「気候一次元“模型”の解析」*

石井正好**・金久博忠***

要 旨

North (1975) が組み立てた Budyko・Sellers 混合型気候一次元模型の定常解とその安定性を，Sturm-Liouville 定理によって得られる固有値および固有関数を用いて調べた．また，Liapounov-Schmidt の還元法を適用して無限次元状態空間の定常相図を局所的に2次元に射影し，模型に内在する分岐を調べた．このように模型を解析的に調べた結果は，気候一次元模型における定常解の多重性および定常解の分岐等の点でこれまでの研究のものと一致した．

1. はじめに

気候一次元模型を扱ったこれまでの研究の総論は，Ghil (1976, 1987) に詳しい．

気候一次元模型とは，太陽光の入射反射，大気・海洋・地表面からの赤外放射および渦拡散による緯度方向の熱移流の各緯度におけるエネルギー収支を考えるものである．Budyko や Sellers の模型を原型とするこれまでの研究は，数値的解析や切断模型に依るものであるが，太陽定数の変化に対する定常解の変化に注目して，3つの定常解が存在すること，定常解は，太陽定数の変化に対して敏感に反応することを結論している．ここで3つの定常解とは，現在の気候に相当する安定な定常解，至るところ極端に気温が低い安定な定常解そしてこれらの中間に位置する不安定な定常解のことである．

North は，渦拡散係数を一定にしたときの定常解を Legendre 関数を用いて決定した．我々の研究で扱う模型は North の模型と同型であるが，渦拡散係数を緯度の関数とした．数値解析や切断模型に依らず解析的に調べるために Liapounov-Schmidt の還元法を用いた．模型を構成する係数や関数については，これまでの研究に倣い必要かつ妥当な条件を与えた．

2. 模型および支配方程式

年平均かつ経度・高度方向に平均した気温Tを状態変数としエネルギー収支式を組み立てる．Tは南北半球対称として何れか一方の半球のみ考える．

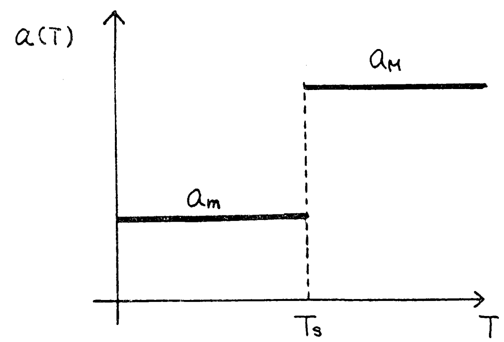
まず，Budyko (1969) に倣い気温 T がある温度 T_s よりも大きければ氷雪は存在せず小さければ氷雪は存在するとし，1から albedo をひいた吸収率 a (T) を，

$$a\,(T)=\begin{cases}a_M & (T>T_s\ のとき)\\ a_m & (T<T_s\ のとき)\end{cases}\qquad 但し\quad a_M>a_m$$

と定める（第1図）．緯度 ϕ における太陽光の吸収を $\mu QS(\phi)\ a(T)$ とする．$\mu(>0)$ は太陽定数の変化を表す外部助変数（$\mu=1$ は現在の状態），Q は太陽光の平均入射量，S (ϕ) は太陽光入射の緯度分布を表す関数である．

次に，大気・海洋および地表面からの赤外放射は，経験的に定数 A, B (B>0) を用いて A+BT で近似できることが知られている (Budyko, 1969).

次に，緯度方向に渦拡散による熱輸送 $\nabla\cdot(k(\phi)\nabla T)$ を考える (Sellers, 1969)．$k(\phi)$ は渦拡散係数で正定符



第1図　吸収率a（T）（段階関数）

* An Analysis of A One Dimensional Energy-Balance Climate Model.

** Masayosi Isii, 神戸海洋気象台.
*** Hirotada Kanehisa, 気象大学校.

——1988年4月8日受領——
——1989年2月10日受理——

号である．渦拡散の式は変数 $x=\sin\theta$ を用いると，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\ (1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}T(x,\ t)\right]$$

となる．ここで，$k(x)$ に地球の半径の2乗の逆数を含めた．

以上3項目のエネルギー収支を表す支配方程式は，時間 t と x を独立変数とする $T=T(t,\ x)$ の偏微分方程式となる．後の議論の為に右辺を $F(T,\ \mu)$ としておく．

$$C(x)\frac{\partial}{\partial t}T\equiv F(T,\ \mu)=\frac{\partial}{\partial x}\left[P(x)\frac{\partial}{\partial x}T\right]+\mu QS(x)a(T)-(A+BT)$$

但し $P(x)=k(x)\ (1-x^2)$

ここで，$C(x)$ は熱容量で，正定符号である．

極と赤道において熱輸送を零とする．この境界条件は，次のように表される．

$$\left[(1-x^2)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}T\right]_{x=0,1}=0$$

$S(x)$ を減少かつ上凸関数とする．$S(x)$ を0から1まで積分した値は1である．南北の対称性から $S'(0)=0$ $\left('=\frac{\partial}{\partial x}\right)$ を満たす．太陽光の極における入射量は零ではないが他の緯度に比べれば小さいので $S(1)\gtrsim 0$ とする．

3. 定常解と安定性および分岐

3.1 暖かい定常解および冷たい定常解

地球上に氷雪のまったく存在しない定常解を暖かい定常解 $T_w(x)\ (\geqq T_s)$，地球上が完全に氷雪で覆われた定常解を冷たい定常解 $T_c(x)\ (\leqq T_s)$ と定義する．

暖かいもしくは冷たい定常解における $F(T,\ \mu)$ の線形化演算子 L は，$a(T)$ が定数だから，

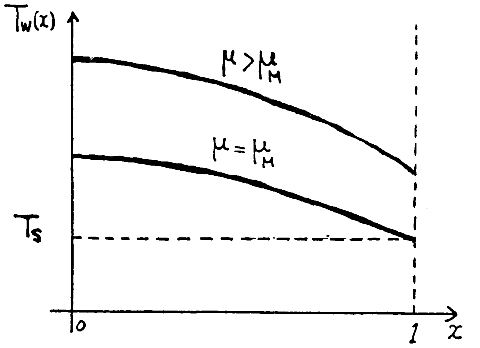
$$L\cdot u=\lim_{h\to 0}\frac{F(T+hu,\ \mu)-F(T,\ \mu)}{h}=\left(\frac{\partial}{\partial x}P(x)\frac{\partial}{\partial x}-B\right)\cdot u(x)$$

