



天 気

1987年6月
Vol. 34, No. 6

101 (慣性振動)

Peter Rhines の講義ノート「慣性振動」*

余 田 成 男**

10年ぶりで講義を聴いている。Peter Rhines の「地球流体力学」である。大学院生を対象としたもので、気象、海洋、応用数学の学生15人程が出席している。Cambridge 大学出身なので O. Reynolds, G.I. Taylor ……などの親しみを込めた紹介がある。流体の定義から始まって、回転系での基礎方程式系を導出したところで、慣性振動の話となった。冬学期が始まって8時間目である。(普通、50分授業が週3回ある)。扱い方次第で、いろいろな場面で取り上げることの可能な題材であるが、彼の場合、パソコンによる実験も含めて2時間ちかくがこの話題に充てられた。面白い内容だったのでここに紹介してみよう。

1. 方程式系

回転系での運動方程式(水平方向)は、標準的な表記に従って、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \mathbf{F} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1-1)$$

と書ける。ここで、

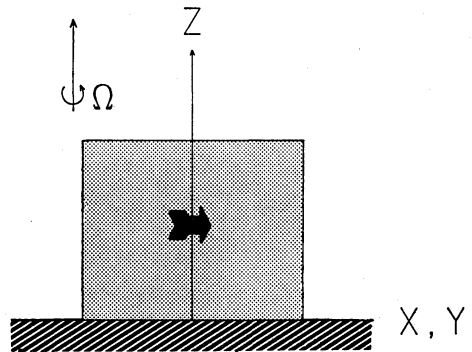
(I) “板”の運動(第1図)を考える:

$$\nabla u = 0, \quad \nabla p = 0 \quad \text{そして} \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0.$$

(II) 粘性項を Rayleigh 摩擦で置換える:

$$\nu \nabla^2 \mathbf{u} \longrightarrow -r\mathbf{u}, \quad r \geq 0.$$

と仮定すると、 $\mathbf{u} = (u, v, 0)$ を変数とする、時間に関



第1図 回転系 (x, y, z) での“板”の運動を考える。板は x - y 平面に平行な2次元運動をする。Rayleigh 摩擦は板の下面での機械的な摩擦と考えても良い。

する1階の線型常微分方程式系を得る:

$$\frac{du}{dt} - fv = F_x - ru, \quad (1-2a)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = F_y - rv. \quad (1-2b)$$

ここで、 $f=2\Omega$ 、ただし、 $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ である。外力が定常の場合と周期変化する場合について、(1-2)の解を求め、その振舞いを調べてみよう。

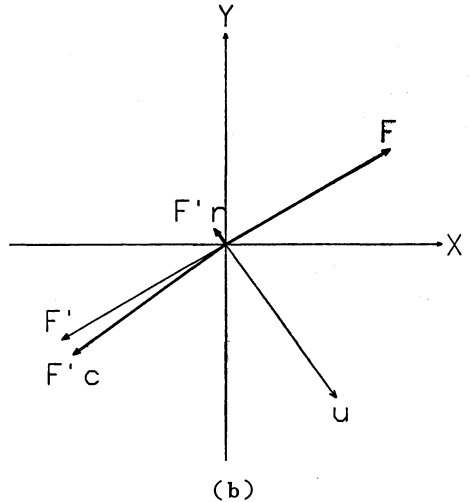
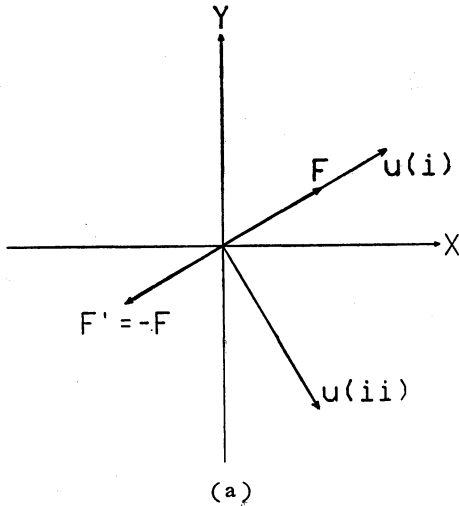
扱いを簡単にするために、複素変数 $W = u + iv$ を導入する。(1-2b)に虚数単位 i を掛けて(1-2a)に加えると次のようになる。

$$\frac{dW}{dt} + (r + if)W = F (= F_x + iF_y). \quad (1-3)$$

ここでは、実数は小文字で、複素数は大文字で表記する

* Peter Rhines' lecture note on inertial oscillations.

** Shigeo Yoden, ワシントン大学大気科学科/日本学術振興会海外特別研究員/京都大学理学部地球物理学教室。



第2図 一定の力 F が働くときの定常解. (a): (i) $f=0, r=0.6$; (ii) $f=0.6, r=0$; (b): $f=1.0, r=0.1$.

ことにする.

