

降水量の時間変化の統計的性質とフラクタル*

川上 紳一** 吉田 英太郎***

要 旨

岐阜市における10分間雨量のデータを用いて、10分間雨量の時間変化の変動幅の分布関数、雨の降らなかった期間の分布関数、および、降水量の時系列のパワー・スペクトルを求めた。降水量の時間変化の変動幅の分布関数はべきの型をしているが、勾配 (α) は季節によって1.5から3.5の間の値をとる。雨の降らなかった期間の分布関数もべきの型をしており、勾配から決定されるフラクタル次元は $D \sim 5/3$ である。1分間雨量の時系列のパワー・スペクトルから求められるフラクタル次元の値は、この値と一致している。雨の降り方の季節変化や地域性は、従来考えられていたような単純なフラクタル・モデルでは説明できない。

1. はじめに

日常みられる様々な気象変化は複雑である。これは、大気の流れが乱流になっているためで、その運動の様式を解析的に扱うことが難しく、気象変化の予測がしにくいからであろう。しかし、乱流は全く不規則というわけではなく、Kolmogorov の $5/3$ 乗則や Richardson の $4/3$ 乗則といった法則性が成り立つことが知られている。気象や気候の変化は時間的なものと空間的なものに分けられるが、それらの変動の様式にはフラクタルやスケールリングと呼ばれる性質があると考えられる (Schertzer and Lovejoy, 1985; Lovejoy and Schertzer, 1986)。

フラクタルは Mandelbrot によって導入された概念で、特徴的な長さを持たない図形や構造、現象などの総称である (Mandelbrot, 1977, 1982)。身近な例では、積雲乱や海岸線の形がある。積雲乱を球で表すとしよう。詳しく見れば見るほど、雲の形は複雑なので、積乱雲らしさを表現するには、大きさの異なる球が無数に必要となる。このような特徴的な長さを持たない図形には、スケールリングまたは自己相似性と呼ばれる性質があ

る。積乱雲の形が自己相似であるということは、その一部を拡大してみるとやはり積乱雲にみえるということを示している。このような特徴的な長さを持たない図形や現象を定量的に表すパラメータとして、フラクタル次元 (D) やスケールリング・パラメータ (H) がある。

フラクタル次元の求め方や解釈については、高安 (1986) に詳しく述べられている。ここでは、最も直観的に理解しやすいフラクタル次元の定義をしておこう。第1図のように、線分、正方形、立方体の各図形の辺を2等分する。線分の場合には半分の長さの線分が $2=2^1$ 個できる。正方形の場合には一辺がもとの $1/2$ の大きさの正方形が $4=2^2$ 個できる。同様に立方体の場合には $8=2^3$ 個できる。ここに現われる指数1, 2, 3はそれぞれ図形の経験的な次元と一致する。そこで、ある図形が全体を $1/a$ に縮小した相似図形 b 個によって構成されている場合、 $b=a^D$ よりフラクタル次元は次のように与えられる。

$$D = \log b / \log a \quad (1)$$

従ってフラクタル次元は一般に非整数になる。第2図はコッホ曲線と呼ばれる有名なフラクタル図形の例である。そのトポロジカルな次元は1であるのに対し、フラクタル次元は

$$D = \log 4 / \log 3 = 1.2618 \dots \quad (2)$$

となる。コッホ曲線は、直接 (1次元) より複雑な形をしているが、平面 (2次元) を覆いつくすほどではない。コッホ曲線のフラクタル次元はこのことを定量的に表現していると言える。

乱流はフラクタルの代表的な例であるので、大気の時

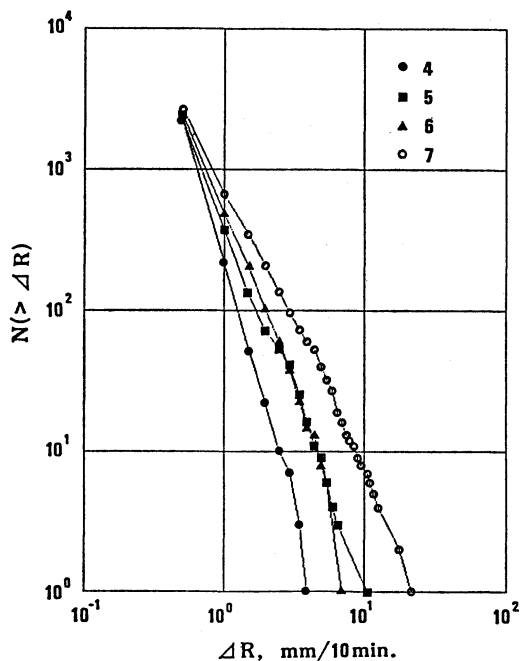
* Fractal and statistical properties of rain-rate processes.