である．L の固有値 λ および固有関数 $\phi(x)$ を，

$$L\cdot\phi(x)+\lambda\phi(x)=0,$$

$$\left[(1-x^2)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}\phi(x)\right]_{x=0,1}=0 \qquad (1)$$

とすると，(1) は singlar Sturm-Liouville 問題となり，λ, $\phi(x)$ について付録1に示す事柄は既知である．ここで，(1) は気温 T に依存しないことに注意する．L を用いると，系の任意の定常解が満たす $F(T,\ \mu)=0$ は



第2図 暖かい定常解

$$\mu QS(x)a(T)=\frac{\partial}{\partial x}\left[P(x)\frac{\partial}{\partial x}T(x)\right]-BT(x)-A=L\cdot\left(T(x)-\frac{A}{B}\right) \qquad (2)$$

となる．さらに，付録2より任意の定常解は次式を満たす．

$$T(x)=-\frac{A}{B}+\mu Q\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(x)}{\lambda_n}\int_0^1 dx\phi_n(x)a(T)\ S(x) \qquad (3)$$

特に，暖かい定常解は $a(T)$ が定数 a_M であるから，

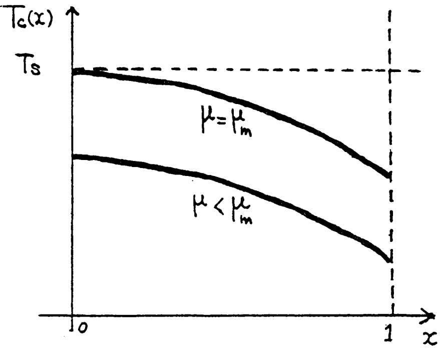
$$T_w(x)=-\frac{A}{B}+\mu Qa_M\hat{S}(x) \qquad (4)$$

但し $\hat{S}(x)=-L^{-1}\cdot S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(x)}{\lambda_n}\int_0^1 dx\phi_n(x)S(x)$

となる．付録3より $\hat{S}(x)$ は正定符号かつ減少関数であるから，$T_w(x)$ は x について減少関数であることが分かる．また，$T_w(x)$ は μ についても単調であるから，$T_w(x)\geqq T_s$ により暖かい定常解が存在できる μ の最小値が

$$\mu_M=\frac{T_s+A/B}{Qa_M\hat{S}(1)}$$

と求められる（第2図）．もし $\mu\geqq\mu_M$ を満たす μ のある値で，異なる2つの暖かい定常解 $T_1(x)$, $T_2(x)$ が存在すると仮定すると (2) 式により $L\cdot(T_1(x)-T_2(x))=0$ となる．ところが付録2に示すように L は可逆だから矛盾が生じる．従って，暖かい定常解には一意性が成立する．付録2に示すように，暖かい定常解における線形化演算子 L の最小固有値の値は $B>0$ である．ゆえに全ての固有値は正であるから暖かい定常解は安定である．$T(x)$ を任意の定常解とすると (3) より，



第3図　冷たい定常解

$$T(x)-T_s=-\left(\frac{A}{B}+T_s\right)-\mu QL^{-1}\cdot S(x)a(T) \quad (5)$$

$S(x)a(T)$ は正定符号だから付録3より右辺第2項も正定符号である．μ が十分大きければ任意の x に対して，$T(x)\geqq T_s$，即ち暖かい定常解以外の定常解は存在しない．

冷たい定常解 $T_c(x)$ の場合も，一意性，単調性，安定性は暖かい定常解の場合と同様に成り立つ．冷たい定常解が存在できる μ の最大値 μ_m は，

$$\mu_m=\frac{T_s+A/B}{Qa_m\hat{S}(0)}$$

と求められる（第3図）．また，$T_s+A/B>0$ であるから (5) より，μ が充分小さければ冷たい定常解以外の定常解は存在しない．

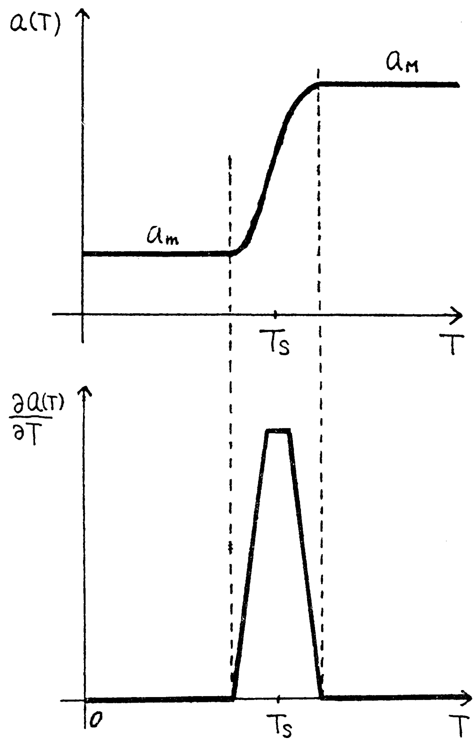
3.2　模型に存在する分岐

暖かい定常解と冷たい定常解以外の中間の定常解は少なくとも1度は T_s を横切る．このような定常解を扱うために次のような設定をする．

$\mu=\mu_0$ での定常解 $T_0(x)$ における $F(T,\mu)$ の線形化演算子 $DF(T_0,\mu_0)$ の固有値，固有関数を ν，$\phi(x)$ として以下のように定義する．

$$\begin{aligned}
&DF(T_0,\ \mu_0)\cdot\phi_n(x)+\nu_n\phi_n(x)\\
&\quad=\frac{\partial}{\partial x}\left[P(x)\frac{\partial}{\partial x}\phi_n(x)\right]\\
&\qquad+\mu_0 QS(x)\left\{\frac{\partial}{\partial T}a(T_0)\right\}\phi_n(x)-B\phi_n(x)\\
&\qquad+\nu_n\phi_n(x)\\
&\quad=0,\\
&\qquad\left[(1-x^2)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}\phi_n(x)\right]_{x=0,1}=0 \quad n=1,\ 2,\ 3\cdots
\end{aligned} \quad (6)$$