2. 定常外力問題

2.1 定常解

F が時間変化しない場合, (1-3) の特解として定常解 ($\frac{dW}{dt} = 0$) がある:

$$W = \frac{F}{r+if} \equiv W_0. \tag{2-1}$$

(注1) $f=0$ (回転なし) とすると $(u, v) = \frac{1}{r}(F_x, F_y)$ で摩擦力と外力が釣り合う (第2図(a), $u(i)$). 一方, $r=0$ (摩擦なし) とすると $(u, v) = \frac{1}{f}(F_y, -F_x)$ で Coriolis 力と外力が釣り合う ($u(ii)$). $f>0$ だと Coriolis 力は $u(ii)$ に対して直角右向となる).

(注2) 一般には, 第2図(b)のように, 外力 F , Coriolis 力 $F'c$, 摩擦力 $F'r$ の釣り合いとなる.

2.2 自由振動解

(1-3) で外力がゼロとして斉次方程式の解を求めると $W = Ae^{-(r+if)t}$ (2-2)

となり, 減衰振動を表す. 周期は $2\pi/f$, 振幅が $1/e$ となる時間は $1/r$ である. A は任意定数で, 初期値 $W(0)$ に等しい. (つまり, 初期値を与えると, その後の運動は決る.) 一般には $r=0$ の解を慣性振動と呼ぶ.

(注3) W の時間変化をガウス平面 (u, v) に記入したものをホドグラフという. $r=0$ の場合, 速さ ($=\sqrt{u^2+v^2}$) は一定 $|A|$ で, 方向が時計回り(北半球;

$f>0$) に変化する (第3図(a)).

(注4) $t=0$ で $x(0)$ にあった粒子の位置 $x(t)$ は, $x(t) = x(0) + \int_0^t u dt$ (2-3)

だから, $X = x + iy$ として (2-2) より

$$X(t) = X(0) + \frac{A}{r+if} (1 - e^{-(r+if)t}) \tag{2-4}$$

となる. ここで, 再び $r=0$ とすると, 運動の軌跡 X は半径が $|A|/f$ の円(時計回りに動く)となる. 第3図(b)が実例で, これを慣性円と呼ぶ. $|A|$ は粒子(そして“板”)の運動の速さであるから, 結局, [速さ] \times [周期] $= 2\pi \times$ [半径] $=$ [円周] の関係である.

2.3 一般解とスイッチ・オン問題

(1-3) の一般解は, 特解 (2-1) と斉次方程式の一般解 (2-2) の和で書けるから,

$$W = W_0 + Ae^{-(r+if)t} \tag{2-5}$$

となる.

ここで, スイッチ・オン問題を考えてみよう. つまり, $t \leq 0$ では静止 ($F=0, W=0$) していたところに, 外力 F が $t=0$ で加えられ, それ以降一定に維持される場合である. $t=0$ で $W=0$ だから (2-5) から $A = -W_0$ となり,

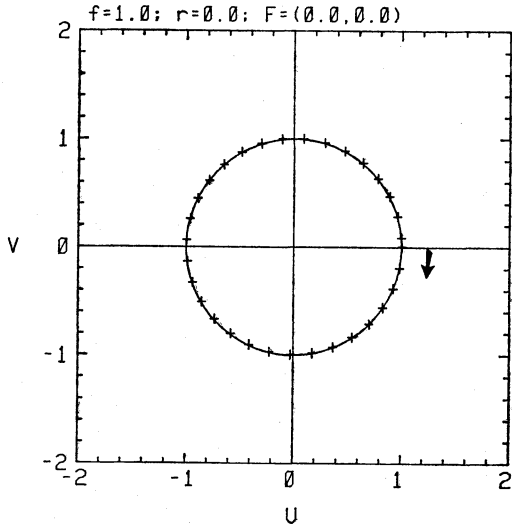
$$W = W_0 (1 - e^{-(r+if)t}) \tag{2-6}$$

を得る. 粒子の位置は,

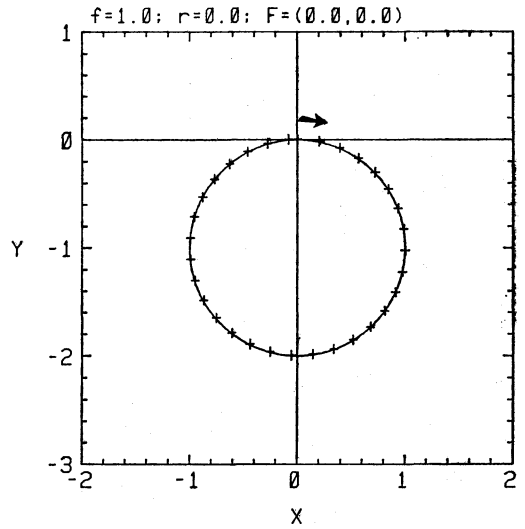
$$X = X(0) + W_0 \left[t + \frac{1}{r+if} (e^{-(r+if)t} - 1) \right] \tag{2-7}$$

となる.