** Shin-ichi Kawakami, 岐阜大学教育学部地学教室.

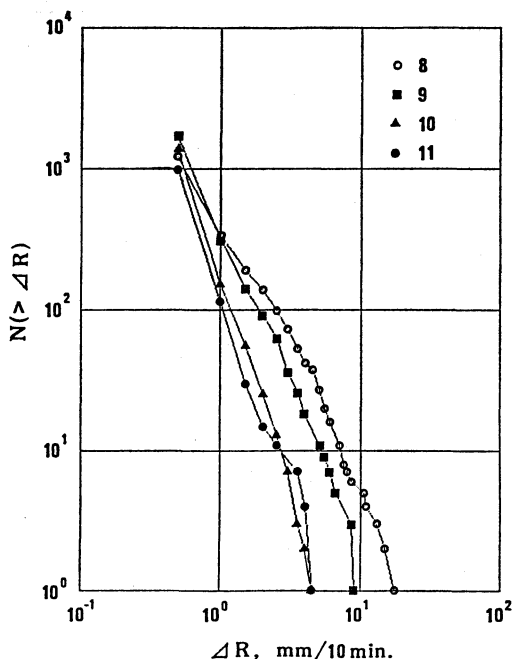
*** Eitarou Yoshida, 岐阜大学教育学部地学教室
現在岐阜県土岐市立駄知小学校.

—1988年2月25日受領—

—1988年8月12日受理—



(a) 4月～7月



(b) 8月～10月

第3図 10分間雨量の時間変化の変動幅に関する分布関数。

非整数値をとる。H+Dは現象のユークリッド空間の次元に等しくなるので、スケーリング・パラメータ(H)を余次元(co-dimension)と呼ぶことがある。

また自己相似性を示す変動のパワー・スペクトルは次のようにべきの型で表わされる

$$S(f) \propto f^{-\beta} \quad (4)$$

ここで、べき指数βはグラフのフラクタル次元との間に次の関係が成り立つ

$$\beta = 5 - 2D \quad (5)$$

また、ある確率変数Uが次のような分布関数

$$P(U > u) \propto u^{-\alpha} \quad (6)$$

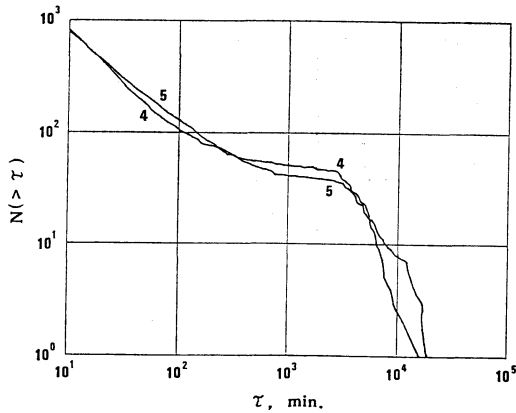
を持つとき、その確率変数はハイパボリック(hyperbolic)であると呼ばれている。間欠的(intermittent)な変動をする確率過程では、(6)のようなべき乗の分布関数が得られる。特に $0 < \alpha < 2$ の時、(4)の分布はLevyの安定分布と呼ばれている。Lévyの安定分布は、自己相似性と密接な関係があり、べき指数(α)はモデルを与えるとフラクタル次元と関係づけることができる。