$a(T)$ は階段関数だから $\frac{\partial}{\partial T}a(T)\propto\delta$ (Dirac delta) である．そこで $a(T)$ を $T(x)=T_s$ をはさむ微小区間で急激に変化する滑らかな関数，$\frac{\partial}{\partial T}a(T)$ を連続関数である（第4図）とし，上式に Sturm-Liouville の定理が適用できると仮定する．$\phi_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3\cdots)$ は規格化したもので，$\phi_n(0)>0$ である．

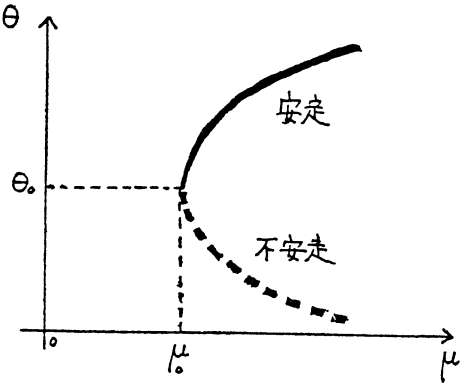


第4図　吸収率 a（T）（滑らかな関数）

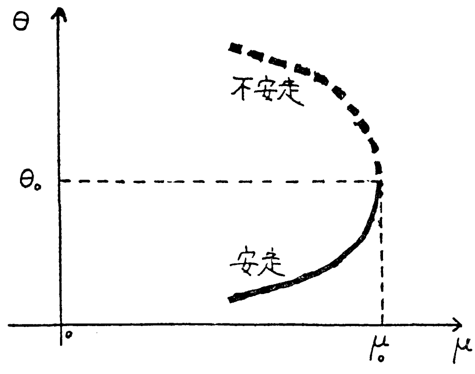
固有値が1つでも負であれば定常解は不安定である．以下，最小固有値 ν_1 を除いて固有値が全て正である場合のみ考えれば充分である．

Liapounov-Schmidt の還元法（Golubisky & Schaeffer, (1985) とは，ある $(T_0(x),\ \mu_0)$ 近傍の定常相図 (stationary phase portrait) $\{(T,\mu)\in R^{\infty}\times R\mid F(T,\mu)=0\}$ を，ν_1 に属する固有空間と外部助変数空間の張る2次元空間へ射影する手法である．このとき定常相図と射影図は同相であることが分かっている．

ν_1 固有空間Eへの射影演算子をP，その直交補空間 $E^{\perp}$ への射影演算子を $P^{\perp}$ とする．$T_0(x)$ 近傍の定常解 $T(x)$ を $T_0(x)+\theta\phi_1(x)+P^{\perp}\cdot\{T(x)-T_0(x)\}$ と表したとき，(0, 0) 近傍での還元関数 (reduced function) g は，



第5図　対発生型分岐（μ の値が大きくなる向き）



第6図　対消滅型分岐（μ の値が大きくなる向き）

$$g(\theta,\ \mu-\mu_0)=\int_0^1 dx\phi_1(x)F(T_0(x)+\theta\phi_1+W(\theta,\ \mu-\mu_0),\ \mu)$$

$W(\theta,\ \mu-\mu_0)$ は $E^{\perp}$ の元で $P^{\perp}\cdot F(T_0+\theta\phi_1+W,\mu)=0$ の解である．g を用いて，射影図は $\{(\theta,\ \mu-\mu_0)\in R\times R\,|\,g(\theta,\ \mu-\mu_0)=0\}$ と表される．

付録4および $\frac{\partial}{\partial\mu}F(T_0,\ \mu_0)=QS(x)a(T_0)$ から，

$$\frac{\partial}{\partial\mu}g(0,\ 0)=Q\int_0^1 dx\phi_1(x)S(x)a(T_0)$$

となる．$\phi_1(x)$ は正定符号であるので上式は任意の定常解に対して正である．

$\frac{\partial}{\partial\theta}g(0,0)$ が零でなければ g を次のように近似できる．

$$g(\theta,\ \mu-\mu_0)=\left\{\frac{\partial}{\partial\mu}g(0,\ 0)\right\}(\mu-\mu_0)+\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}g(0,\ 0)\right\}\theta$$

付録4より，上式の θ の係数は $-\nu_1$ である．θ 軸を縦軸，μ 軸を横軸にすると，$(T_0(x),\ \mu_0)$ 近傍の定常解が安定（$\nu_1>0$）ならば射影図は右上がりの図になる．反対に定常解が不安定（$\nu_1<0$）ならば射影図は右下がりの図になる．また，θ の1次の係数が零，2次の係数が零でない場合，還元関数 g は，

$$g(\theta,\ \mu-\mu_0)=\left\{\frac{\partial}{\partial\mu}g(0,\ 0)\right\}(\mu-\mu_0)+\frac{1}{2!}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}g(0,\ 0)\right\}\theta^2 \qquad (7)$$

である．この場合の射影図は放物線で，$(T_0(x),\ \mu_0)$ は極限点（limit point）となる．放物線の右上がりの部分が安定な定常解の射影図，右下がりの部分が不安定な定常解の射影図である．以下同様に，還元関数は $\mu-\mu_0$ の項と $\theta^n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の項で近似され，$n=2,\ 4,\ 6\cdots$ の時，$(T_0(x),\ \mu_0)$ は極限点の類となる．$n=3,\ 5,\ 7,\ \cdots$ の時は，履歴点（hysterisis point）の類となり，射影図は右上がり，もしくは右下がりとなり分岐点にはならない．