(注5) 第4図に実例を示す. 減衰運動しながら, 最

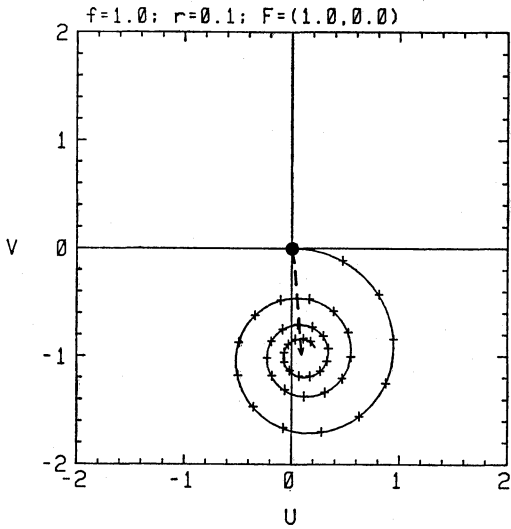


(a)

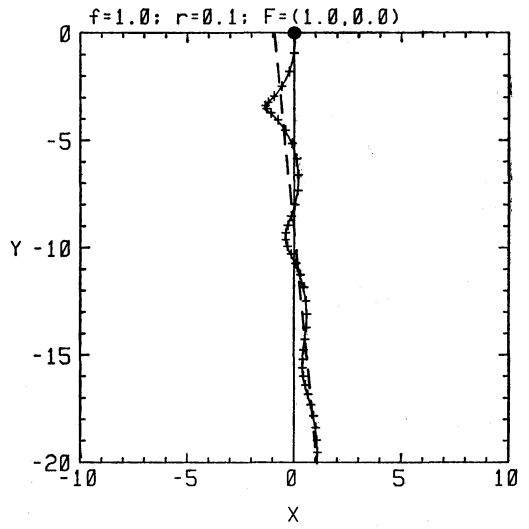


(b)

第3図 慣性振動のホドグラフ (a) と運動の軌跡 (b), つまり, 慣性円.
 $\Delta t=0.2$ 毎に+印をつけている.



(a)



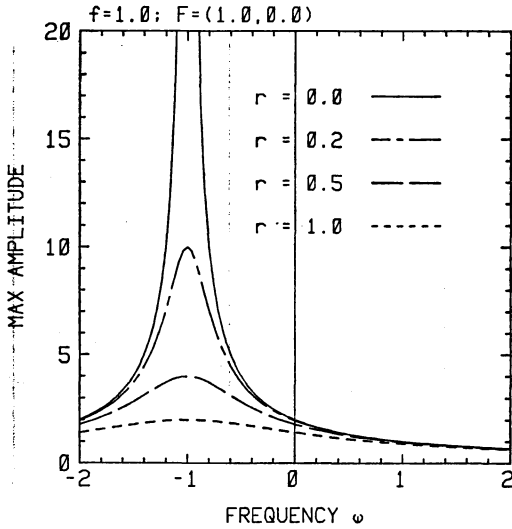
(b)

第4図 定常外力のスイッチ・オン問題の解. (a): ホドグラフ. 最終定常状態 W_0 を破線矢印で示す.
 (b): 運動の軌跡. 時間とともに破線に漸近する. $t=0\sim 20$ で $\Delta t=0.5$ 毎に+印をつける.

終定常状態 W_0 , つまり, 第2図(b)のような平衡状態に漸近する.

(注6) 一般に, 初期値として釣り合っていない状態が与えられたときに, どのようにして, どのような最終状態が得られるかという種の問題を調節問題と呼ぶ.

例えば, Rossby の地衡風調節問題が有名である. ここで, 摩擦による散逸が調節 (Rossby 問題での重力波の役割) を司ると考えると, これも一種の調節問題といえよう.



第5図 共鳴曲線。|W|_{max}はω=-fで最大となる。

3. 周期外力問題

(1-3) で外力が $F_0 e^{i\omega t}$ で周期変化する場合を考えよ

う。方程式は、

$$\frac{dW}{dt} + (r + if)W = F_0 e^{i\omega t} \quad (3-1)$$

特解として

$$W = \frac{F_0}{r + i(\omega + f)} e^{i\omega t} \quad (3-2)$$

が得られるので、(3-1)の一般解は、(2-2)と(3-2)の和となる：

$$W = \frac{F_0}{r + i(\omega + f)} e^{i\omega t} + A e^{-(r+if)t} \quad (3-3)$$

2節と同様に静止状態からのスイッチ・オン問題を考えると、

$$W = \frac{F_0}{r + i(\omega + f)} (e^{i\omega t} - e^{-(r+if)t}) \quad (3-4)$$

となる。(3-4)は外力に応答する強制振動部分と初期の非平衡を解消しようとする調節過程(減衰慣性振動)の重ね合せになっている。

(注7) (3-4)で()内の大きさは高々2であるから、

$$|W| \leq \left| \frac{2F_0}{r + i(\omega + f)} \right| = |W|_{\max} \quad (3-5)$$