温度変化などの多くの時系列データは、平均値のまわ

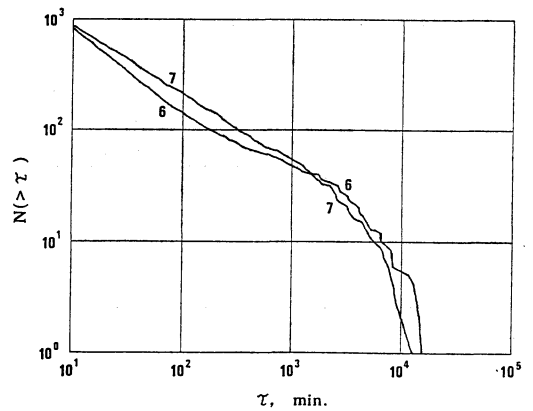
第1表 降水量の時間変化の変動幅の分布関数のべき指数(α)の月別の値

| 月 | α |
|-----|---------------|
| 4月 | 3.348 ± 0.028 |
| 5月 | 2.505 ± 0.039 |
| 6月 | 2.402 ± 0.038 |
| 7月 | 1.816 ± 0.015 |
| 8月 | 1.557 ± 0.032 |
| 9月 | 2.104 ± 0.042 |
| 10月 | 2.877 ± 0.073 |
| 11月 | 3.079 ± 0.064 |

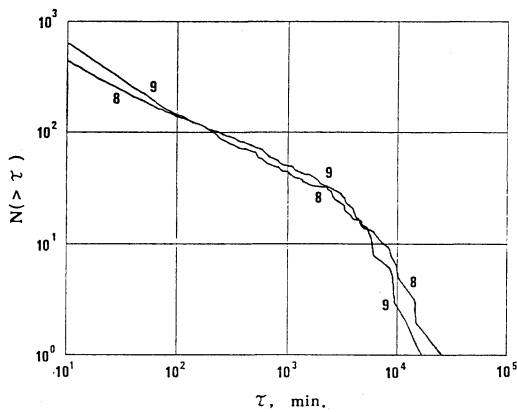
りを上下に変動し、平均値からのずれが正の値も負の値もとる。しかし、降水量の時系列データは、正の値しかとらず、その変動は連続的というよりも、むしろパルスのになっている。このような場合には、降水量にある適当なしき値を決め、降水量がそのしき値を越えた時刻は1、そうでない時刻は0として、データをパルス列に変換し、パルス間隔の分布関数を求めると、その分布



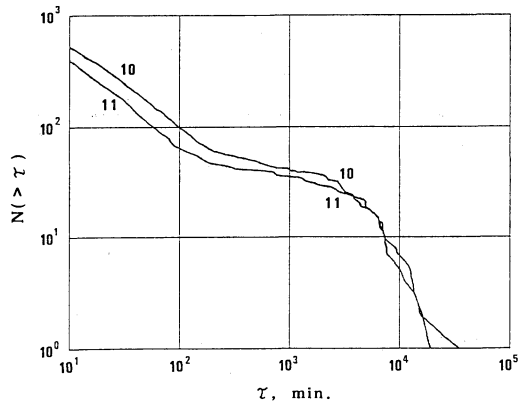
(a) 4月, 5月.



(b) 6月, 7月.



(c) 8月, 9月.



(d) 10月, 11月.

第4図 雨の降らなかった期間の分布関数.

関数の勾配からフラクタル次元が求められる。すなわち、降水量の時系列データは、あるランダムな変動の正の部分のみを観測していると考えればよい。降水過程が多重のフラクタル次元で表わされるならば、得られるフラクタル次元はしきい値によって変化するであろう。

3. 資料と解析方法

降水量の時間変化を解析するにあたって、単位時間当りの降水量の時間変化を定常時系列として扱えることが望ましい。日本はアジア大陸と太平洋の境界で、中緯度モンスーン帯に位置するため、四季の変化が激しく、降水量の時間変化を定常的な確率過程として扱うことはできない。そこで、ここでは便宜的に月ごとにグループに分けた。