次のことが結論される．

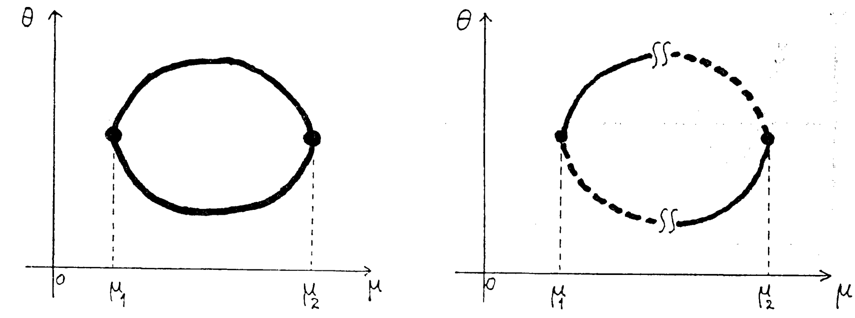
まず，分岐は μ の値が大きくなる向きに対発生する分岐（第5図），対消滅する分岐（第6図）に限られ，単純分岐（simple bifurcation point）や熊手型分岐（pitchfork bifurcation point）は存在しない．また，$F(T,\mu)$ が potential を持つ（North 1979）ことから周期解は存在せず，従って周期解分岐も存在しない．なぜなら potential 系では軌跡は potential の高い方から低い方へ向かって進むので，決して閉じた軌跡は存在しないからである（種々の分岐については Golubisky & Schaeffer, 1985に依った．）

次に，孤立した定常相図は無い．孤立定常相図とは，μ のある値 μ_1 で対発生した一対の定常解が連続的に変化して別の値 μ_2 で対消滅するものである．最も単純な例として第7図-a を挙げる．ところが，安定な定常解の定常相図の射影図は右上がり，不安定な定常解の場合は右下がりであることを考慮すると，第7図-b に示すように，定常相図はつながらない．従って，定常相図は孤立し得ない．

3.3　複数の氷端を持つ定常解の否定

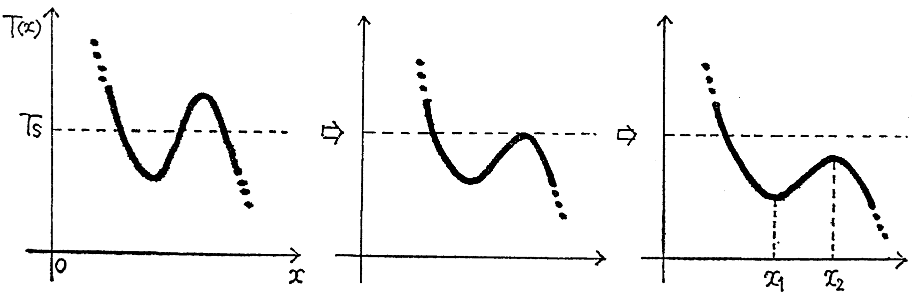
定常解 $T(x)$ がある点 x_s で T_s の値をとるとき，x_s を定常解 $T(x)$ の氷端（ice edge）と定義する．

もし μ の値が変わるにつれて氷端の数が増減するような変化があるならば，T_s 近傍での定常解の変化として第8図，第9図が考えられる．第8図，第9図の矢印



(a)　　　　(b)

第7図　孤立定常相図



(a)　　　　(b)　　　　(c)

第8図　氷端の数が増減する変化（その1）

を逆にしたもの（氷端の数増加）や4つ以上の氷端が1つに合一するような複雑な場合も考えられるが，同様の議論できるので敢えてとりあげないことにする．

第8図のような変化においては，$x_1<x_2$ で $T'(x_1)=0$, $T'(x_2)=0$, $T''(x_1)\geqq 0$, $T''(x_2)\leqq 0$ なる点 x_1, x_2 が必ず存在する（第8図-c）．(2) に x_1, x_2 を代入し差をとると，

$$\mu Q a_m(S(x_1)-S(x_2))=-P(x_1)T''(x_1)+P(x_2)T''(x_2)+B\{T(x_1)-T(x_2)\}$$

このとき S(x)が減少関数であるから左辺は正，$P(x)>0$ から右辺は負となり等号関係が成立しない．従って第8図の様な変化は起こり得ない．

第9図のような変化において，3つの氷端が合一するときの氷端を x_0 とする（第9図-b）．a(T) は $x=x_0$ で有限の跳びをもつ関数であるが (2) より $T''(x)$ が x_0 で相当する有限の跳びをもつことになる．このとき T(x) および $T'(x)$ は x_0 で連続である．なぜなら，もし $T'(x)$ が x_0 で不連続ならば $T''(x)\propto\delta(x-x_0)$ となり $T''(x)$ が x_0 で有限の跳びを持つことに矛盾するからである．T(x) と $T'(x)$ が連続であるから，3つの氷端が合一するとき，即ち x_0 においては $T(x_0)=T_s$, $T'(x_0)=0$ となる．

ε, η を小さな実正数とする．

$$T(x_0+\eta)=\lim_{\varepsilon\to 0}T(x_0+\varepsilon)+\eta\lim_{\varepsilon\to 0}T'(x_0+\varepsilon)+\frac{\eta^2}{2!}\lim_{\varepsilon\to 0}T''(x_0+\varepsilon)+\cdots$$

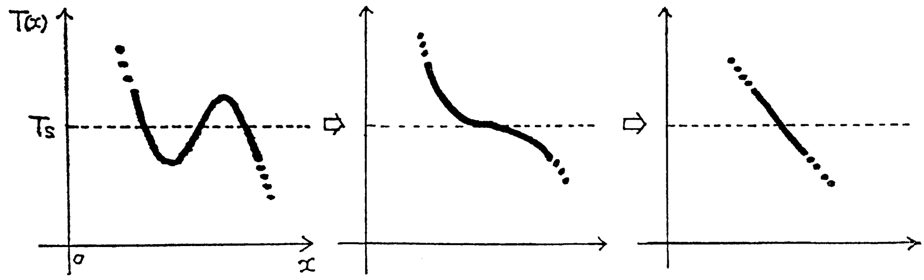
$$T(x_0+\eta)=T_s+0+\frac{\eta^2}{2!}\lim_{\varepsilon\to 0}T''(x_0+\varepsilon)+\cdots$$

であるが，$T(x_0+\eta)<T_s$ なので $\lim_{\varepsilon\to 0}T''(x_0+\varepsilon)$は正である事はできず，$\lim_{\varepsilon\to 0}T''(x_0+\varepsilon)\leqq 0$ となる．同様に，$\lim_{\varepsilon\to 0}T''(x_0-\varepsilon)\geqq 0$ となる．一方 (2) より次式を得る．