となる。速さの最大値|W|_{max}のω依存性を第5図に示す。rが小さいとき、外力の振動数が慣性振動数-f(系の固有振動数)に近づくと、振動の振幅は非常に大きくなる。いわゆる共鳴現象である。

(注8) r=0の共鳴の場合、ω=-fで(3-4)の右辺は不定となり意味をもたなくなるが、次のように考えればよい。r≠0としてω=-fを代入すると、

$$W = \frac{F_0}{r} e^{-ift} (1 - e^{-rt}) \quad (3-6)$$

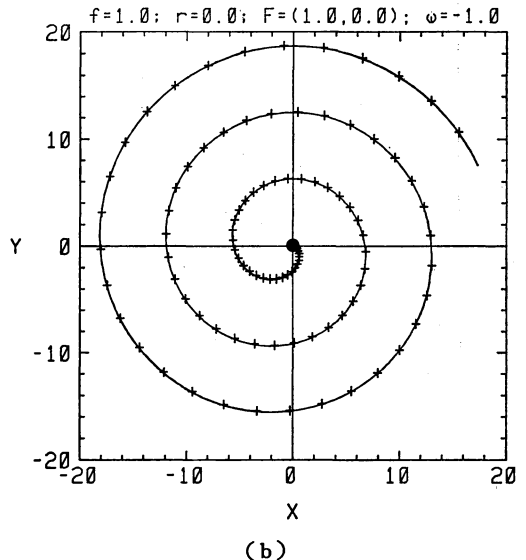
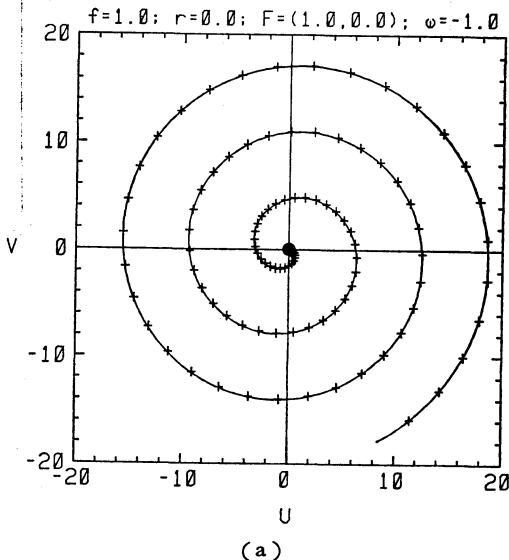
$$e^{-rt} = 1 - rt + \frac{(rt)^2}{2!} - \frac{(rt)^3}{3!} \dots \text{と展開できるので、}$$

$$W = F_0 e^{-ift} \left(t - \frac{rt^2}{2!} + \frac{r^2 t^3}{3!} \dots \right) \quad (3-7)$$

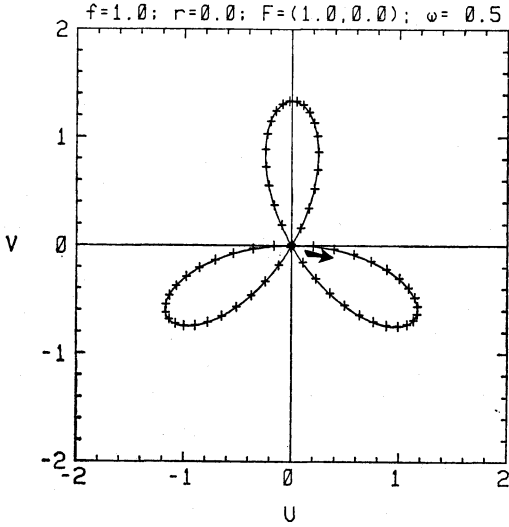
ここで、r→0の極限を考えると

$$W = F_0 t e^{-ift} \quad (3-8)$$

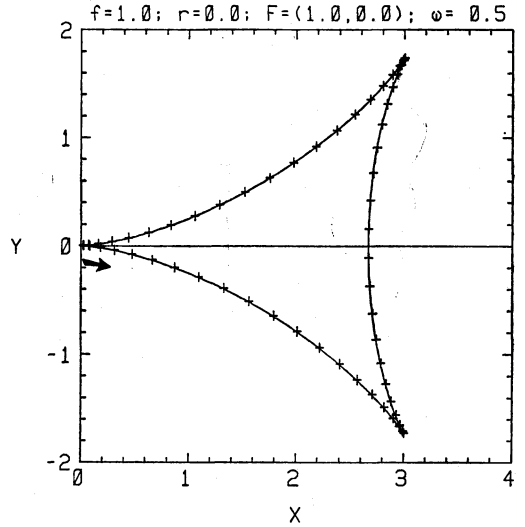
となり、振幅は時間とともに線型に増加する(第6図)。



第6図 共鳴の場合のホドグラフ(a)と運動の軌跡(b)。t=0~20でΔt=0.2毎に十印。

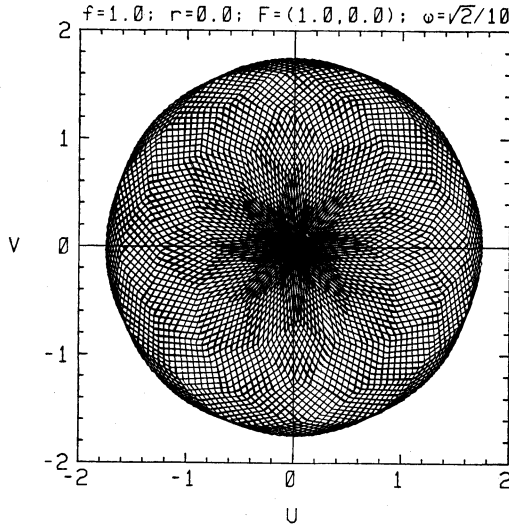


(a)