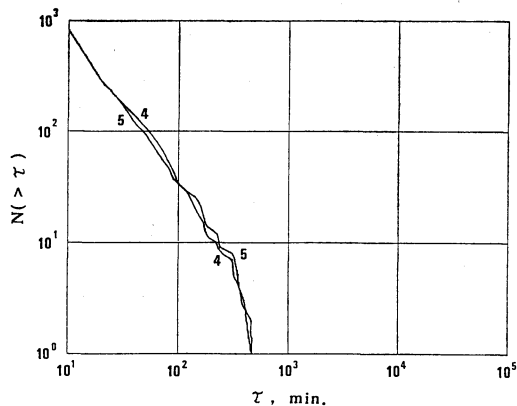
データは岐阜地方気象台で観測された1980年から1987

年の、4月から11月の10分間雨量を用いている。本研究では、以下に述べる方法でフラクタル次元の推定を試みた。

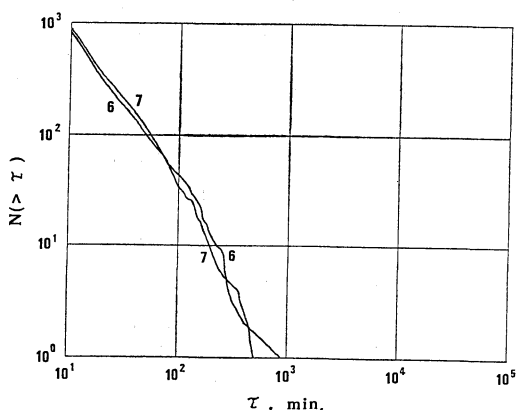
(1) 10分間雨量の時系列データ $R(t_i)$, $i=1, 2, \dots, n$ から、 t_i と t_{i+1} における10分間雨量の変動幅、 $\Delta R(t_i) = R(t_{i+1}) - R(t_i)$ を計算し、各月ごとに $\Delta R(t_i)$ の分布関数を求めた。これはべき乗分布に従うことが期待される。このべき指数は、適当なモデルを与えるとフラクタル次元と関係づけることができる。

(2) 各月ごとに、雨の降っていない期間(ひと雨の降り終わりから次の雨の降り始めまで)の分布関数を求めた。分布関数がべき乗分布に従う時、そのべき指数に1を加えると降水量の時間変化曲線のフラクタル次元になる。

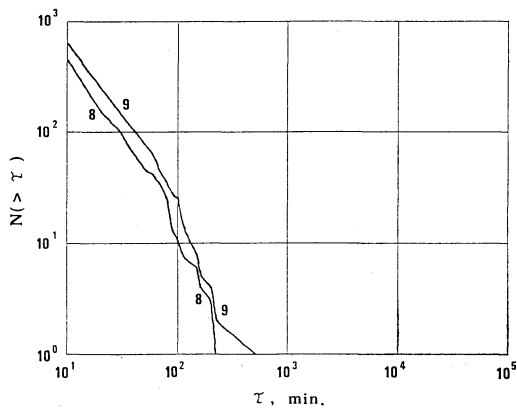
(3) 時系列のパワー・スペクトルからフラクタル次元



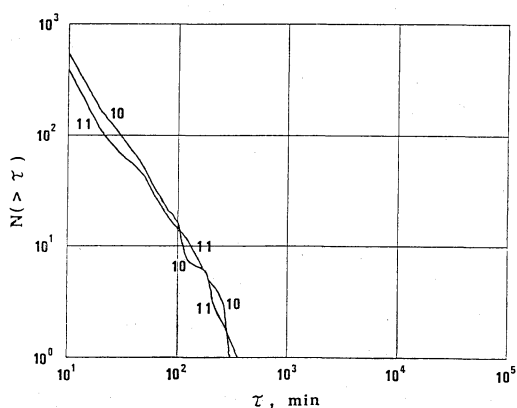
(a) 4月, 5月.



(b) 6月, 7月.



(c) 8月, 9月.



(d) 10月, 11月.

第5図 雨の降った期間の分布関係.

値を求めた.

より短い時間スケールにおける降水変動の性質を調べるために、1983年9月26日から27日にわたって名古屋大学水圏科学研究所で観測された1分間雨量のデータを名古屋大学の田中浩助教授より拝借し、パワー・スペクトルを求めた。しかし、1分間雨量の変動幅および雨の降っていない期間の分布関数は、データの量が少ないために求めることができなかった。

4. 降水量の時間変化の変動幅に関する統計的性質

第3図(a), (b)に10分間雨量の変動幅 (ΔR) の分布関数を示す。ここで横軸 ΔR の単位は mm/10 分である。これらの図から分かるように、それぞれの分布関数に折れ曲がりが見られる。変動幅の大きいところ ($\Delta R > 5$) では、サンプルの数が少ないため、勾配が急

になっている。 $0.5 < \Delta R < 5$ では、分布関数はほぼ直線的になっており、(6) のようにべきの形で表わされる。第1表に分布関数の勾配 (α) の値を示す。 α の値の範囲は

$$\alpha = 1.5 \sim 3.5 \tag{7}$$

である。我々の得た結果では、4月から順番に7月まで α の値が減少し、8月から11月までは増加している。 α の値は、変動幅の大きな変化が多いほど小さくなるので、夏期の雨ほど突発的で激しい雨であることを物語っている。

