mu =$ 一定の状態空間 X



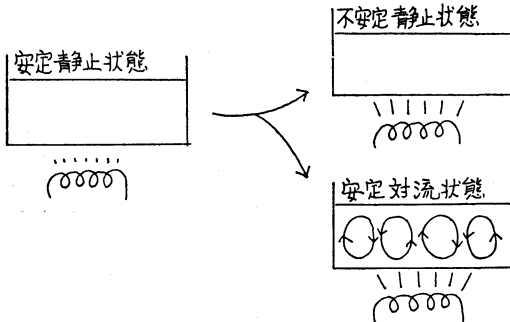
第17図 分岐の説明図1

における周期軌跡の分布は第18図のようになる。



第18図 分岐の説明図2

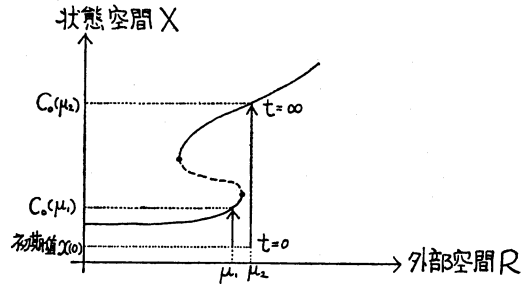
例 水を入れた洗面器を下から加熱する場合を考える。上面と下面の温度差が小さいうちは水は静止しているが温度差が大きくなると対流が起こる。ところが静かに静かに加熱すると温度差が大きくなっても対流が起こらない事があるが、これを棒で少しかきまぜると、たちまちに対流が起こる。すなわち、温度差が小さい時は安定な静止状態が存在し温度差が大きくなると不安定な静止状態と安定な対流状態が存在する。



第19図 分岐現象の例

備考 分岐図が第20図の様であるとする。運動方程式が無遠慮への発散を許さないものとした場合、定理4より、すべての軌跡は安定な周期軌跡に近づいて行く。図に示す様に同じ初期値から出発しても、外部変数 μ のわずかな変化に対して行き着く先が大きく変わる事があり

得る。この事は、大気現象の劇的変化である brocking 現象などを連想させる。



第20図 定義8備考の説明図

定義9 特異点 (singularity)

$x_0(\mu)$ を定常状態とすると、これは運動方程式の解であるから、

$$\Phi_i(x_0(\mu), \mu) = \frac{dx_{0i}(\mu)}{dt} + f_i(x_0(\mu), \mu) = 0,$$

$$i=1, 2,$$

であるが、これに加えてある特定の $\mu = \mu_0$ に対して

$$\frac{\partial \Phi_i(x_0(\mu_0), \mu_0)}{\partial x_j} = \delta_{ij} \frac{d}{dt} + \frac{\partial f_i(x_0(\mu_0), \mu_0)}{\partial x_j}$$

が周期関数の範囲で零固有 vector を持つ時、 $(x_0(\mu_0), \mu_0)$ を特異点と呼ぼう。ただし上式で δ_{ij} は Kronecker の delta 記号である。すなわち、

$$i=j \Rightarrow \delta_{ij}=1, \quad i \neq j \Rightarrow \delta_{ij}=0$$

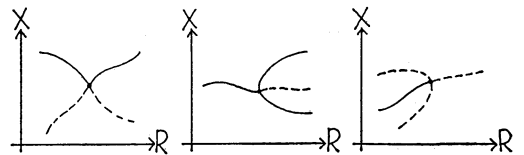
定理5 分岐点の必要条件

分岐点は特異点である。

なぜならば、 $(x_0(\mu_0), \mu_0)$ を分岐点とすると、これは運動方程式の解であるから $\Phi(x_0(\mu_0), \mu_0) = 0$ であるが、これが特異点でないとすると、陰関数定理により x は μ の関数として周期関数の範囲で、 $(x_0(\mu_0), \mu_0)$ の近傍において一意に解けて、分岐は生じない。

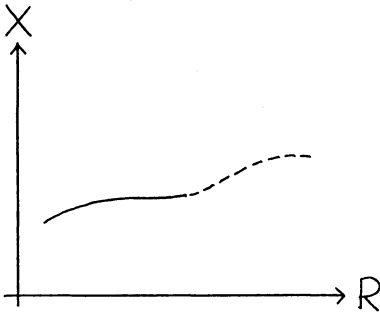
定理6 安定性の交替

分岐点を境として安定定常状態は不安定定常状態となる。

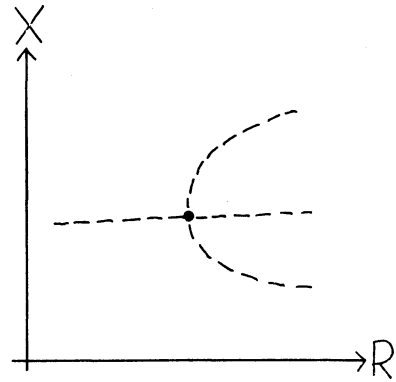


第21図 定理6の説明図1

逆に分岐点を経ずに安定性が失われる事はない。すなわち第22図の様な事は起こらない。



第22図 定理6の説明図2



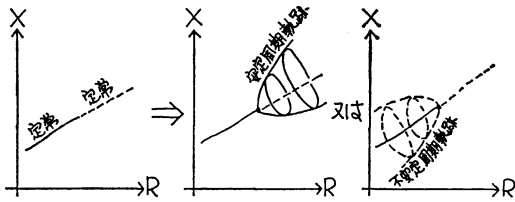
第24図 定理6注意の説明図

なぜならば、定理5より分岐点は特異点であるが、

$$\frac{\partial \Phi_i(x_0(\mu_0), \mu_0)}{\partial x_j} = \delta_{ij} \frac{d}{dt} + \frac{\partial f_i(x_0(\mu_0), \mu_0)}{\partial x_j}$$

が周期関数の範囲で零固有 vector を持つのは $\partial f_i(x_0(\mu_0), \mu_0) / \partial x_j$ が実部零の固有値を持つ時であり、この時、 $e^{-t \frac{\partial f_i(x_0(\mu_0), \mu_0)}{\partial x_j}}$ の固有値 λ で、 $|\lambda|=1$ となるものが存在する事になる。すなわち、 $\mu = \mu_0$ を境として、 $|\lambda| < 1 \rightarrow |\lambda| > 1$ が起こり、安定性が失われる。

備考 定常状態の範囲でならば分岐点を経ずに安定性が失われる事はある。もし、その様な事があるならば、そこにおいては必ず、非定常周期軌跡の分岐が起こっている。



第23図 定理6の備考の説明図

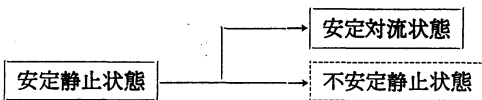
注意 例えば第24図の様な、安定性の交替の起こらない分岐点も存在する。

これは分岐点を境として

$$|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| > 1 \rightarrow |\lambda_1| > 1, |\lambda_2| > 1$$

と言う変化が起こる場合である。

例 定義9の例で見た様に安定静止状態が不安定静止状態に変わると共に安定対流状態が出現している。



定義10 摂動系 (perturbed system)

考えている系の運動方程式を

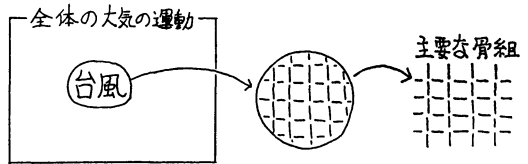
$$\frac{dx}{dt} + f(x, \mu) = 0$$

とする。これに摂動が加わったものを考え、

$$\frac{dx}{dt} + F(x, \mu, \alpha) = 0, \quad F(x, \mu, 0) = f(x, \mu)$$

を運動方程式とする系を摂動系と呼ぶ。微小補助変数 α は摂動を表現し、摂動が無い時、すなわち $\alpha = 0$ の時、摂動系は元の系に一致する。

例 台風系の数学的模型を考えよう。これはひとつの台風とその近傍を全体の大気の運動の中から引きぬき、かつ台風の運動にとって重要と思われるものに着目し、それ以外の物理的あるいは化学的諸過程を簡単な変数で代表させるか無視したものである。従って、この様にして作られた模型には、簡単化もしくは無視した部分が摂動として加わり得る。



第25図 摂動系の説明図

定義11 構造安定性 (structural stability)

現実を理想化して作った数学的模型には、いろいろな(無数の)摂動が加わり得る。ある系

$$\frac{dx}{dt} + f(x, \mu) = 0$$

が、それに対する任意の摂動系

$$\frac{dx}{dt} + F(x, \mu, \alpha) = 0, \quad F(x, \mu, 0) = f(x, \mu)$$

と似ている時 (解の定性的ふるまいが同じである時), この系は構造安定であると呼ばれ, それに似ていない摂動系が存在する時, 構造不安定と呼ばれる.

以下において, この事に関連して, 特に, ある系の分岐図が, 摂動が加わる事によってどの様に変化するのかを調べるが, その前に 2. において, 低次元への還元について述べる.