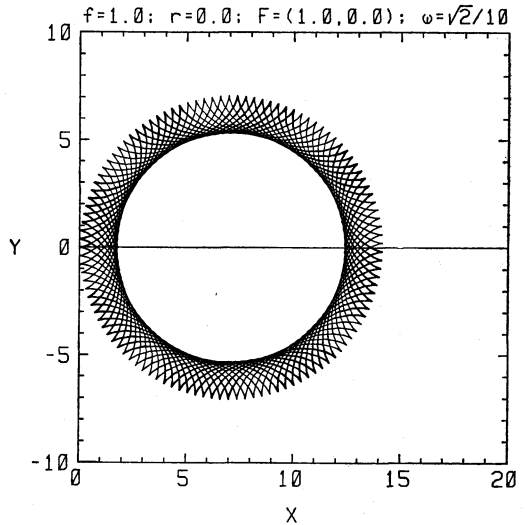


(b)

第7図 周期振動の例。(a): ホドグラフ, (b): 運動の軌跡。ともに三角関数によって作られる平面曲線。(b) はハイポ・サイクロイドと呼ばれる。 $\Delta t=0.2$ 毎に+印。周期 $=4\pi$ 。



(a)



(b)

第8図 準周期振動の例。(a): ホドグラフ, (b) 運動の軌跡。(b) は2次元トーラスと呼ばれる。 $t=0\sim 1000, \Delta t=0.5$ 。

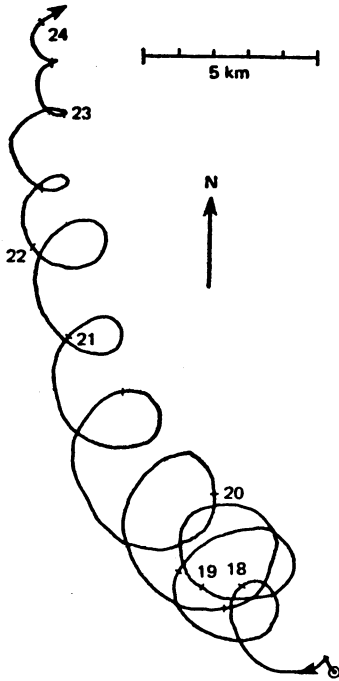
(注9) $r=0$ で $\omega \neq f$ の場合,

$$W = \frac{F_0}{i(\omega+f)} (e^{i\omega t} - e^{-ift})$$

$$= -\frac{2F_0}{\omega+f} \sin\left[\frac{1}{2}(\omega+f)t\right] \times e^{i(\omega-f)t/2} \quad (3-9)$$

となり、2つの単振動の重ね合せになっている。もし ω/f

が有理数 ($=p/q; p, q$ は互いに素な整数) ならば、周期 $T=2\pi p/\omega=2\pi q/f$ の周期振動になる(第7図)。一方、 ω/f が有理数でない場合、決して初期値に戻ることはなく、周期振動ではない。かといっていろいろな振動数が含まれている訳ではない(単に2成分)ので、準周期振動と呼ぶ(第8図)。



第9図 Gustafson と Kullenberg(1936)によるバルチック海での流速観測をベクトル・ダイヤグラムで示したもの (Gill 教科書より)。

4. エネルギー論

エネルギーについて考察してみよう。(1-2a) に u , (1-2b) に v を乗じて、各辺を加えると、次の運動エネルギー方程式を得る：

$$\frac{dK}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \frac{1}{2} (u^2 + v^2) = uF_x + vF_y - r(u^2 + v^2) \tag{4-1}$$

複素数を用いるならば、 $W^* \times (1-3) + W \times (1-3)^*$ より

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} |W|^2 = Re[WF^*] - r|W|^2 \tag{4-2}$$

ここで、*は複素共役、 $Re[]$ は実数部分、 $|W|^2 = WW^*$ を意味する。[運動エネルギー変化率]=[外力の仕事率]+[摩擦力の仕事率]の関係にある。ここで、Coriolis 力の項はエネルギー方程式に顔を出さない。Coriolis 力は速度と直交しているの、粒子に対して何も仕事をしないからである。