Lovejoy and Mandelbrot (1985) はスペイン、熱帯大西洋、モントリオールにおける、空間的に孤立している雨雲から降った雨量の時間変化を、レーダー観測で得られたデータをもとに解析している。彼らの結果によると、 α の値は場所や観測時期によらず一定であり、 $\alpha =$

第2表 雨の降らなかった期間の長さの分布関数から求めたフラクタル次元

| 月 | フラクタル次元 (D) |
|-----|---------------|
| 4月 | 1.786 ± 0.017 |
| 5月 | 1.752 ± 0.005 |
| 6月 | 1.720 ± 0.008 |
| 7月 | 1.620 ± 0.003 |
| 8月 | 1.465 ± 0.006 |
| 9月 | 1.595 ± 0.009 |
| 10月 | 1.744 ± 0.005 |
| 11月 | 1.731 ± 0.011 |

5/3である。一方、Zawadzki (1987) によって報告された、カナダのモントリオールにおける10年間のデータでは、 $\alpha \sim 3/4$ である。従って、 α の値は Lovejoy and Mandelbrot (1985) の提案するように一定ではなく、場所や季節によって変わると考えた方がよいであろう。

5. 雨の降らなかった期間に関する統計的性質

降水過程がフラクタルであるとする、雨が降らなかった期間の分布関数もべき乗分布で記述される。

$$P(>\tau) \propto \tau^{-(D-1)} \tag{8}$$

ここで τ は一つの雨の降り終わりから次の雨の始まりまでの時間間隔である。この分布関数の勾配より、降水量の時間変化を表す曲線のフラクタル次元 (D) が求められる。第4図 (a)~(d) にそれぞれの月の分布関数を示す。これらの図においても、分布関数の曲線に折れ曲がりが見られる。これは降水期間の最大値にほぼ対応しているようにみえる (参考のため、ひと雨の降雨時間の分布関数を第5図 (a)~(d) に示す)。 $\tau < 300$ 分における分布関数の勾配から求められるフラクタル次元 (D) を第2表に示す。Dの値は季節によってあまり変化せず、

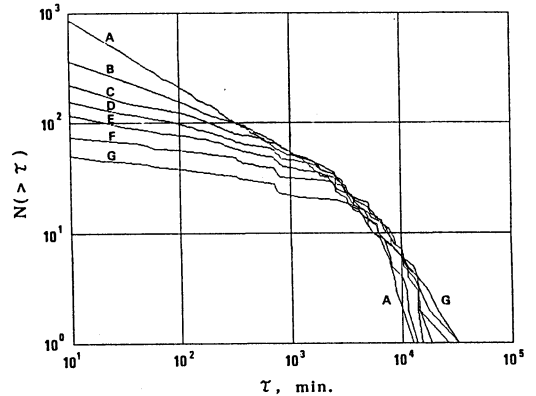
$$D \approx 5/3 \tag{9}$$

である。 $\tau < 300$ 分における分布関数は一連の雨雲の中で雨の降っている期間とやんでいる期間の統計的性質を示しており、中規模スケールの時間変動を反映していると考えられる。一方、 $\tau > 300$ 分における分布関数は低気圧の到来周期と関係があり、総観スケールの変動を表わしていると考えられる。

第4図 (a)~(d) に示された分布関数は、 τ の大き

第3表 降水量のしきい値とフラクタル次元

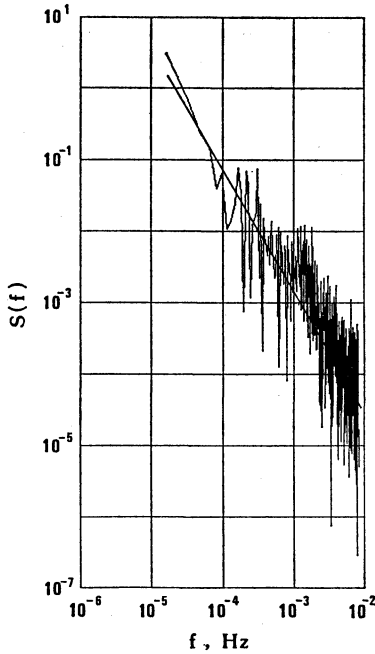
| しきい値 (mm/10分) | フラクタル次元 (D) |
|---------------|---------------|
| 0.0 | 1.620 ± 0.003 |
| 0.5 | 1.395 ± 0.004 |
| 1.0 | 1.255 ± 0.005 |
| 1.5 | 1.217 ± 0.172 |
| 2.0 | 1.172 ± 0.004 |
| 2.5 | 1.124 ± 0.004 |
| 3.0 | 1.120 ± 0.003 |