2. 低次元への還元

定義12 流れ (flow)

次の運動方程式を持つ n 次元状態空間の系を考えよう.

$$\frac{dx_i}{dt} + f_i(x) = 0, \quad i=1, 2, \dots, n$$

初期値 x_i から出発した時間 t における状態を $\phi_i(x, t)$ と書いて, これを x_i から出発する流れと言う. もちろんこれは運動方程式の解であるから,

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_i(x, t) + f_i(\phi(x, t)) = 0$$

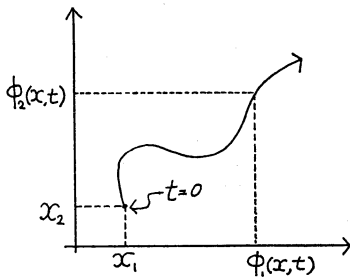
となる. x_i から出発した時間 t_1+t_2 後の状態は $\phi_i(x, t_1+t_2)$ であるが, これは $\phi_i(x, t_1)$ から出発した時間 t_2 後の状態とも見做せるから,

$$\phi_i(x, t_1+t_2) = \phi_i(\phi(x, t_1), t_2)$$

となる. また, 定常状態 x_{oi} に対しては,

$$\phi_i(x_{oi}, t) = x_{oi}$$

となる.



第26図 流れの説明図

定理7 流れの線形化演算子

流れ $\phi_i(x, t)$ に対して, $n \times n$ 行列

$$\frac{\partial \phi_i(x, t)}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1(x, t)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1(x, t)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n(x, t)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_n(x, t)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

を流れの線形化演算子と言う. 定常状態 x_{oi} に対して, これは次の様に表現される.

$$\frac{\partial \phi_i(x_{oi}, t)}{\partial x_j} = e^{-t} \frac{\partial f_i(x_{oi})}{\partial x_j}$$

例えば, 1次元の場合を考えると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) + f(\phi(x, t)) = 0$$

$f(\phi(x, t))$ を定常状態 x_0 のまわりで展開して,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} \right\} (\phi(x, t) - x_0) = -N(\phi(x, t) - x_0)$$

ここで $N(\phi(x, t) - x_0)$ は, $\phi(x, t) - x_0$ の2次以上の関数である. これを解いて,

$$\phi(x, t) - x_0 = e^{-t} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} (x - x_0)$$

$$-e^{-t} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} \int_0^t dt e^{t} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} N(\phi(x, t) - x_0)$$

これを x で微分し, $x = x_0$ と置いて,

$$\frac{\partial \phi(x_0, t)}{\partial x} = e^{-t} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x}$$

n 次元の場合も同様に計算される.

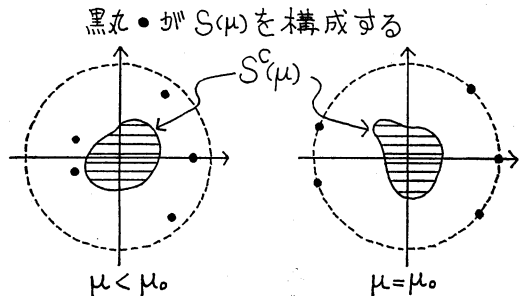
定理8 特異点近傍での固有値の分割

次の運動方程式によって記述される外部変数 μ を持つ系を考える.

$$\frac{dx_i}{dt} + f_i(x, \mu) = 0, \quad i=1, 2, \dots, n$$

流れは外部変数 μ の関数となる. $\phi_i(x, \mu, t)$. $x_{oi}(\mu)$ を $\mu < \mu_0$ において安定な定常状態とし, $(x_0(\mu_0), \mu_0)$ を特異点とする. この時, $n \times n$ 行列 $\frac{\partial \phi_i(x_0(\mu), \mu, t)}{\partial x_j}$ の固有値の集合 $S_p \frac{\partial \phi_i(x_0(\mu), \mu, t)}{\partial x_j}$ は, 次の様に分割される.

$$S_p \frac{\partial \phi_i(x_0(\mu), \mu, t)}{\partial x_j} = S(\mu) \cup S^c(\mu)$$



第27図 定理7の説明図

ここで、

$$S(\mu) = \{\lambda \mid |\lambda| < 1\} \quad \mu < \mu_0, \quad S^c(\mu) = \{\lambda \mid |\lambda| < 1\} \\ = \{\lambda \mid |\lambda| = 1\} \quad \mu = \mu_0$$

なぜならば、 $x_{oi}(\mu)$ から少し離れた状態を、 $x_{oi}(\mu) + \delta x_i$ として δx_i に対する運動方程式を解けば、

$$\delta x_i(t) = \sum_{j=1}^n e^{-t \frac{\partial f_i(x_0(\mu), \mu)}{\partial x_j}} \delta x_j(0) \\ = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_i(x_0(\mu), \mu)}{\partial x_j} \delta x_j(0)$$

となるが、 $\mu < \mu_0$ では $x_{oi}(\mu)$ は安定だから、固有値はすべて、 $|\lambda| < 1$ となる。 $\mu = \mu_0$ で特異点となるから、

$$\frac{\partial \phi_i(x_0(\mu_0), \mu_0)}{\partial x_j} = \delta_{ij} \frac{d}{dt} + \frac{\partial f_i(x_0(\mu_0), \mu_0)}{\partial x_j}$$

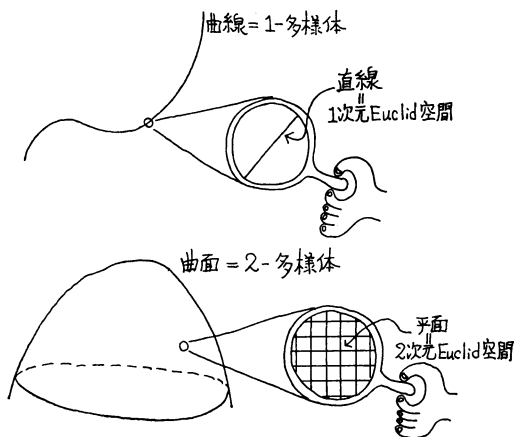
は周期関数の範囲で零固有 vector を持つ。故に

$\frac{\partial f_i(x_0(\mu_0), \mu_0)}{\partial x_j}$ は実部零の固有値を持ち、従って、定理

7 より、 $|\lambda| = 1$ となる固有値が存在する。

定義13 多様体 (manifold)

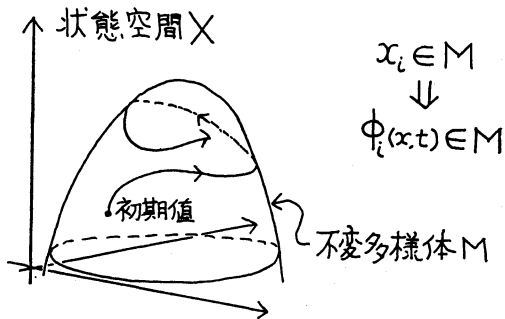
局所的に n 次元 Euclid 空間と同じ構造をしている距離空間を n -多様体と言う。例えば曲線は局所的に1次元 Euclid 空間であるから、1-多様体、曲面は局所的に2次元 Euclid 空間であるから2-多様体である。



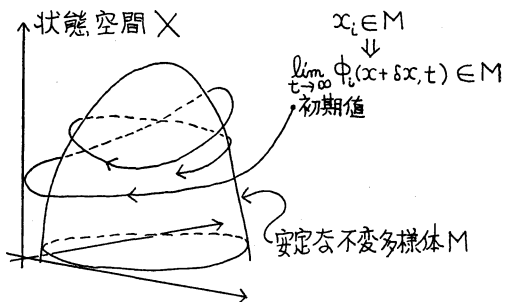
第28図 多様体の説明図

状態空間 X の多様体 M 上の任意の点 x から出発した流れが M 上にとどまる時、 M は不変多様体と呼ばれる。

状態空間 X の不変多様体 M の近傍の任意の点 x から出発した流れが M に近づいて行く時、 M は安定であると呼ばれる。



第29図 不変多様体の説明図

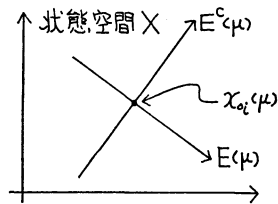


第30図 安定な不変多様体の説明図

定理9 安定な不変多様体

定理8 で述べた $S(\mu)$ に属する固有空間を $E(\mu)$ とし、 $S^c(\mu)$ に属する固有空間を $E^c(\mu)$ とし、 $x_{oi}(\mu)$ を原点として状態空間を $E(\mu)$ と $E^c(\mu)$ に分割する。

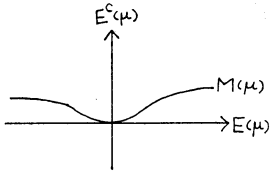
$$X = E(\mu) \oplus E^c(\mu)$$



第31図 定理9の説明図1

この時、原点 $x_{oi}(\mu)$ の近傍で次の条件を満たす多様体 $M(\mu)$ が存在する。

- ① $Dim M(\mu) = Dim E(\mu)$ 、ただし Dim は次元。
- ② 原点 $x_{oi}(\mu) \in M(\mu)$ であり、原点 $x_{oi}(\mu)$ において $M(\mu)$ は $E(\mu)$ に接する。
- ③ $M(\mu)$ は安定な不変多様体である。



第32図 定理9の説明図2

理由は以下のとおりである。

原点 $x_{0i}(\mu)$ から少し離れた状態を $x_{0i}(\mu) + \delta x_i$ とし、 δx_i の非線形項を無視すると、

$$\delta x_i(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_i(x_0(\mu), \mu, t)}{\partial x_j} \delta x_j(0)$$

故に、もし $\delta x_i(0) \in E(\mu)$ ならば $\delta x_i(t) \in E(\mu)$ であり、もし $\delta x_i(0) \in E^c(\mu)$ ならば $\delta x_i(t) \in E^c(\mu)$ である。すなわち、 $E(\mu), E^c(\mu)$ は不変部分空間である。