第2図の定常解の場合、当然ながら外力項と摩擦項が相殺される。慣性振動の場合は $F = 0$, $r = 0$ で、やはり運動エネルギーは保存される。定常外力のスイッチ・オン問題の場合、(2-1), (2-6) より外力項は

$$Re[WF^*] = \frac{|F|^2}{r^2 + f^2} (r - e^{-rt}(r^2 + f^2)^{1/2} \cos(ft + \alpha)), \tag{4-3}$$

$$\tan \alpha = f/r$$

となる。この項は、 $t \rightarrow \infty$ で -[摩擦項] となり、平衡状態が出現する。

周期外力の場合、(3-4) より

$$Re[WF^*] = \frac{|F_0|^2}{r^2 + (\omega + f)^2} \{ r(\cos \omega t - e^{-rt} \cos ft) + (\omega + f)(\sin \omega t + e^{-rt} \sin ft) \} \tag{4-4}$$

である。 $\omega \neq -f$ で $r = 0$ とすると、エネルギー方程式は

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} |W|^2 = \frac{|F_0|^2}{\omega + f} (\sin \omega t + \sin ft) \tag{4-5}$$

と書ける。一方、共鳴状態の場合は(3-8)より、

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} |W|^2 = |F_0|^2 t \tag{4-6}$$

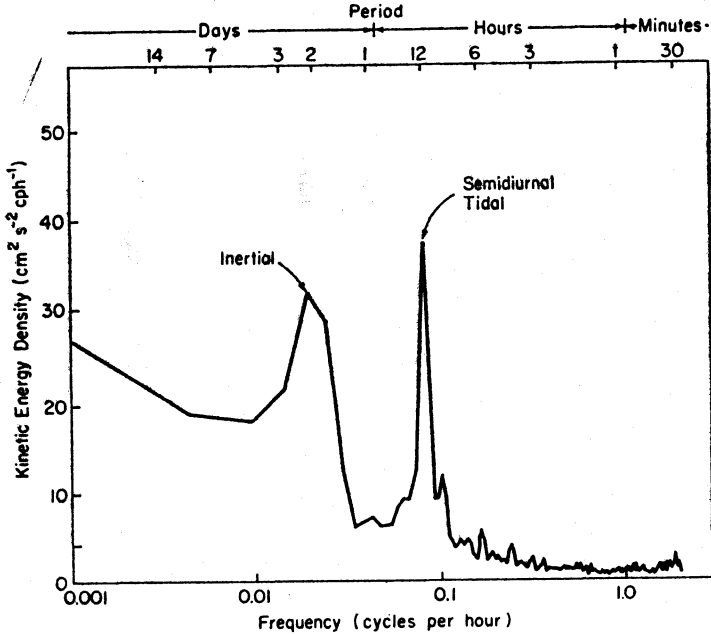
となる。 $K = \frac{1}{2} |W|^2 = \frac{1}{2} |F_0|^2 t^2$ で、運動エネルギーは時間の2乗に比例して単調に増大してゆく、ちなみに、ホドグラフでは、原点からの距離の2乗は $|W|^2$ であり運動エネルギーに比例する。

5. 観測例

たいていの教科書には慣性振動と考えられる観測例が上げられているが、いずれも海洋中のものである。第9図はバルチック海での流速の観測で、北西に向う流れの上に時計回りの振動成分が重なっている。緯度60度での慣性周期は約14時間 ($T = 2\pi/2\Omega \sin \phi = \frac{1}{2} \text{day} / \sin \phi$)。約1週間明瞭な振動(減衰振動)が見られる。

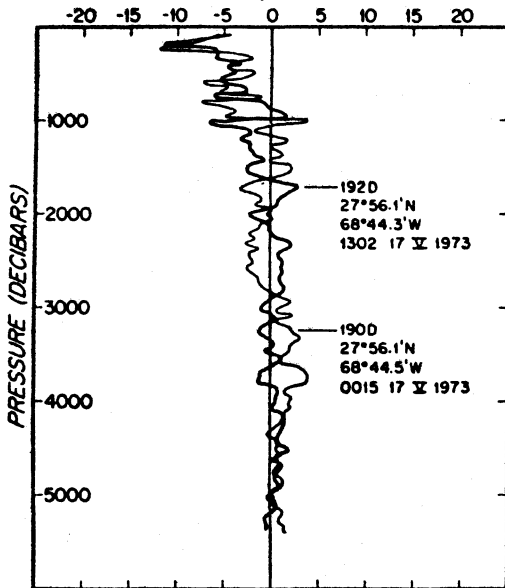
第10図には海面下 30 m での運動エネルギーのパワー・スペクトルを示す。半日潮汐の他に慣性周期 (53時間, 緯度 13°N) のところにピークが存在する。海洋中での運動の多くは、大気よりそのエネルギーを得ているが、大気には明瞭な慣性周期のピークはない。むしろ、この周期帯ではランダムな周期の外力と考えて良いであろう。にもかかわらず、海洋の応答にこのようなピークが現れるのは、第5図に示したような共鳴現象によると想像される。