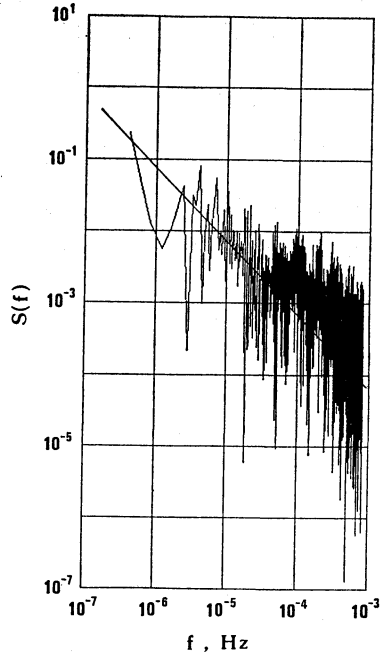
第6図 あるしきい値を越える雨が降るまでの時間間隔の分布関数。しきい値の値 (mm/10分) は A: 0.0, B: 0.5, C: 1.0, D: 1.5, E: 2.0, F: 2.5, G: 3.0。

な領域における曲線の形から、2つのグループに分けることができる。一つは、500分 $< \tau < 4000$ 分のあたりで曲線の傾きが緩やかになるもので、4月、5月、10月、11月がこのグループに分類される。これは、ひとつの低気圧の通過から次の低気圧の通過までの時間スケールがおよそ3日であることを反映している。一方、6月から9月の分布関数では、曲線の傾きが緩やかな領域はない。

降水過程が多重のフラクタル次元を持つとすると、降水量のしきい値を変えると、異なる値のフラクタル次元が得られることが期待される。そこで、あるしきい値未満の降水量の時刻は降水が起らなかったとして分布関数を求めた。第3表および第6図に1980年から1987年までの7月のデータを用いて、しきい値を0.0, 0.5, 1.0, ..., 3.0 (mm/10分) とした場合に得られた結果を示す。得



第7図 1分間雨量のパワー・スペクトル.
名古屋大学における1983年9月26日から27
日の観測データを使用している.



第8図 10分間雨量のパワー・スペクトル.
岐阜県における1980年7月のデータを使用し
ている.

られたフラクタル次元の値は明らかにしきい値によって変化しており、降水過程が多重のフラクタル次元で表わされることを示唆している。

6. 降水変動のパワー・スペクトル

自己相似性を示す時系列のパワー・スペクトルはべきの型で表わされるので、降水量の時系列がべきの型で表わされるかどうかを調べることは重要である。第7図に名古屋における1分間雨量のパワー・スペクトルを示す。この図から分かるように、

$$S(f) \propto f^{-5/3} \quad (D=5/3) \quad (10)$$

である。一方、第8図に示すように、岐阜市における10分間雨量のパワー・スペクトルでは、

$$S(f) \propto f^{-1} \quad (D=2) \quad (11)$$

である。1分間雨量のパワー・スペクトルは当倉(1976)が求めた通常の雨のパワー・スペクトルの結果と一致している。また、10分間雨量のパワー・スペクトルの勾配の季節依存性や岐阜と名古屋の違いは顕著ではなかった。

1分間雨量のパワー・スペクトルと10分間雨量のパワー・スペクトルの勾配が異なることは、降水過程が多重のフラクタル次元を持っているからである。

7. 降水過程のフラクタル・モデル

降水過程が一つのフラクタル次元で表わされるとすれば、異なる方法で求められたフラクタル次元の値は一致しなくてはならない。雨の降らなかった期間の分布関数から求めたフラクタル次元より、雨を降らせる雲のフラクタル次元も $D=5/3$ であることが期待される。Lovejoy (1982) は雲のフラクタル次元として $D=4/3$ を得ている。最近、Yano and Takeuchi (1987) は別の方法で、熱帯収束帯における雲のフラクタル次元として $D \approx 1.5$ という値を得ている。雨の降らなかった期間の分布関数から求めたフラクタル次元の値は Lovejoy (1982) や Yano and Takeuchi (1987) の求めたフラクタル次元の値より大きい。