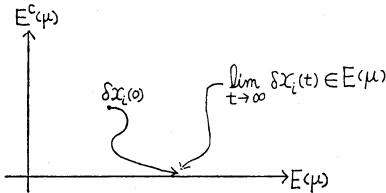
$$\delta x_i(0) = \delta x_i'(0) + \delta x_i''(0), \quad \delta x_i'(0) \in E(\mu),$$

$$\delta x_i''(0) \in E^c(\mu)$$

とすると、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \delta x_i(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \phi_i(x_0(\mu), \mu, t)}{\partial x_j} \delta x_j'(0) \\ &+ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \phi_i(x_0(\mu), \mu, t)}{\partial x_j} \delta x_j''(0) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \phi_i(x_0(\mu), \mu, t)}{\partial x_j} \delta x_j'(0) \in E(\mu) \end{aligned}$$

すなわち、 $E(\mu)$ は安定な不変部分空間である。

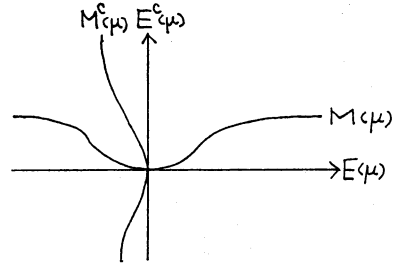


第33図 定理9の説明図3

無視した非線形項の影響で、まっすぐな不変部分空間 $E(\mu), E^c(\mu)$ は、曲がった不変多様体 $M(\mu), M^c(\mu)$ となる。原点 $x_{0i}(\mu)$ においては非線形項は零であるから $M(\mu), M^c(\mu)$ は $E(\mu), E^c(\mu)$ に一致する。すなわち $M(\mu), M^c(\mu)$ は $E(\mu), E^c(\mu)$ に接する。

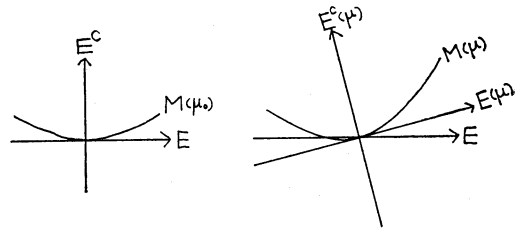
備考 定理8, 定理9より次の事がわかる。特異点の近傍における分岐図の様子を調べる問題は、元の状態空間 X から、 $|\lambda|=1$ を満たす固有値 λ に属する固有空間 $E = E(\mu_0)$ へと還元される。

なぜならば、着目する周期軌跡は、すべて $M(\mu)$ 上にあるが $M(\mu)$ は $\mu = \mu_0$ において E と接し、 $\mu \neq \mu_0$



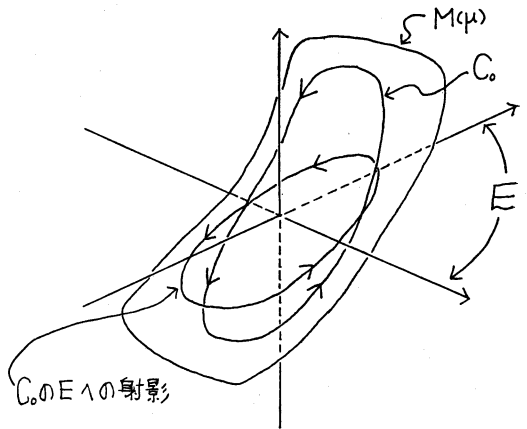
第34図 定理9の説明図4

においては、 $M(\mu)$ は $E(\mu)$ と接するから、一般に $E = E(\mu_0)$ に対しては少しだけ傾く。



第35図 定理9備考の説明図1

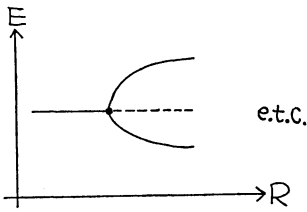
故に $M(\mu)$ 上の周期軌跡の分布は、それらの E 上への射影の分布と本質的に同じものとなる。



第36図 定理9備考の説明図2

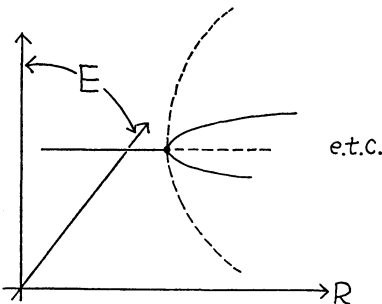
E が1次元となるのは $n \times n$ 行列 $\frac{\partial f_i(x_0(\mu_0), \mu_0)}{\partial x_j}$ が1つの零固有値を持つ場合であり、この時、 $\frac{\partial \phi_i(x_0(\mu_0), \mu_0)}{\partial x_j} = \delta_{ij} \frac{d}{dt} + \frac{\partial f_i(x_0(\mu_0), \mu_0)}{\partial x_j}$ は定常状態の範囲で零固有

vector を持ち従って定常状態の解の一意性が破ぶれ、定常状態から定常状態が分岐し得る。



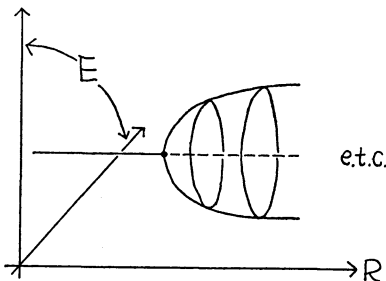
第37図 定理9備考の説明図3

E が2次元となるのは $\frac{\partial f_i(x_0(\mu_0), \mu_0)}{\partial x_j}$ が2つの零固有値を持つ場合と1対の共役純虚数固有値を持つ場合である。前者の場合 $\frac{\partial \Phi_i(x_0(\mu_0), \mu_0)}{\partial x_j}$ は定常状態の範囲で零固有 vector を持ち従って定常状態から定常状態が分岐し得る。



第38図 定理9備考の説明図4

後者の場合 $\frac{\partial \Phi_i(x_0(\mu_0), \mu_0)}{\partial x_j}$ は定常状態の範囲では零固有 vector を持たず、故に特異点の近傍において定常状態は1つしかないが、周期関数の範囲では零固有 vector を持ち従って周期軌跡の一意性が破れ定常状態から非定常な周期軌跡が分岐し得る。



第39図 定理9備考の説明図5

例 1963年 Lorenz は容器に入った液体を下から加熱した場合の対流現象を考察して次の方程式を導いた。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma x_1 - \sigma x_2 \\ x_1 x_3 - \mu x_1 + x_2 \\ b x_3 - x_1 x_2 \end{pmatrix} = 0$$

ここで $\sigma > 0$ は液体のある性質を表し、 $b > 0$ は容器の形状を表す数である。 μ は液体の上面と下面の温度差を表し、これが外部変数となる。

$$f_i(x, \mu) = \begin{pmatrix} \sigma x_1 - \sigma x_2 \\ x_1 x_3 - \mu x_1 + x_2 \\ b x_3 - x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

であるから、 $f_i(0, \mu) = 0$ 、すなわち $x_i = 0$ は、すべての μ に対して定常状態である。

$$\frac{\partial f_i(x, \mu)}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \sigma & -\sigma & 0 \\ x_3 - \mu & 1 & x_1 \\ -x_2 & -x_1 & b \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f_i(0, \mu)}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \sigma & -\sigma & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

これは、 $\mu = 1$ において1つの零固有値を持つので、 $(x, \mu) = (0, 1)$ は特異点となり、1次元定常状態分岐の問題となる。

3. 1次元定常状態分岐の問題

定義14 開折 (unfolding)

$(x, \mu) = (0, 0)$ を特異点とする1次元の系

$$\frac{dx}{dt} + f(x, \mu) = 0$$

に対して摂動系を

$$\frac{dx}{dt} + F(x, \mu, \alpha) = 0, \quad F(x, \mu, 0) = f(x, \mu)$$

とする。ここで $\alpha = (\alpha_2, \alpha_3, \dots)$ は摂動変数である。考えるべき事は、元の分岐図、

$$\{(x, \mu) | f(x, \mu) = 0\}$$

と摂動系の分岐図、

$$\{(x, \mu) | F(x, \mu, \alpha) = 0\}$$

の関係である。摂動変数 α も外部変数と考えて $(\mu, \alpha) = (\mu, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ を $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ と書いて、これをあらためて外部変数と呼び、これらが構成する空間を外部空間と呼ぶ。 $f(x) = f(x, 0)$ を $F(x, \alpha)$ のすべての外部変数 α が零になったものとする。すなわち、 $f(x) = F(x, 0)$ 。この時、 $F(x, \alpha)$ は $f(x)$ の開折であると言われる。 $f(x)$ に摂動が加わる仕方は無限であるから、無限に異なる開折が存在する。

定義15 定常相図 (stationary phase portrait)

$f(x)$ の開折 $F(x, \alpha)$ に対して,

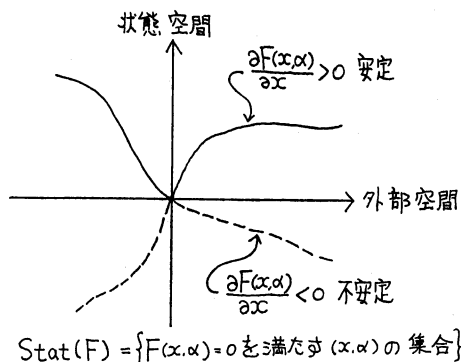
$$Stat(F) = \{(x, \alpha) \mid F(x, \alpha) = 0\}$$

を F の定常相図と言う。これは、運動方程式

$$\frac{dx}{dt} + F(x, \alpha) = 0$$

によって記述される系の定常状態を表す。

定常状態の内、 $\partial F(x, \alpha) / \partial x > 0$ の所は安定であり、 $\partial F(x, \alpha) / \partial x < 0$ の所は不安定である。