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{\mu QS(x_0-\varepsilon)\ a(T(x_0-\varepsilon))-\mu QS(x_0+\varepsilon)\ a(T(x_0+\varepsilon))\}=\lim_{\varepsilon\to 0}\{P(x_0-\varepsilon)\ T''(x_0-\varepsilon)-P(x_0+\varepsilon)\ T''(x_0+\varepsilon)\}$$

これより，

$$\mu QS(x_0)(a_M-a_m)=P(x_0)\{\lim_{\varepsilon\to 0}T''(x_0-\varepsilon)$$



(a)　(b)　(c)

第9図　氷端の数が増減する変化（その2）

$$-\lim_{\varepsilon\to 0} T''(x_0+\varepsilon)\}$$

となるが右辺は非正，左辺は正であるからこれは矛盾である．ゆえに第9図も否定される．

次に，暖かい定常解もしくは冷たい定常解が2つ以上の氷端を持つ定常解に変化しないことを示す．

暖かい定常解は $x=0$ を除き単調減少だから $x=1$ の様子を調べればよい．(2) に $x=1$ を代入し $P(1)=0$ を用い，(3) に付録2を用いると，

$$\mu QS(1)a(T(1))=-P'(1)T'(1)+B\left\{T(1)+\frac{A}{B}\right\}$$

$$T(x)+\frac{A}{B}=-L^{-1}\cdot\mu QS(x)a(T)>0$$

このとき，$S(1)\gtrsim 0$, $P'(1)<0$ から，任意の定常解に対して，$T'(1)<0$ が分かる．これゆえに，暖かい定常解は $x=1$ でひとつの氷端を持つ定常解に変化する．

冷たい定常解の場合は，$x=0$ での様子を調べればよい．$T(x, \mu)$ を $\mu\gtrsim\mu_m$ における定常解とすると，$T(0, \mu_m)=T_s$, $T'(0, \mu_m)=0$ であるから，

$$T(x, \mu)-T_s=\left\{\frac{\partial}{\partial\mu}T(0, \mu_m)\right\}(\mu-\mu_m)+\frac{1}{2!}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(0, \mu_m)\right\}x^2+\cdots$$

一方，

$$T(x, \mu_m)-T_s=\frac{1}{2!}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(0, \mu_m)\right\}x^2+\frac{1}{3!}\left\{\frac{\partial^3}{\partial x^3}T(0, \mu_m)\right\}x^3+\cdots\leqq 0$$

$\mu\gtrsim\mu_m$ に対しては，$T(x, \mu)>T_s$ となる x が存在するから $\frac{\partial}{\partial\mu}T(0, \mu_m)>0$ となる．これゆえに，冷たい定常解は $x=0$ で一つの氷端を持つ定常解に変化する．

以上の議論により，もし複数の氷端を持つ定常解があるとするとその定常相図は孤立していなければならない．しかし，3.2 の結論からこれは禁止される．これで，系の全ての定常解は2つ以上の氷端をもたないことが結論された．

この結果と第8図の議論を組み合わせると，中間の定常解も，単調に減少する関数であることが分かる．

3.4　暖かい定常解および冷たい定常解の分岐

μ_M, μ_m 近傍のある固定された μ における定常解の氷端を x_s として次の関数を定義する．

$$h(x_s)=T(x_s)-T_s$$

(3) 式を，$T(x)$ の単調性を利用して変形することにより上式は，

$$h(x_s)=-T_s-\frac{A}{B}+\mu Q\left\{(a_M-a_m)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(x_s)}{\lambda_n}\int_0^{x_s}dy\phi_n(y)S(y)+a_m\hat{S}(x^s)\right\} \tag{8}$$

ある固定された μ における定常解 $T(x)$ の氷端は，$h(x_s)=0$ の根である．さらに，

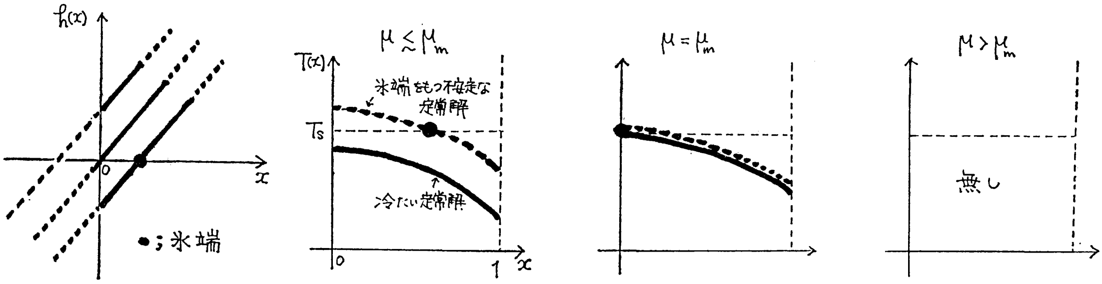
$$h'(x_s)=\mu Q\left[(a_M-a_m)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n'(x_s)}{\lambda_n}\int_0^{x_s}dy\phi_n(y)S(y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(x_s)\phi_n^2(x_s)}{\lambda_n}\right\}+a_m\hat{S}'(x_s)\right] \tag{9}$$

(8), (9) に $x_s=0$ を代入する $\hat{S}(x)$ の境界条件 $\hat{S}'(0)=0$ により，

$$h(0)=-T_s-\frac{A}{B}+\mu Qa_m\hat{S}(0)=Qa_m\hat{S}(0)\ (\mu-\mu_m)$$

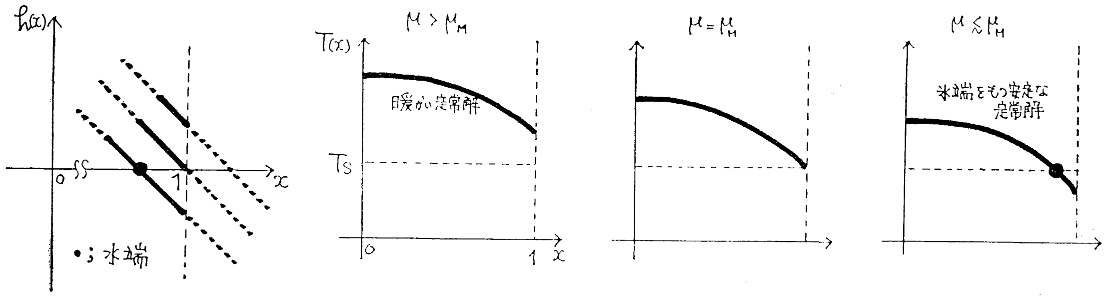
$$h'(0)=\mu Q(a_M-a_m)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(0)\phi_n^2(0)}{\lambda_n}$$