一方、降水量の時系列のパワー・スペクトルの右さがりの勾配 (β) は、 $D=5/3$ とすると $\beta=5-2D=5/3$

となる。この結果は1分間雨量のデータから求めた結果と一致しているが、10分間雨量から求めた結果とは一致しない。この不一致は、降水過程が乱流のフラクタルのように多重のスケーリング次元をもつためであろう。

Lovejoy and Mandelbrot (1985) は降水量の変動幅の分布関数のべき指数を $\alpha=5/3$ であるとして、降水変動のフラクタル・モデル (FSP モデル) を提案している。このモデルでは、べき指数 (α) と自己相似性のあるスケーリング・パラメーター (H) の間に $\alpha=1/H$ という関係が成り立っている。しかし、第4章で示したようにべき指数 (α) の値は季節によって異なる値をとるので、FSP モデルは一般的な降水過程のモデルとしては適当でないであろう。モデルを考えるにあたっては、降水過程のフラクタル的性質をさらに詳しく研究することが大切であろう。

8. おわりに

降水過程は大気の複雑な運動や地形の影響など、様々な要因が関与している。雨の降り方が間欠的であること、大気の運動が乱流であること、地形の起伏がフラクタルであることなどから、降水過程にフラクタル的性質があることは疑いない。しかし、雨の降り方は、季節や個々の雨雲の性質によって様々であり、簡単なモデルでは説明できない。時間間隔を短くとした長期間にわたる雨量の観測データをもとに、降水過程のフラクタル的性質を詳しく研究する必要がある。一方、雨の降り方に関する統計的性質の季節変化や地域性についても、今後詳細に研究する計画である。降水過程の理解に、フラクタル的な見方が役に立つことを期待したい。

謝 辞

岐阜地方気象台、名古屋地方気象台の方々および名古屋大学水圏科学研究所の田中浩助教授に降水量のデータを使用させて頂いた。日本気象協会岐阜支部の内藤亘氏、服部満夫氏、浅井祥子さんには貴重な時間をさいて本研究に協力して頂いた。また、神戸大学の高安秀樹博士、岐阜大学の野元世紀博士にいろいろと助言を頂いた。ここに心からお礼申し上げます。

参考文献

- Hentschel, H.G.E., and I. Procaccia, 1984: Relative diffusion in turbulent media: the fractal dimension of clouds, *Phys. Rev. A* 29, 1461-1470.
- Kedem, B. and L.S. Chiu, 1987: Are rain rate processes self-similar? *Water Resour. Res.*, 23, 1816-1818.
- Lovejoy, S., 1982: Area-perimeter relation for rain and cloud areas, *Science*, 216, 185-187.
- , and B.B. Mandelbrot, 1985: Fractal properties of rain, and a fractal model, *Tellus*, 37 A, 209-232.
- , and D. Schertzer, 1985: Generalized scale invariance in the atmosphere and fractal models of rain, *Water Resour. Res.*, 21, 1233-1250.
- , 1986: Scale invariance in climatological temperatures and the local spectral plateau, *Annales Geophysicae*, 4 B, 401-410.
- , and A.A. Tsonis, 1987: Functional box-counting and multiple elliptical dimensions in rain, *Science*, 235, 1036-1038.
- Mandelbrot, B.B., 1977: *Fractals: Form, Chance, and Dimension*, W.H. Freeman and Co.
- , 1982: *The fractal geometry of Nature*, W.H. Freeman and Co.
- Schertzer, D., and S. Lovejoy 1985: The dimension and intermittency of atmospheric dynamics, in *Turbulent Shear Flows* 4 ed. by L.J.S. Bradbury, F. Durst, B.E. Launder, F.W. Schmidt, and J.H. Whitelan 7-32. Springer-Verlag.
- , and ——— 1987: Physical modeling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes, *J. Geophys. Res.*, 92, 9693-9714.
- 高安秀樹, 1986: フラクタル, 朝倉書店.
- 当舍万寿夫, 1976: 降雨強度の測定, *気象研究ノート*, 130, 133-146.
- Yano, J., and Y. Takeuchi, 1987: The self-similarity of horizontal cloud pattern in the inter-tropical convergence zone, *J. Meteorol. Soc. Japan*, 65, 661-667.
- Zawadzki, I., 1987: Fractal structure and exponential decorrelation in rain, *J. Geophys. Res.*, 92, 9586-9590.