第40図 定常相図の説明図

定義16 開折の同値性 (equivalence)

$f(x)$ の異なる2つの開折 $F_1(x, \alpha)$ と $F_2(x, \beta)$ に対して次の様な変換が存在する時、 F_1 と F_2 は同値であると言い、 $F_1 \sim F_2$ と書く。

$$F_1(x, \alpha) = S(x, \alpha) F_2(X(x, \alpha), B(\alpha))$$

ここで、 $S(x, \alpha) > 0$, $\partial X(x, \alpha) / \partial x > 0$, $X(0, 0) = 0$, $B(0) = 0$ であり、 $(x, \alpha) \rightarrow \Psi(x, \alpha) = (X(x, \alpha), B(\alpha))$ は座標変換 (可逆) である。可逆であるからもちろん α の個数と β の個数は等しい。

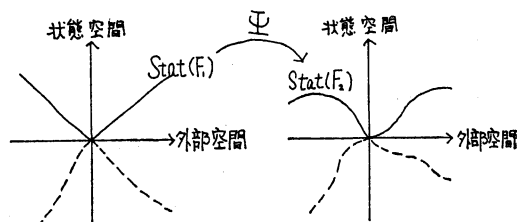
任意の $(x, \alpha) \in Stat(F_1)$ に対して $F_1(x, \alpha) = 0$. $S(x, \alpha) > 0$ であるから $F_2(\Psi(x, \alpha)) = 0$. 従って、 $\Psi(x, \alpha) \in Stat(F_2)$ かつ、 Ψ が可逆である事を考えると、 $\Psi Stat(F_1) = Stat(F_2)$ となり、定常相図の定性的な位置関係は変わらない。一方、

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1(x, \alpha)}{\partial x} &= \frac{\partial S(x, \alpha)}{\partial x} F_2(\Psi(x, \alpha)) \\ &\quad + S(x, \alpha) \frac{\partial X(x, \alpha)}{\partial x} \frac{\partial F_2(X, B)}{\partial X} \end{aligned}$$

故に、 $(x, \alpha) \in Stat(F_1)$ に対して、

$$\frac{\partial F_1(x, \alpha)}{\partial x} = S(x, \alpha) \frac{\partial X(x, \alpha)}{\partial x} \frac{\partial F_2(X, B)}{\partial X}$$

従って $Sgn \frac{\partial F_1(x, \alpha)}{\partial x} = Sgn \frac{\partial F_2(X, B)}{\partial X}$ となり安定性も変わらない。すなわち、 $F_1 \sim F_2$ とは $Stat(F_1)$ と $Stat(F_2)$ が同値 (本質的に同じ) である事を意味する。



第41図 開折の同値性の説明図

定義17 普遍開折 (universal unfolding)

$f(x)$ の開折 $U(x, \alpha)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$, $p < \infty$, が次の条件を満たす時、準普遍と呼ばれる。

$f(x)$ の任意の開折 $F(x, \beta)$ に対して

$$F(x, \beta) = S(x, \beta) U(X(x, \beta), A(\beta))$$

となる S, X, A が存在する。ここで、 $S(x, \beta) > 0$, $\partial X(x, \beta) / \partial x > 0$, $X(0, 0) = 0$ であり、 $x \rightarrow X(x, \beta)$ は座標変換 (可逆) であり、 $\beta \rightarrow A(\beta)$ は、一般に α の個数と β の個数が違うので可逆ではないし、個数が同じでも可逆でない場合もある。

準普遍開折の内外部変数の個数が最小のものを普遍開折と言う。もし、有限個の外部変数を持つ、どの様な開折をもってしても上の条件を満たせない時、準普遍開折は存在しないと言う。上式の意味する所は、 $Stat(F)$ が $Stat(U)$ の1つの断面と同値であると言う事である。非摂動系に摂動が加わる仕方は無限であるから、無限に異なる定常相図が出現するかも知れない。ところが、もし普遍開折が存在するならば、それらが有限個の変数で書き尽される事になる。

定義18 接空間 (tangent space)

$f(x)$ の普遍開折を $U(x, \alpha)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ とする。 $x = 0$ の近傍で定義された、なめらかな関数の集合を ε_x と書く。 $p(x) \in \varepsilon_x$ として $f(x)$ に摂動を加えて $F(x, \beta) = f(x) + \beta p(x)$ を作る。 U は普遍開折であるから、

$$F(x, \beta) = f(x) + \beta p(x) = S(x, \beta) U(X(x, \beta), A(\beta)),$$

$$S(x, 0) = 1, \quad X(x, 0) = x, \quad A(0) = 0$$

を満たす S, X, A が存在する。両辺を β で微分し、 $\beta = 0$ と置くと、

$$p(x) = \frac{\partial S(x, 0)}{\partial \beta} f(x) + \frac{\partial X(x, 0)}{\partial \beta} \frac{df(x)}{dx} + \sum_{i=1}^p \frac{dA_i(0)}{d\beta} \frac{\partial U(x, 0)}{\partial \alpha_i}$$

すなわち、任意の $p(x) \in \varepsilon_x$ に対して $a(x), b(x) \in \varepsilon_x$ と定数 $\lambda_i, i=1, 2, \dots, p$, が存在して、

$$p(x) = a(x)f(x) + b(x) \frac{df(x)}{dx} + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial U(x, 0)}{\partial \alpha_j}$$

と書ける。上式の右辺第1項と第2項の集合を f の接空間と言い、 $T(f)$ と書く。

$$T(f) = \left\{ a(x)f(x) + b(x) \frac{df(x)}{dx} \mid a(x), b(x) \in \varepsilon_x \right\}$$

上の結果は次の事を意味する。もし $U(x, \alpha)$ が $f(x)$ の普遍開折であれば

$$\varepsilon_x = T(f) + \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{\partial U(x, 0)}{\partial \alpha_i} \mid \lambda_i \in R \right\}$$

実は、準普遍開折に対して上と逆の命題も真であり、次の定理が成立する。

定理11 Mather 第1定理

$U(x, \alpha)$ が $f(x)$ の準普遍開折である事と

$$\varepsilon_x = T(f) + \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{\partial U(x, 0)}{\partial \alpha_i} \mid \lambda_i \in R \right\}$$

となる事は同値である。

定義19 部分空間 (subspace)

任意の $p(x), q(x) \in \varepsilon_x, a, b \in R$ に対して、 $ap(x) + bq(x) \in \varepsilon_x$ であるから ε_x は vector 空間である。 ε_x の部分集合 I が vector 空間である時、 I は ε_x の部分空間と呼ばれ、 $I < \varepsilon_x$ と書かれる。 $I = \{a(x)p(x) \mid a(x) \in \varepsilon_x\}$ の時、 I は $p(x)$ によって生成された部分空間と呼ばれ、 $I = \langle p(x) \rangle$ と書かれる。 $T(f)$ は $f(x)$ と $df(x)/dx$ によって生成された部分空間である。

$$T(f) = \langle f(x), \frac{df(x)}{dx} \rangle$$

ε_x の部分空間 $m = \{p(x) \mid p(x) \in \varepsilon_x, p(0) = 0\}$ を考える。これは $m = \{a(x)x \mid a(x) \in \varepsilon_x\}$ と書きなおせるので、 x によって生成された部分空間である、 $m = \langle x \rangle$ 。任意の自然数 k に対して部分空間 m^k を次の様に定義する。

$$m^k = \langle x^k \rangle = \{a(x)x^k \mid a(x) \in \varepsilon_x\}$$

定義20 商空間 (quotient space)

$I < \varepsilon_x$ とする。任意の $a(x) \in \varepsilon_x$ の I への成分を零としたものを作る空間を ε_x の I による商空間と言い、 ε_x/I と書く。ところで、 $\{\sum_{i=1}^p \lambda_i \partial U(x, 0)/\partial \alpha_i \mid \lambda_i \in R\}$ の次元は高々 p であるから、定理11は、商空間 $\varepsilon_x/T(f)$ が有限次元空間 $\{\sum_{i=1}^p \lambda_i \partial U(x, 0)/\partial \alpha_i \mid \lambda_i \in R\}$ に含ま

れる事を示している。

定義21 余次元 (codimension)

$I, J < \varepsilon_x$ とする。任意の $p(x) \in \varepsilon_x$ が $a(x) \in I$ と $b(x) \in J$ の和に書かれ、かつ $I \cap J = \{0\}$ の時、 ε_x は I と J に分割されると言われ、 $\varepsilon_x = I \oplus J$ と書かれる。 J は I の補空間と呼ばれ $J = I^\circ$ と書かれる。補空間 I° の次元を I の余次元と言い、 $\text{Codim } I$ と書く。商空間 ε_x/I は I° と本質的に同じものとなる。これらは同型であると言われ、 $\varepsilon_x/I \cong I^\circ$ と書かれる。

普遍開折とは準普遍開折の中で、含まれる外部変数の個数が最小のものであるから、定理11は、

$\text{Codim } T(f) = p =$ 普遍開折に含まれる外部変数の個数

である事を示している。もし、ある自然数 k に対して $m^k \subset T(f)$ となれば、 $\varepsilon_x/T(f) \subset \varepsilon_x/m^k = P^{k-1}$ となる。ここで P^{k-1} は $(k-1)$ 次以下の多項式の全体である。故に、 $\text{Codim } T(f) = \text{Dim } (\varepsilon_x/T(f)) < \text{Dim } (\varepsilon_x/m^k) = \text{Dim } P^{k-1} = k$ 。従って $\text{Codim } T(f) < \infty$ となり、普遍開折が存在する。実は、上と逆の命題も真であり、次の定理が成立する。