$h'(0)$ は常に正であるから μ が μ_m の近傍にあるときの $h(x)$ の様子は第10図-a の様になる．第10図-a か



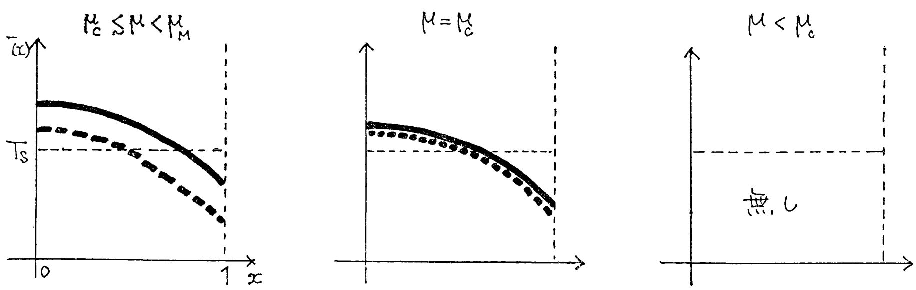
(a) (b) (c) (d)

第10図 μ_m 近傍での h (x) の変化と冷たい定常解と氷端を持つ定常解との分岐



(a) (b) (c) (d)

第11図 μ_M 近傍での h (x) と暖かい定常解の変化



(a) (b) (c)

第12図 氷端を持つ安定な定常解と不安定な定常解との分岐

ら，$\mu \lesssim \mu_m$ において氷端を持つ定常解が一つ存在することが分かる．一方これとは別に，$\mu \leqq \mu_m$ では 3.1で述べたように冷たい定常解が一意に存在している（第10図-b）．さらに，第10図-aから分かるように $\mu \gtrsim \mu_m$ においてはこの氷端を持つ定常解はもはや存在せず，冷たい定常解も存在しないのだから，$\mu=\mu_m$ でこの2つの定常解は μ が大きくなる向きに対消滅していることになる．従って $\mu=\mu_m$ は分岐点である．次たい定常解は安定であるのでこの氷端を持つ定常解は不安定である．

同様に (8)，(9) に $x_s=1$ を代入する．

$$h(1)=-T_s-\frac{A}{B}+\mu Q a_M \hat{S}(1)=Q a_M \hat{S}(1)(\mu-\mu_M)$$

$$h'(1)=\mu Q a_M \hat{S}'(1)+\mu Q(a_M-a_m)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(1)\phi_n^2(1)}{\lambda_n}$$

$S(1)\gtrsim 0$ から $h'(1)<0$ であり，μ が μ_M の近傍にある時の $h(x)$ の様子は第11図-aで与えられる．第11図-aから，$\mu\lesssim\mu_M$ において氷端を持つ定常解が一つ存在することが分かる．一方 $\mu\geqq\mu_M$ では暖かい定常解が一意に存在する（3.1）．$\mu=\mu_M$ をはさんで定常解の数に変化が無いから $\mu=\mu_M$ は分岐点ではない．定常解の安定性は分岐点を経ずに変わることはないから，μ の値が μ_M を越えて小さくなるにつれ暖かい定常解は氷端を持つ安定な定常解に変化する（第11図-b，c，d）．

3.1の終わりで述べたように，十分小さな μ に対しては冷たい定常解以外の定常解は存在しないことから，$\mu\lesssim\mu_M$ で現れた氷端を持つ安定な定常解は十分小さな μ に対しては存在しない．一方，この氷端を持つ定常解が μ の減少と共に連続的に冷たい定常解に変化し得ないことは，$\mu=\mu_m$ が冷たい定常解の分岐点であることから明らかである．従って，この氷端を持つ定常解は μ のある値 $\mu_c(<\mu_M)$ で氷端を持つ不安定な定常解と，μ の値の小さくなる向きに対消滅しなければならない（第12図a，b，c）．

4. 考　察

$\mu=\mu_c$，μ_m 以外の点で分岐が存在するかどうか考察する．

(7) の右辺第2項の大きさと正負を見積る．この項の係数が負ならば μ の値の大きくなる向きに対発生する分岐（第5図），正ならば対消滅する分岐（第6図）である．

$a(T)$ に次のような連続関数を与える（第13図）．

$$a(T)=\begin{cases} a_m & T(x)<T_s \text{ のとき} \\ b(T(x)-T_s+\varepsilon)+a_m & T_s-\varepsilon\leqq T(x)\leqq T_s+\varepsilon \text{ のとき} \\ a_M & T(x)>T_s \text{ のとき}\end{cases}$$

但し　$b=\dfrac{a_M-a_m}{2\varepsilon}$　　$0<\varepsilon\ll 1$

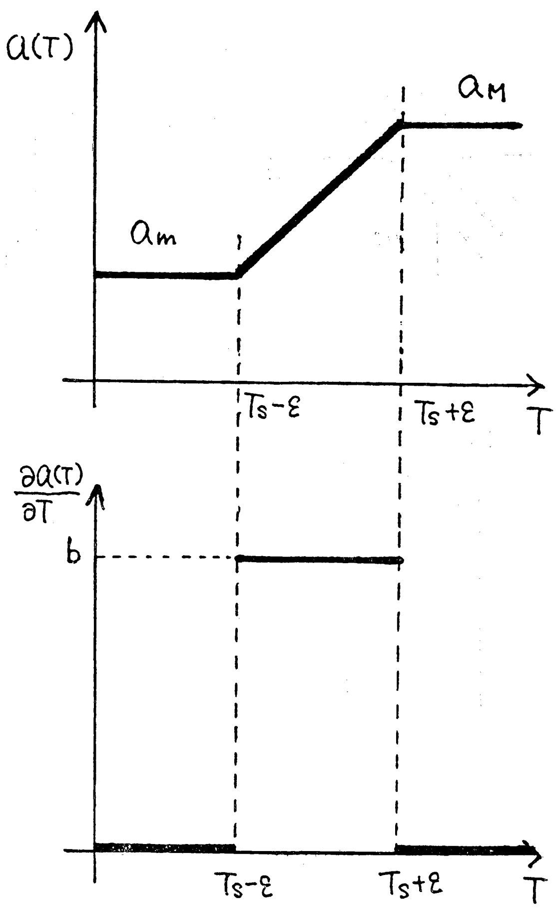
$(T_0(x),\ \mu_0)$ を分岐点とする．

付録4と $\dfrac{\partial^2}{\partial T^2}a(T_0)=b\{\delta(T_0-T_s+\varepsilon)-\delta(T_0-T_s-\varepsilon)\}$