振動の鉛直構造をみってみると(第11図)、必ずしも“板状”ではなく、波状に変化している。慣性重力波のうちの慣性周期に近いものとして理解するのが良いのであろう。“板”にこだわるならば、北極海の氷の運動(夏季)に明瞭な慣性周期のスペクトル・ピークが存在するという報告がある(Colony と Thorndike, 1980)。同じ場所での地上風のスペクトルにはこの周期のピークはないので、やはり、共鳴による選択的応答という解釈が良さそうである。もっとも氷の浮かんでいる海も運動しうの

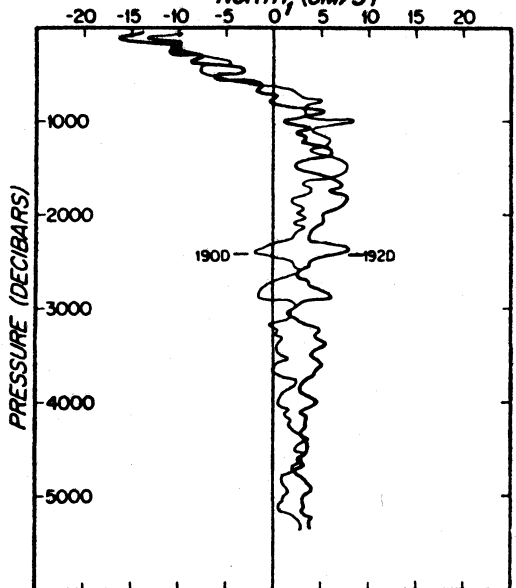


第10図 バルバドス (13°N, 60°W) 付近, 海面下 30 m での運動エネルギーの
パワー・スペクトル (Warsh *et al.*, 1971 ; Holton の教科書より).

DROPS 190D & 192D, 13 NM SW OF RIDGE PEAK
EAST, (CM/S)



DROPS 190D & 192D, 13 NM SW OF RIDGE PEAK
NORTH, (CM/S)



第11図 流速の鉛直分布. 太線は細線より $\frac{1}{2}$ 慣性周期後の観測 (Lee と Wunsch, 1977). 波状の“鏡像”関係は, 慣性周期に近い重力波と考えられる. 第9・10図は混合層内での観測であり, この図は, そこで励起された慣性重力波が下方に伝播しているのを捉えたと考えられる.

で、話は簡単でないだろうが。

大気中の例では、Wangara 観測の夜間ジェット (Gill, 1982: p. 332-333) や成層圏中の慣性重力波の臨界面付近での振舞 (Sidi と Barat, 1986) などがあげられる。

ところで、何故、慣性振動は海洋中のほうでよく観測されるのだろうか? 「気体よりも液体のほうが“板”にちかい。」というのは冗談として、大気中のほうが、慣性周期に近い周期帯での不安定現象がたくさんあり (対流からメソ・スケール擾乱まで)、中立振動である慣性振動などすぐに掻き乱されてしまうからと考えられる。実際、大気中で観測されるのは成層圏や夜間 (対流圏) である。また、境界条件の違いも重要かもしれない。

6. おわりに

慣性振動は大気中では重要でないせいか、教科書などで大きく扱われることはめずらしい。Holton の教科書 (1979) では「自然座標」(natural coordinates) を用いて、傾度流の1極限という説明をしている。すなわち、傾度流は [Coriolis 力] + [遠心力] = [気圧傾度力] と3つの力の平衡として書けるが、慣性流は [気圧傾度力] = 0 の場合で、(注4) の関係が直接導き出される。ちなみに、[遠心力] = 0 が地衡流、[Coriolis 力] = 0 が旋衡流である。また、J. Pedlosky の教科書 (1979) は流路モデルが主体で、慣性振動の項は無い。

一方、A. Gill (1982) は、2カ所で慣性振動を取り上げている。1つは「表面重力波に対する回転の効果: Poincaré 波」の節で、振動数 $\omega \rightarrow f$ 極限の重力波として説明される。もう1つは「風によって励起される、海洋混合層での慣性振動」で、この解説の1, 2節に相当するところが記述されている。

日本の教科書では、正野 (1960) や栗原 (1979) は回転系での運動方程式の導出直後で慣性振動を説明している。栗原の図 1. 14 は、振動の軌跡が慣性系では楕円になること (周期は $2\pi/\Omega$)、 Ω で回転する観測者にとっては周期 π/Ω の円運動にみえることをうまく表現している。一方、慣性重力波と関連させて記述してある教科書に、小倉 (1978)、木村 (1983) などがある。木村は、現実に慣性周期が卓越する (第10図) 理由として、慣性重力波の分散関係式から、 $\omega \rightarrow f$ 極限で水平群速度がゼロとなる (つまり、波動のエネルギーが同じ所に留まっている) ことをあげている。これは、共鳴によるという説明と異なるように思われるかもしれないが、そうではないと思う。“板状”運動から出発すると波動のエネル

ギー伝播の話に近づけないけれど、強制慣性重力波の枠組で共鳴問題を考え、エネルギー伝播との関連をつけることができるはずである。(エネルギーが逃げてゆけない状況で、エネルギーが注入され続けられれば、それはどんどん溜り続ける。)