定理12 Mather 第2定理

$m^k \subset T(f)$ となる自然数 k が存在する事と $f(x)$ の普遍開折が存在する事は同値である。

定義22 Jet

$f(x) \in \varepsilon_x$ の $x=0$ のまわりの Taylor 展開の k 次までを $f(x)$ の k -Jet と言い、 $J^k f(x)$ と書く。

$$J^k f(x) = \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} \frac{d^n f(0)}{dx^n} x^n$$

定理13 普遍開折の存在

P^k に次の様な開稠密部分集合 V が存在する。「もし $J^k f(x) \in V$ ならば $f(x)$ は普遍開折を持つ。」要するに、ほとんどすべての $f(x)$ が普遍開折を持つ。

定理14

もし、互いに独立な $N_i(x), i=1, 2, \dots, p$ に対して、

$$\varepsilon_x = T(f) \oplus \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i N_i(x) \mid \lambda_i \in R \right)$$

ならば $f(x) + \sum_{i=1}^p \alpha_i N_i(x)$ は $f(x)$ の普遍開折である。

なぜならば、 $f(x) + \sum_{i=1}^p \alpha_i N_i(x) = U(x, \alpha)$ と置くと、

$$\frac{\partial U(x, 0)}{\partial \alpha_i} = N_i(x), \text{ 従って}$$

$$\varepsilon_x = T(f) \oplus \left\{ \sum_{i=1}^p \frac{\partial U(x, 0)}{\partial \alpha_i} \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

故に定理11より $U(x, \alpha)$ は $f(x)$ の普遍開折である。

備考 $U(x, \alpha)$ を見つけるには, $\varepsilon_x/T(f)$ を張る, 互いに独立な $N_i(x)$ を見つければよい. ところが定理12よりある自然数 k があって, $m^k \subset T(f)$. もちろん $\varepsilon_x > T(f) > m^k$ であるから

$$\varepsilon_x/T(f) \cong (\varepsilon_x/m^k)/(T(f)/m^k)$$

となる. $\varepsilon_x/m^k = P^{k-1}$, $T(f)/m^k = J^{k-1}T(f)$ であるから,

$$\varepsilon_x/T(f) \cong P^{k-1}/J^{k-1}T(f)$$

となる. すなわち, 無限次元空間 ε_x 上の問題から, k 次元空間 P^{k-1} 上の問題へと還元される.

例 2. の最後の例で述べた様に, 3次元の Lorenz の式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma x_1 - \sigma x_2 \\ x_1 x_3 - \mu x_1 + x_2 \\ b x_3 - x_1 x_2 \end{pmatrix} = 0$$

の分岐図を求める問題は, 特異点 $(x, \mu) = (0, 1)$ の近傍で, 1次元定常状態分岐の問題へ還元される. この還元は, 3×3 行列,

$$\frac{\partial f_i(0, 1)}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \sigma & -\sigma & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

の1次元零固有空間への射影を計算する事によって達成されるが, もっと簡単に次の連立方程式を解く事によって求める事ができる.

$$f_i(x, \mu) = \begin{pmatrix} \sigma x_1 - \sigma x_2 \\ x_1 x_3 - \mu x_1 + x_2 \\ b x_3 - x_1 x_2 \end{pmatrix} = 0$$

これより, $x_1 = x$ として,

$$f(x, \mu) = \frac{x^3}{b} + (1-\mu)x$$

$\mu - 1 = \nu$ と置くと $(x, \nu) = (0, 0)$ が特異点となり

$$f(x, \nu) = \frac{x^3}{b} - \nu x \quad \text{これより } f(x) = \frac{x^3}{b}$$

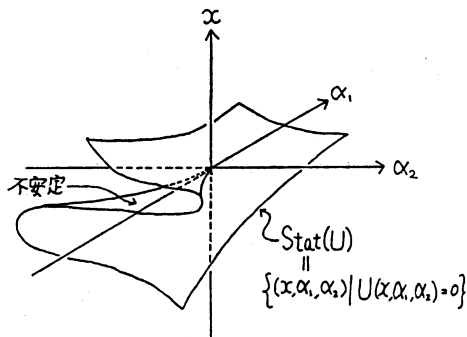
従って, $T(f) = \langle f(x), df(x)/dx \rangle = \langle x^3/b, 3x^2/b \rangle = \langle x^2 \rangle = m^2, \varepsilon_x/T(f) = \varepsilon_x/m^2 = P^1 = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

故に, $\text{Codim } T(f) = 2$ であり, $f(x)$ の普遍開折 $U(x, \alpha)$ は, 次の様になる.

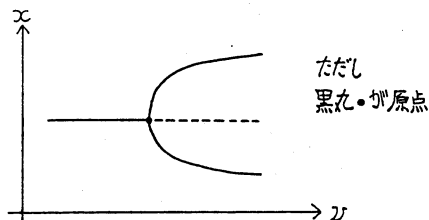
$$U(x, \alpha) = f(x) + \alpha_1 x + \alpha_2 = \frac{x^3}{b} + \alpha_1 x + \alpha_2$$

$\partial U(x, \alpha)/\partial x = 3x^2/b + \alpha_1$ であるから, $3x^2/b + \alpha_1 > 0$ で

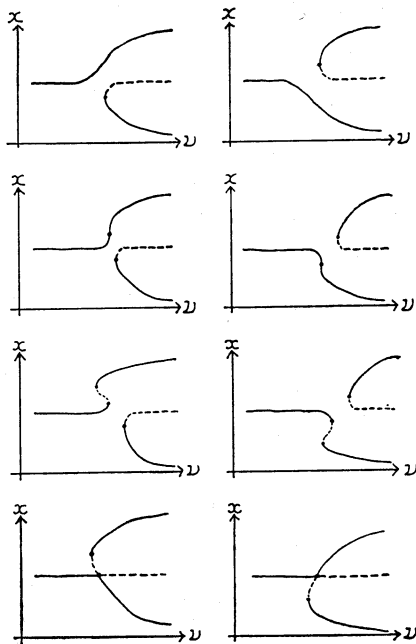
安定, $3x^2/b + \alpha_1 < 0$ で不安定となる. 従って $\text{Stat}(U)$ は第42図のようになる.



第42図 Lorenz 模型の説明図1



第43図 Lorenz 模型の説明図2



第44図 Lorenz 模型の説明図3

$f(x, \nu) = x^3/b - \nu x$ の分岐図, すなわち, 定常相図 $Stat(f(x, \nu)) = \{(x, \nu) | f(x, \nu) = 0\}$ は $Stat(U)$ の $\alpha_2 = 0$ 断面である.

従って, これに摂動が加わった場合に出現し得る分岐図は, $Stat(U)$ の原点近傍の, $\alpha_2 = 0$ から, 僅かにずれた可能な断面を考えて, 次の様になる.

4. 2次元周期軌跡分岐の問題

$(x_i, \mu) = (0, 0)$ を特異点とする, 次の運動方程式によって記述される系を考える.

$$\Phi_i(x, \mu) = \frac{dx_i}{dt} + f_i(x, \mu) = 0, \quad i=1, 2$$

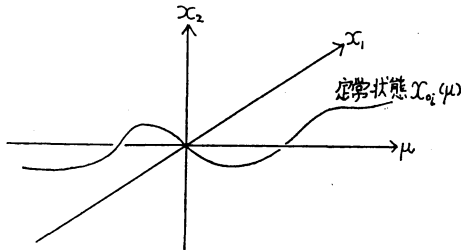
もちろん $f_i(0, 0) = 0$ であるが, これに加えて,

$$S_p \frac{\partial f_i(0, 0)}{\partial x_j} = (+i\omega, -i\omega)$$

とする. ただし $\pm i\omega$ の i は虚数単位である.

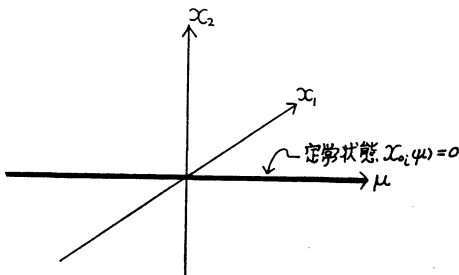
定理15

原点 $(x_i, \mu) = (0, 0)$ の近傍において, 各 μ に対して定常状態 $x_{oi}(\mu)$ が一意に存在する.



第45図 定理15の説明図

なぜならば, $\partial f_i(0, 0)/\partial x_j$ が零固有値を持たないから, $\partial \Phi_i(0, 0)/\partial x_j$ は定常状態の範囲で零固有 vector を持たず, 従って $\Phi_i(x, \mu) = 0$ は $(x_i, \mu) = (0, 0)$ の近傍で x_i について定常状態の範囲で一意に解ける.



第46図 定理15備考の説明図

備考 (x_i, μ) を適当に座標変換する事により $x_{oi}(\mu) = 0$ とする事ができる. この時, すべての μ に対して, $f_i(0, \mu) = 0$ となる. この定常状態は $\mu < 0$ において安定であるとしよう.

定理16

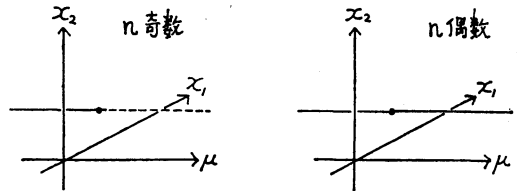
$$S_p \frac{\partial f_i(0, \mu)}{\partial x_j} = \{A^+(\mu), A^-(\mu)\},$$

$$A^\pm(\mu) = \sigma(\mu) \pm i\omega(\mu), \quad \sigma(0) = 0, \quad \omega(0) = \omega$$

とする. $\mu = 0$ が $\sigma(\mu)$ の n 位の零点であるとする. すなわち,

$$\sigma(0) = 0, \quad \frac{d\sigma(0)}{d\mu} = 0, \dots, \frac{d^{n-1}\sigma(0)}{d\mu^{n-1}} = 0, \quad \frac{d^n\sigma(0)}{d\mu^n} \neq 0$$

この時, もし n が奇数ならば定常状態の安定性は変わり, 偶数ならば変わらない.