より，(7) 式右辺第2項の係数は次のようになる．

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}g(0,\ 0)=\mu_0 Qb\left(\frac{\phi_1{}^3(\beta)S(\beta)}{-T'(\beta)}-\frac{\phi_1{}^3(\alpha)S(\alpha)}{-T'(\alpha)}\right) \tag{10}$$

ここで



第13図　吸収率 a (T)（連続関数）

$$D^2F(T_0,\ \mu_0)\cdot uv =\lim_{h\to 0}\frac{DF\ (T_0+hv,\mu_0)\cdot u-DF(T_0,\ \mu_0)\cdot u}{h} =\mu_0 QS(x)\left\{\frac{\partial^2}{\partial T^2}a\ (T_0)\right\}uv,$$

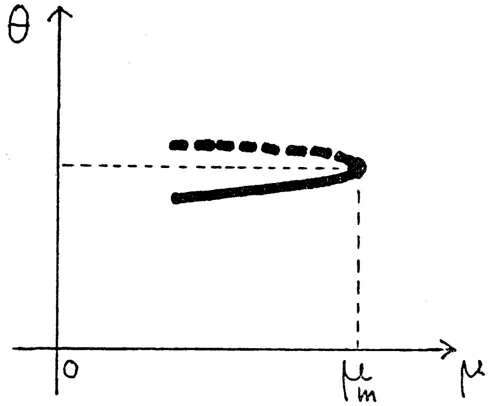
$T_0(\alpha)=T_s+\varepsilon$，$T_0(\beta)=T_s-\varepsilon$，$\alpha<\beta$

である．$T_0(x)$ は単調（3章）であるから α，β は一意に定義される．

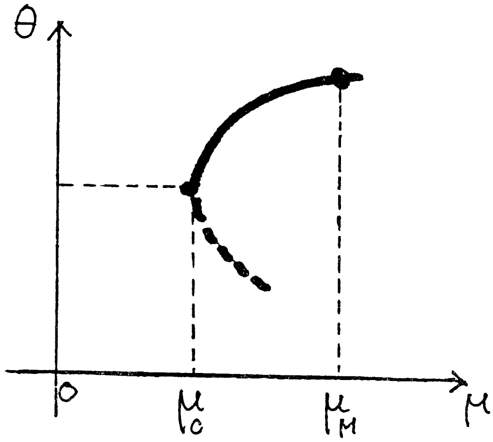
特に，$\mu=\mu_m$ での分岐は，分岐が $T_s-\varepsilon\leqq T(0)<T_s+\varepsilon$ を満たすところで起こっていると考える．このとき第2項の係数は

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}g(0,\ 0)=\mu_0 Qb\frac{\phi_1{}^3(\beta)S(\beta)}{-T'(\beta)}=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

である．これは μ の値が大きくなる方向へ緩やかに対消滅する分岐を意味する．（第14図-a）．これまでの研究と照合すれば，この評価は妥当であると考える．



(a)



(b)

第14図 μ_m と μ_M 近傍での射影図

ところで，P(x) が $P''(x)\leqq 0$, $P'''(x)\geqq 0$ を満たすならば，常に $T''(x)<0$ である．(P(x) がこの条件を満たすか否かをここでは議論しない．ただ，渦拡散係数が定数ならばこの条件を満足する．証明は付録5に示す．)

$T_0''(x)<0$, $T_0'(x)$ の連続性および定常解の単調性から $T_0'(\beta)<T_0'(\alpha)<0$, $T_0'(\alpha)-T_0'(\beta)=O(\varepsilon)$ である．同様に $S(\beta)<S(\alpha)$, $S(\alpha)-S(\beta)=O(\varepsilon)$ である．正値をとる連続関数 $\phi_1(x)$ は $|\phi_1(\beta)-\Psi_1(\alpha)|=O(\varepsilon)$ である．以上から (10) の値は O(1) であり，μ_c での分岐 μ_m はでの分岐よりも急激であるといえる (第14図-b).

もし，$\phi_1(\beta)<\phi_1(\alpha)$ であれば，(10) で表される θ の2次の係数は如何なる分岐点 ($\mu\neq\mu_m$) においても負となる．仮に，$\phi(\alpha)<\phi(\beta)$ でも，$T_0'(x)$ と S(x) の方の差が $\phi_1(x)$ の方の差を凌駕しているならば係数は負になる．係数が負ならば，系に存在する分岐は第5図のものに限られる．これは $\mu=\mu_c$, μ_m 以外に分岐が存在しないことを意味する．反対に，係数が正になることもあるならば，$\mu=\mu_c$, μ_m 以外の対発生，対消滅型分岐が対で存在する可能性がある．視点を変えれば，これまでに述べた安定な定常解とは別の，氷端を持つ安定な定常解が存在することである．この定常解の氷端は，暖かい定常解が連続的に変化した，氷端を持つ安定な定常解の氷端より低緯度側に位置するだろう．しかしながら，本研究では係数の正負を決定するに至らず，$\mu=\mu_c$, μ_m 以外の分岐の有無については未証明である．

5. 結 論

気候一次元模型の定常な温度分布は，緯度に対して常に単調であることが解析的に示された．外部助変数の値がある範囲にあるとき，安定な定常解は複数存在することが示された．これらの安定な定常解は，外部助変数のある値で，不安定な定常解と共に対発生・対消滅型の分岐をしていることが示された．

暖かい定常解が連続的に変化して氷端を持つ安定な定常解に変化していることが示された．しかしながら，これ以外の，安定で氷端を持つ定常解の有無については確定することができなかった．