地球流体力学のなかで、線型常微分方程式で済む話は、慣性振動と Brunt-Väisälä 振動くらいである。それ以外は、一般に、偏微分方程式の世界であり、解析的に解を得ようとするスケール・アナリシスや線型化といった手続きが必要なややこしい問題ばかりである。今回、このような大学教養の振動論レベルの解説を書いたのは、地球流体力学の入口で慣性振動という話題をじっくり取り上げるのも意義があると思ったからである。仮定 (I) で落した項が流体力学の本質であり、流体力学の問題はすべてここから始まる訳であるが、回転の効果を理解するためには、“板”の運動を調べておくのも悪くはないだろう。ここで触れたように、Coriolis 力、自由振動、強制振動、共鳴、周期/準周期……など重要な基本概念が含まれており、それらを説明するのに格好の題材であろう。

式いじりに飽足りなければ、回転台を用いた実験も面白いかもしれない。台からの高さが $\Omega^2 r^2 / 2g$ (r は回転軸からの距離) の回転放物面となる鉢 (つまり、鉢の底面が等ポテンシャル面、回転台の“ジオイド”となっている) を回転させ、そのなかでの板片の相対運動をみたり、また、それに力を加え続けたりすれば、慣性振動や外力問題の実験となる。パチンコ玉を敷いて摩擦力を小さくしてやれば、ゆっくりと運動を観察できるだろう。(もっとも、板片が鉢の回転になじむまでに時間がかかるだろうが。)

1, 2章が講義の中心であり、3~5章は彼の話をもヒントに書き加えたものである。講義の雰囲気但至少も伝わればと思う。最後に、こういう形で発表することを快諾し、いろいろ議論してくれた Peter Rhines に感謝する。

文献

- Colony, R. and A.S. Thorndike, 1980: The horizontal coherency of the motion of summer arctic sea ice, *J. Phys. Oceanogr.* 10, 1281-1289.
 Gill, A.E., 1982: *Atmosphere-Ocean Dynamics*, Academic Press. 249-254, 322-326.
 Holton, J.R., 1979: *An Introduction to Dynamic Meteorology*, Academic Press, 59-60.

木村竜治, 1983: 地球流体力学入門, 東京堂出版,
149-151, 169-172.
栗原宜夫, 1979: 大気力学入門, 岩波全書 317, 28-
32.
Lee, V. and C. Wunsch (Eds). 1977: *Atlas of
the Mid-Ocean Dynamics Experiment (MO DE-1)*,
M. I. T., 135-142.
小倉義光, 1978: 気象力学通論, 東京大学出版会,

42-47.

Pedlosky, J., 1979: *Geophysical Fluid Dynamics*,
Springer-Verlag, pp. 624.

Sidi, C. and J. Barat, 1986: Observational evi-
dence of an inertial wind structure in the
stratosphere. *J. Geophys. Res.* 91, 1209-1217.

正野重方, 1960: 気象力学, 岩波全書246, 135-137.

第13回「リモートセンシングシンポジウム」講演募集などのお知らせ

主 催: (株)計測自動制御学会 企画: リモートセンシン
グ部会

協 賛: 日本気象学会・他

標記について, 下記要綱によって一般講演の募集をい
たしますから, ふるって応募されるよう希望いたします。

日 時: 昭和62年10月26日(月), 27日(火) [特別講演,
特別セッション, 一般講演, 懇親会]

会 場: 国立教育会館

東京都千代田区霞が関 3-2-3, 地下鉄虎の門
駅下車]

特別講演: 10月26日(月) 午後

「海洋観測衛星 “もも” について」

講師 小泉深吉 (宇宙開発事業団)

「海洋観測衛星 “もも” の運用について」

講師 綾部広一 (宇宙開発事業団)

講演申込締切: 昭和62年7月13日(月)

講演申込方法: A 4判用紙に下記を記入し, 学会事務局
あてお申込ください。1) 題目, 2) 発表者氏名

(登壇者に○印) および勤務先, 3) 登壇者の連
絡先と所属学協会名, 4) 400字以内の概要, 5)
希望するセッション名 (下記参照, 複数可),
6) 原稿枚数 (2ページか4ページ) の指定,
1), 2) については英文名も併記してください。

講演セッション名: 計測システム, データの収集および
補正, データ解析システムと手法, 応用などを
予定しています。

講演の予稿集: 講演時間は1件20分とし, 予稿集はオフ
セット印刷で1論文1,480字詰原稿用紙2ペー
ジまたは4ページとします。原稿用紙は申込み
の後, 学会事務局より送付いたします。

講演原稿の締切: 昭和62年9月25日(金)

参加費 (予稿集代金): 当学会および協賛学協会会員
5,500円, 学生 3,500円, 一般 6,500円

講演申込先: 〒113 東京都文京区本郷 1-35-28-1

社団法人計測自動制御学会リモートセンシング
シンポジウム係 電話 (03) 814-4121