ただし黒丸が原点

第47図 定理16の説明図

なぜならば, $A^\pm(\delta\mu)$ を $\mu = 0$ のまわりで展開すれば,

$$A^\pm(\delta\mu) = A^\pm(0) + \delta\mu \frac{dA^\pm(0)}{d\mu} + \dots + \frac{(\delta\mu)^n}{n!} \frac{d^n A^\pm(0)}{d\mu^n} + \dots$$

となるが, これより

$$Re A^\pm(\delta\mu) = \frac{(\delta\mu)^n}{n!} \frac{d^n \sigma(0)}{d\mu^n}$$

となり, n が奇数ならば $\delta\mu$ の付号によって $Re A^\pm(\delta\mu)$ の付号が変わり, 偶数ならば変わらない.

備考

$$S_p \frac{\partial f_i(0, 0)}{\partial x_j} = \{+i\omega, -i\omega\} \text{ であるから}$$

$$\frac{\partial \Phi_i(0, 0)}{\partial x_j} = \delta_{ij} \frac{d}{dt} + \frac{\partial f_i(0, 0)}{\partial x_j}$$

は周期関数の範囲で零固有 vector を持ち, 従って周期関数の範囲で解の一意性が破れ, 周期軌跡が分岐する可能性があるが, n が奇数の場合と偶数の場合では分岐の様子が, がらりと変わる.

定理17

$\partial f_i(0, 0)/\partial x_j$ の固有値 $+i\omega$ に属する右および左固有

vector をそれぞれ r_i, l_i とし

$\Sigma_{i=1}^2 l_i r_i = \Sigma_{i=1}^2 l_i^* r_i^* = 2$ と規格化する。ここで $*$ は複素共役を表わす。 $(U_{1i}, U_{2i}) = (Re r_i, -Im r_i), (U_{1i}^+, U_{2i}^+) = (Re l_i, Im l_i)$ を基底 vector に選ぶと, $Re r_{il_j}, Im r_{il_j}, \partial f_i(0,0)/\partial x_j$ は, それぞれ次の様に表現される。

$$Re r_{il_j} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Im r_{il_j} = \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f_i(0,0)}{\partial x_j} = -\omega \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

ここで, Im は虚部を意味する。

なぜならば, r_i^*, l_i^* は $-i\omega$ に属する右および左固有 vector であるから, $\Sigma_{i=1}^2 l_i r_i^* = \Sigma_{i=1}^2 l_i^* r_i = 0$ となるが, これを使い,

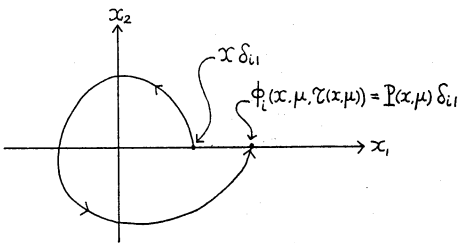
$$(Re r_{il_j})_{11} = \Sigma_{i=1}^2 \Sigma_{j=1}^2 (Re l_i)(Re r_j) = 1$$

$$(Re r_{il_j})_{12} = \Sigma_{i=1}^2 \Sigma_{j=1}^2 (Re l_i)(Re r_j)(-Im r_j) = 0$$

以下同様に計算される。

定義23 Poincaré 写像 (Poincaré map)

時間 $t=0$ に点 x_i から出発した軌跡は時間 t には $\phi_i(x, \mu, t)$ にある。時間 $t=0$ に x_1 軸上の点 $x_i = x \delta_{i1}$ から出発した軌跡が原点のまわりをまわって時間 $\tau(x, \mu)$ に再び x_1 軸上の点 $\phi_i(x, \mu, \tau(x, \mu)) = \phi_i(x, \mu, \tau(x, \mu)) \delta_{i1}$ に至るとする。 $\phi_i(x, \mu, \tau(x, \mu)) = P(x, \mu)$ とすると, これは μ を助変数とする x の関数となる。これを Poincaré 写像と言う。



第48図 Poincaré 写像の説明図

定理18

$$\tau = \tau(0, 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \mu \rightarrow 0}} \tau(x, \mu) = \frac{2\pi}{\omega}$$

すなわち, $\mu=0$ における $x_i=0$ は, 半径 $r=0$, 周期 $\tau=2\pi/\omega$ の周期軌跡である。

理由は以下のとおりである。

1987年3月

極座標での運動方程式を

$$\frac{dz_i}{dt} + g_i(z, \mu) = 0$$

とする。ただし, $z_1=r, z_2=\theta, x_i=r t_{r_i} \theta, t_{r_1}=\cos, t_{r_2}=\sin$ であり, $dt_{r_i} \theta/d\theta = -\Sigma_{j=1}^2 \varepsilon_{ij} t_{r_j} \theta$ である。

$$\frac{dx_i}{dt} = \Sigma_{j=1}^2 \frac{\partial x_i}{\partial z_j} \frac{dz_j}{dt}$$

$$g_i(z, \mu) = \Sigma_{j=1}^2 \left(\frac{\partial x_i}{\partial z_j} \right)^{-1} f_j(x, \mu)$$

すなわち, $g_i(z, \mu) = \Sigma_{j=1}^2 (\delta_{ij} t_{r_j} \theta - \delta_{2j} \frac{1}{r} \Sigma_{k=1}^2 \varepsilon_{jk} t_{r_k} \theta)$ $f_j(r t_{r_j} \theta, \mu)$ これより $\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \mu \rightarrow 0}} g_i(z, \mu) = -\delta_{2i} \Sigma_{j=1}^2 \Sigma_{k=1}^2 \varepsilon_{jk} t_{r_k} \theta$

$$t_{r_k} \theta \Sigma_{i=1}^2 \frac{\partial f_j(0,0)}{\partial x_i} t_{r_i} \theta$$

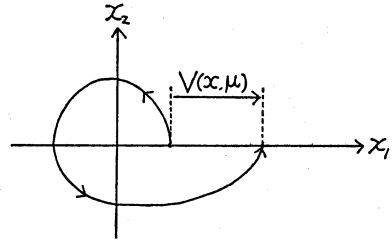
ここで定理17および $\Sigma_{i=1}^2 t_{r_i} \theta t_{r_i} \theta = 1$ を使い

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \mu \rightarrow 0}} g_i(z, \mu) = \delta_{2i} \omega$$

すなわち, $r \rightarrow 0, \mu \rightarrow 0$ において $dr/dt=0, d\theta/dt=-\omega$ 。

定義24 変位関数 (displacement function)

$P(x, \mu) - x = V(x, \mu)$ と置き, 変位関数と呼ぶ。



第49図 変位関数の説明図

もし, $V(x, \mu)=0$ の解が存在すれば, それは $V(x, \mu)$ の定義より, 周期軌跡を表す。

定理19

$V(x, \mu)$ は次の諸式を満たす。

$$V(0, 0) = \frac{\partial V(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial^2 V(0, 0)}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^n V(0, 0)}{\partial \mu^n} = 0, \quad n=1, 2, \dots$$

なぜならば, $V(x, \mu) = P(x, \mu) - x = \phi_i(x, \mu, \tau(x, \mu)) - x$ であるから, $V(0, 0) = \phi_i(0, 0, \tau) - 0 = 0$ となる。

一方, $\frac{\partial V(x, \mu)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_i(x, \mu, \tau(x, \mu))}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_i(x, \mu, \tau(x, \mu))}{\partial t} \frac{\partial \tau(x, \mu)}{\partial x} - 1$

これより,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(0,0)}{\partial x} &= \frac{\partial \phi_1(0,0,\tau)}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_1(0,0,\tau)}{\partial t} \frac{\partial \tau(0,0)}{\partial x} - 1 \\ &= e^{-\tau} \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x_1} - 1 = \frac{1}{2} r_1 l_1 e^{-\tau i \omega} \frac{1}{2} r_1^* l_1^* e^{i \tau i \omega} - 1 \\ &= R e r_1 l_1 - 1 \end{aligned}$$

定理17より $R e r_1 l_1 = \delta_{11} = 1$ であるから $\partial V(0,0)/\partial x = 0$ となる。以下同様に計算される。

備考 $V(0,0) = 0, \partial^n V(0,0)/\partial \mu^n = 0$ であるから $V(x, \mu) = x \tilde{V}(x, \mu)$ となる。 $x=0$ は $V(x, \mu) = 0$ の1つの解となるが、これは元の定常状態を表す。 $\tilde{V}(x, \mu) = 0$ の解が周期軌跡を表し、

$$\tilde{V}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{V(x,0)}{x} = \frac{\partial V(0,0)}{\partial x}$$

である。

定理20

$$\frac{\partial \tilde{V}(0,0)}{\partial \mu} = \frac{\partial^2 V(0,0)}{\partial \mu \partial x} = -\frac{2\pi}{\omega} \frac{d\sigma(0)}{d\mu}$$

なぜならば、 $\tilde{V}(x, \mu) = V(x, \mu)/x$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}(0,0)}{\partial \mu} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{\partial V(x,0)}{\partial \mu} = \frac{\partial^2 V(0,0)}{\partial x \partial \mu} \\ &= \frac{\partial \phi_1(0,0,\tau)}{\partial \mu \partial x_1} + \frac{\partial^2 \phi(0,0,\tau)}{\partial t \partial x_1} \frac{\partial \tau(0,0)}{\partial \mu} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial \phi_1(0, \mu, \tau(0, \mu))}{\partial x_1} \right]_{\mu=0} \\ &\quad - \left[\frac{\partial}{\partial x_1} f_1(\phi(x,0,\tau(x,0)), 0) \right]_{x=0} \frac{\partial \tau(0,0)}{\partial \mu} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \mu} e^{-\tau(0,\mu)} \frac{\partial f_1(0,\mu)}{\partial x_1} \right]_{\mu=0} \\ &\quad - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \phi_i(0,0,\tau)}{\partial x_1} \frac{\partial f_i(0,0)}{\partial x_i} \frac{\partial \tau(0,0)}{\partial \mu} \end{aligned}$$

ここで $\partial f_i(0, \mu)/\partial x_j$ および $\partial \phi_i(0,0,\tau)/\partial x_j$ を、 $\partial f_i(0, \mu)/\partial x_j, \partial \phi_i(0,0)/\partial x_j$ の固有値と固有 vector で表現し、定理17を使って上の命題を得る。

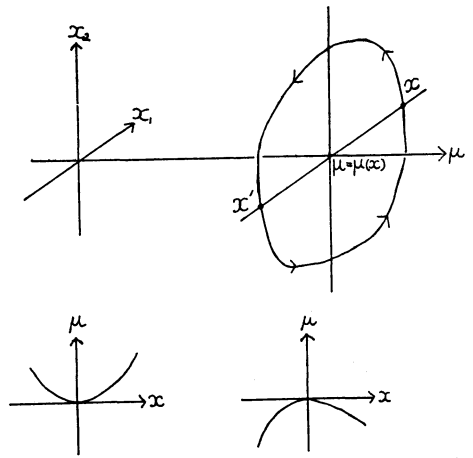
備考 もし $d\sigma(0)/d\mu \neq 0$ ならば $\partial \tilde{V}(0,0)/\partial \mu \neq 0$ だから、 $\tilde{V}(x, \mu) = 0$ が $(x, \mu) = (0,0)$ の近傍で μ について一意に解けて、 $\mu = \mu(x), \mu(0) = 0$ で表される周期軌跡が存在する。

定理21

$\tilde{V}(x, \mu) = 0$ の解 $\mu = \mu(x)$ に対して、 $d^n \mu(0)/dx^n \neq 0$ となる最小の n は偶数である。これを N とする。

なぜならば、 $\mu = \mu(x)$ において x_1 軸の正の側の点 x から出発する周期軌跡が存在すれば、この軌跡が x_1 軸の負の側を横切る点を x' とすると、これは x' から出発すると見なす事もできる。従って、 $\mu(x) = \mu(x')$ とな

り $\mu(x)$ は $x=0$ において上凸もしくは下凸となる。



第50図 定理21の説明図

故に、 $d^n \mu(0)/dx^n \neq 0$ となる最小の n は偶数である。

定理22

$\tilde{V}(x, \mu) = 0$ の解 $\mu = \mu(x)$ が存在する時、 $V(x, \mu)$ は次式を満足する。

$$\frac{\partial^k V(0,0)}{\partial x^k} = 0, \quad k=1, 2, \dots, N-1,$$

$$\frac{\partial^{N+1} V(0,0)}{\partial x^{N+1}} = -(N+1) \frac{\partial^2 V(0,0)}{\partial x \partial \mu} \frac{d^N \mu(0)}{dx^N}$$

なぜならば、 $\tilde{V}(x, \mu) = 0$ の解を $\mu = \mu(x)$ とすると、すべての x に対して、 $\tilde{V}(x, \mu(x)) = 0$ 、これを k 回微分して、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^k V(x, \mu(x))}{dx^k} = \frac{\partial^k V(x, \mu)}{\partial x^k} + \frac{\partial V(x, \mu)}{\partial \mu} \frac{d^k \mu(x)}{dx^k} \\ &\quad + \left\{ \frac{d\mu}{dx}, \dots, \frac{d^{k-1} \mu}{dx^{k-1}} \text{ のついた項} \right\} \end{aligned}$$

これより $k \leq N$ に対して $\partial^k V(0,0)/\partial x^k = 0$,

$$\frac{\partial^{N+1} V(0,0)}{\partial x^{N+1}}$$

$$+ (N+1) (\partial^2 V(0,0)/\partial x \partial \mu) (d^N \mu(0)/dx^N) = 0$$

となる。

定理23

$\tilde{V}(x, \mu) = 0$ の解 $\mu = \mu(x)$ が存在すれば、 $P(x, \mu)$ は次式を満足する。

$$\left[\frac{d^k}{dx^k} \frac{\partial P(x, \mu(x))}{\partial x} \right]_{x=0} = 0, \quad 1 \leq k \leq N-1,$$

$$\left[\frac{d^N}{dx^N} \frac{\partial P(x, \mu(x))}{\partial x} \right]_{x=0} = \frac{N}{N+1} \frac{\partial^{N+1} V(0,0)}{\partial x^{N+1}}$$

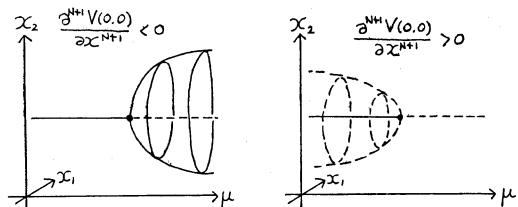
なぜならば、 $P(x, \mu(x)) = V(x, \mu(x)) + x$ であるから、 $\partial P(x, \mu) / \partial x = \partial V(x, \mu) / \partial x + 1$ 、これを x で k 回微分して、

$$\frac{d^k}{dx^k} \frac{\partial P(x, \mu(x))}{\partial x} = \frac{\partial^{k+1} V(x, \mu)}{\partial x^{k+1}} + \frac{\partial^2 V(x, \mu)}{\partial x \partial \mu} \frac{d^k \mu(x)}{dx^k} + \left\{ \frac{d\mu}{dx}, \dots, \frac{d^{k-1} \mu}{dx^{k-1}} \text{のついた項} \right\}$$

$x = \mu = 0$ として、上の命題を得る。

定理24

$\tilde{V}(x, \mu) = 0$ の解 $\mu = \mu(x)$ で表される周期軌跡は、もし $\partial^{N+1} V(0, 0) / \partial x^{N+1} < 0$ ならば安定で、 $\mu > 0$ の側にあり、もし $\partial^{N+1} V(0, 0) / \partial x^{N+1} > 0$ ならば不安定で、 $\mu < 0$ の側にある。

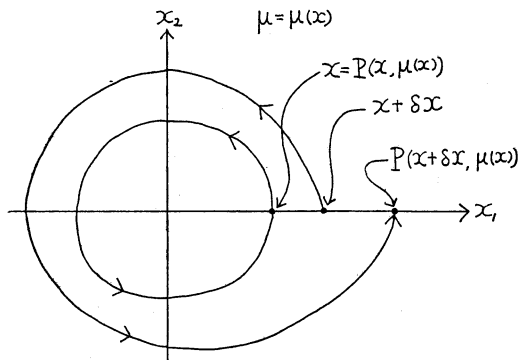


ただし黒丸が原点

第51図 定理24の説明図1

理由は以下のとおりである。

$\mu = \mu(x)$ の周期軌跡に対して、 $P(x, \mu(x)) = x$ 。 x より少しずれた x_1 軸上の点 $x + \delta x$ から出発する軌跡を考える。



第52図 定理24の説明図2

$P(x + \delta x, \mu(x)) = \frac{\partial P(x, \mu(x))}{\partial x} \delta x$ であるから、

$$\left| \frac{\partial P(x, \mu(x))}{\partial x} \right| < 1$$

ならば安定である。定理19より、 $\partial P(0, 0) / \partial x = 1$ であり、もし $\partial^{N+1} V(0, 0) / \partial x^{N+1} < 0$ ならば、定理23より $\partial P(x, \mu(x)) / \partial x$ は $x = 0$ で極大となるので $x = 0$ の近傍で $|\partial P(x, \mu(x)) / \partial x| < 1$ となり、安定となる。一方この時、定理22より $d^N \mu(0) / dx^N > 0$ となり軌跡は、 $\mu > 0$ の側に存在する。逆の場合も同様に計算される。

定義25 核 (Kernel)

$\frac{\partial \Phi_i(0, 0)}{\partial x_j} = \delta_{ij} \frac{d}{dt} + \frac{\partial f_i(0, 0)}{\partial x_j}$ の零固有空間を $\frac{\partial \Phi_i(0, 0)}{\partial x_j}$ の核と言い、 $Ker \frac{\partial \Phi_i(0, 0)}{\partial x_j}$ と書く。

$$Ker \frac{\partial \Phi_i(0, 0)}{\partial x_j} = \{ -a R e^{i\omega t} + b I m r e^{i\omega t} \mid a, b \in R \}$$

すなわち、核は無次元関数空間の、 $R e^{i\omega t}$ と $I m r e^{i\omega t}$ で張られる、2次元部分空間である。実は、特異点の近傍における周期軌跡の分布は、それらの核の上への射影の分布と本質的に同じものになり、問題は無次元関数空間から2次元の核へ還元される。

定理25

核の上では周期軌跡は円軌跡となる。

なぜならば、核上の周期軌跡を $x_i(t)$ とすると、

$$\begin{aligned} x_i(t) &= a R e^{i\omega t} + b I m r e^{i\omega t} \\ &= a (\cos \omega t R e r_i - \sin \omega t I m r_i) \\ &\quad + b (\cos \omega t I m r_i + \sin \omega t R e r_i) \\ &= (a \cos \omega t + b \sin \omega t) R e r_i \\ &\quad + (a \sin \omega t - b \cos \omega t) (-I m r_i) \end{aligned}$$

すなわち、角振動数 ω で反時計まわりにまわる。

半径 $\sqrt{a^2 + b^2}$ の円軌跡となる。

備考 核の上では周期軌跡は円軌跡だから、 \tilde{V} は x^2 と μ のみの関数となる。

$$\tilde{V} = \tilde{V}(x^2, \mu)$$

例

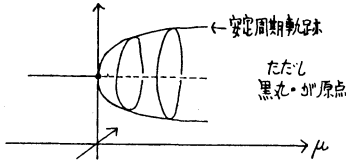
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V(0, 0)}{\partial \mu \partial x} &= \frac{\partial \tilde{V}(0, 0)}{\partial \mu} = -\frac{2\pi}{\omega} \frac{d\tilde{\theta}(0)}{d\mu} > 0, \\ \frac{\partial^3 V(0, 0)}{\partial x^3} &= \frac{\partial^4 V(0, 0)}{\partial x^4} = 0, \quad \frac{\partial^5 V(0, 0)}{\partial x^5} < 0 \end{aligned}$$

の場合を考えよう。(x, μ) = (0, 0) の近傍において

$$V(x, \mu) = -ax^5 + bx\mu = -x(ax^4 - b\mu), \quad a, b > 0$$

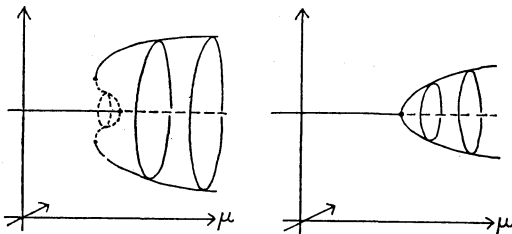
となる。 $x = 0$ は元の定常状態を表し、 $ax^4 - b\mu = 0$ が周期軌跡を表す。故に分岐図は第53図のようになる

次に定常状態 $x_i = 0$ を存在せしめる範囲での摂動を考える。 $T(x^4) = \langle x^4, 4x^3 \rangle = \langle x^3 \rangle = m^3$, $\epsilon_x / T(f) = \epsilon_x /$



第53図 周期軌跡分岐の例1 (摂動なし)

$m^3 = P^2 = \langle ax^2 + bx + c | a, b, c \in R \rangle$. 従って, $\text{Codim } T(f) = 3$ であり, x^4 の普遍開折は, $x^4 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3$ であるが, 定理25の備考より, $\alpha_2 x$ の項は生じない. 故に出現し得る分岐図は第54図の2つとなる.



第54図 周期軌跡分岐の例1 (摂動あり)

例

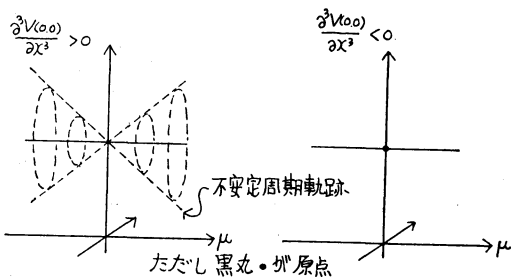
$$\frac{\partial^2 V(0,0)}{\partial x \partial \mu} = -\frac{2\pi}{\omega} \frac{d\sigma(0)}{d\mu} = 0, \quad \frac{\partial^3 V(0,0)}{\partial x^3} \neq 0$$

の場合を考えよう. $d^2\sigma(0)/d\mu^2 > 0$ ならば, $\partial^3 V(0,0)/\partial \mu^2 \partial x < 0$ となり, $d\sigma(0)/d\mu \neq 0$ の場合と同じ様な方法で周期軌跡の存在を示す事ができる. この場合, $(x, \mu) = (0, 0)$ の近傍において,

$$V(x, \mu) = ax^3 - bx\mu^2 = x(ax^2 - b\mu^2), \quad b > 0,$$

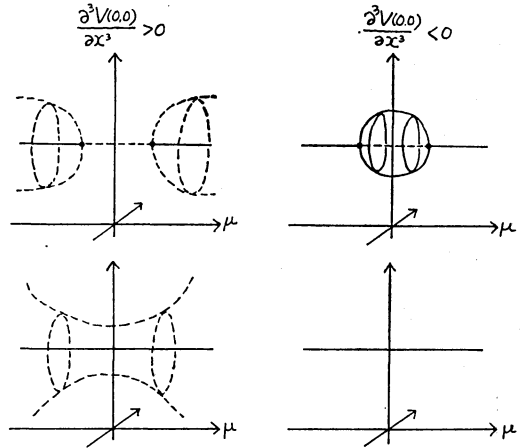
$$\text{sgn } a = \text{sgn } \frac{\partial^3 V(0,0)}{\partial x^3}$$

となる. $x=0$ は元の定常状態を表し, $ax^2 - b\mu^2 = 0$ が周期軌跡を表す. 故に分岐図は第55図の様になる.



第55図 周期軌跡分岐の例2 (摂動なし)

次に定常状態 $x_i=0$ を存在せしめる範囲での摂動を考える. $T(x^2) = \langle x^2, 2x \rangle = \langle x \rangle = m, \quad \varepsilon_x/T(x^2) = \varepsilon_x/m = P^0 = \{a | a \in R\}$. 従って, $\text{Codim } T(x^2) = 1$ であり, x^2 の普遍開折は $x^2 + a$ である. 故に出現し得る分岐図は第56図の様になる.



第56図 周期軌跡分岐の例2 (摂動あり)

たいへん中途半端な感じがするのですが, とりあえず, これで終わりとします. 1章では定常状態, 周期状態あるいは分岐と言った基礎概念について述べ, 2章では元の状態空間の問題を線形化演算子の零固有空間へと低次元化する事について述べましたが, これらの事は3章, 4章で述べた事, すなわち, 無数の摂動の影響が比較的少数の変数で記述される事, に対する準備のためだけのものではなく, 1章, 2章それぞれ自身も本解説の重要な部分として書かれていますので, そのつもりで読んでもらえれば幸いです.

文献

Carr, J. 1981: Applications of Centre Manifold Theory, Springer Verlag Applied Mathematical Sciences 35.

これは2章で述べた, 低次元への還元, の基礎となる, 中心多様体について書かれた本です.

Golubitsky, M. and Schaeffer, D. 1985: Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Springer Verlag Applied Mathematical Sciences 51.

これは3章, 4章で述べた, 摂動の分岐への影響, 及びもっと広く分岐点の構造について書かれた本であり, 特に, 系の対称性と分岐との問題に力点が置かれています.

Guckenheimer, J. and Holmes, P. 1983: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer Verlag Applied Mathematical Sciences 42.

これは、力学系理論全般について書かれた本であり、この本により、力学系の全体像は把握できると思います。

Marsden, J. and McCracken, M. 1976: The Hopf Bifurcation and Its Applications, Springer Verlag Applied Mathematical Sciences 19.

これは、単に Hopf 分岐だけではなく、もっと広く周期解分岐について書かれた、大変有名な本です。

Shirer, H.N. and Wells, R. 1983: Mathematical Structure of the Singularities and the Transitions Between Steady States in Hydrodynamic Systems, Springer Verlag Lecture Notes in Physics 165.

これは3章で述べた、摂動の定常解分岐への影響、及びもっと広く分岐点の構造について書かれた本であり、分岐点の零固有値が縮退している場合の分岐解の安定性をも含めて、大変くわしい議論がなされています。

最後に、気象の分野で力学系理論に関係した最近の論文(ただし、たまたま筆者の目にふれたものだけ)を、あげておきます。

Chao, W.C. 1985: Sudden Stratospheric warmings as catastrophes, J. Atmos. Sci., 42, 1631-1646.

Fraedrich, K. 1986: Estimating the dimensions of weather and climate attractors, J. Atmos. Sci., 43, 419-432.

Iwashima, T. and Yamamoto, R. 1986: Time-space spectral general circulation model, I. Time-space spectral model of low order barotropic system with periodic forcing, J. Meteor. Soc. Japan, 64, 183-196.

Lorenz, E.N. 1986: On the Existence of a slow manifold, J. Atmos. Sci., 43, 1547-1557.

Reinhold, B. 1986: Structural determinism of linear baroclinic waves and simple nonlinear equilibration, J. Atmos. Sci., 43, 1484-1504.

Vautard, R. and Legras, B. 1986: Invariant manifolds, quasi-geostrophy and initialization, J. Atmos. Sci., 43, 565-584.

Yoden, S. 1985: Bifurcation properties of a quasi-geostrophic barotropic, low order model with topography, J. Meteor. Soc. Japan, 63, 535-546.

Yoden, S. 1985: Multiple stable states of quasi-geostrophic barotropic flow over sinusoidal topography, J. Meteor. Soc. Japan, 63, 1031-1045.

気象研究ノート 第155号

—惑星大気—(1987年1月)

足原 修	阿部 豊
辻村 豊	川端 潔
松井孝典	松田佳久
森山 茂	矢野順一

目次

1. 惑星大気内エアロゾルのリモートセンシング
2. 惑星大気の力学
3. 外惑星の光化学
4. 地球大気の起源と進化
5. 地球型惑星の準周期的気候変動

配布価格

通常会員 2,450円 定期購読会員 1,800円 団体会員 3,100円 会員外 3,500円