模型の支配方程式をある定常解の近傍で singular Sturm-Liouville 問題として捉えた．これにより固有値・固有関数についての情報が多く得られ Liapounov-Schmidt の還元法が有効となった．

付録1

区間 [a, b] で定義された微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial}{\partial x}\phi(x)\right]-q(x)\phi(x)+\lambda r(x)\phi(x)=0$$

境界条件 $\alpha\phi(c)+\beta\phi'(c)=0$, c=a, b, α, β は定数

が，区間 [a, b] で $p(x)>0$ $r(x)>0$, p(x) q(x) r(x) は連続，を満たすとき，これを regular Sturm-Liouville 問題という．

本文では，x=1 での境界条件が不定で，P(1)=0 である．この場合は，singular Sturm-Liouville 問題と呼ばれる．このとき $\phi(1)$, $\phi'(1)$ が有界であるならば次のことが成り立つ (注，極で気温と気温の勾配が有界であると考えるのは自然であるから，本文でこの仮定は成立する.)

微分方程式を満たす固有値，固有関数の組について

①固有値は縮退しない．

②最小固有値が存在する．

③固有関数は互いに直交し，完全系を張る．

④最小固有値に属する固有関数は節を持たない．

付録2

微分演算子

$$L=\frac{\partial}{\partial x}P(x)\frac{\partial}{\partial x}-B,\ P(x)=k(x)(1-x^2),$$
$$k(x)>0,\ B>0$$

の固有値および固有関数を

$$L\cdot\phi_n(x)+\lambda_n\phi_n(x)=0,\quad [(1-x^2)^{1/2}\phi_n'(x)]_{x=0,1}=0$$
$$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

と定義する．以下，固有関数は規格化されており，$\phi_n(0)>0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする．この時，最小固有値 λ_1 の値はBであり，λ_1 に属する固有関数 $\phi_1(x)$ は1である．また，Lの逆演算子が存在し，

$$L^{-1}\cdot u(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(x)}{\lambda_n}\int_0^1 dx\phi_n(x)u(x)$$

となる．

証明

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[P(x)\frac{\partial}{\partial x}\phi_n(x)\right]-B\phi_n(x)+\lambda_n\phi_n(x)=0$$
$$[(1-x^2)^{1/2}\phi_n'(x)]_{x=0,1}=0\qquad n=1,\ 2,\ 3\cdots$$

は Sturm-Liouville 型である．

$\lambda=B$ の時 $\phi(x)=1$ は上式の一つの解であり，$\phi(x)$ は零点を持たないので最小固有値 λ_1 に属する．従って，$\lambda_1=B,\ \phi_1(x)=1$ となる．

$\lambda_1>0$ より全ての固有値は正となるため，明らかにLには逆演算子が存在する．$\{\phi_n(x)\}$ $(n=1,\ 2,\ 3\cdots)$ は完全系を張るから，境界条件を満たす任意の関数 v(x) は一意に，

$$v(x)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n\phi_n(x)$$

と表される．v(x) を $v(x)=L^{-1}\cdot u(x)$ とすると，u(x) は，

$$u(x)=L\cdot\sum_{n=1}^{\infty}v_n\phi_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}v_nL\cdot\phi_n(x)$$
$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_nv_n\phi_n(x)$$

となる．$\{\phi_n(x)\}n=1,\ 2,\ 3\cdots$ の直交性より，

$$v_m=-\frac{1}{\lambda_m}\int_0^1 dx\phi_m(x)u(x)$$

従って，

$$v(x)=L^{-1}\cdot u(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\int_0^1 dx\phi_n(x)u(x)$$

証明終

付録3

$$\hat{f}(x)=-L^{-1}\cdot f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\int_0^1 dx\phi_n(x)f(x)\quad (A1)$$

$$L=\frac{\partial}{\partial x}P(x)\frac{\partial}{\partial x}-B,\ P(x)=k(x)(1-x^2),$$
$$k(x)>0,\ B>0$$

において，

(1) f(x)が正定符号ならば $\hat{f}(x)$ も正定符号である．

(2) $x\neq0$ に対して f(x) が単調減少関数ならば $\hat{f}(x)$ も単調減少関数である．

が成立する．ここで f(x)，$\hat{f}(x)$ は境界条件

$$[(1-x^2)^{1/2}f'(x)]_{x=0,1}=0,$$
$$[(1-x^2)^{1/2}\hat{f}'(x)]_{x=0,1}=0$$

をみたすものとする．

証明

(A1) は，

$$f(x)=-\frac{\partial}{\partial x}\left[P(x)\hat{f}'(x)\right]+B\hat{f}(x)\qquad (A2)$$

(1) について．

①$[x_1,\ x_2]$ において $\hat{f}(x)\leqq0$ (第15図) と仮定して，(A2) を区間 $[x_1,\ x_2]$ で積分すると，

$$\int_{x_1}^{x_2}dxf(x)=-P(x_2)\hat{f}'(x_2)+P(x_1)\hat{f}'(x_1)$$
$$+B\int_{x_1}^{x_2}dx\hat{f}(x)$$

となる．$\hat{f}'(x_1)\leqq0(x_1\neq0)\hat{f}'(x_2)\geqq0(x_2\neq1)$，$P(1)=0$ より右辺は負であるが左辺は正であるから矛盾．

②x_1 において $\hat{f}(x_1)=0,\ \hat{f}'(x_1)=0,\ \hat{f}''(x_1)=0$ と仮定すると (A2) より

$$f(x_1)=-P(x_1)\hat{f}''(x_1)$$

右辺は非正であるが左辺は正であるから矛盾．

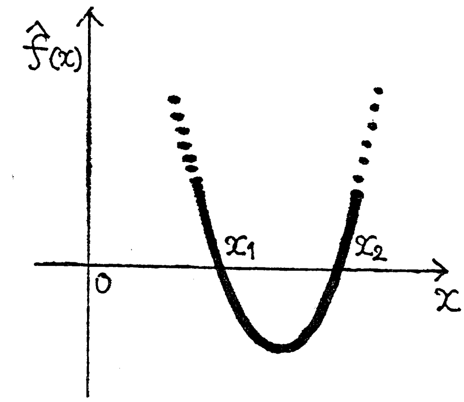
(2) について．

①$[x_1,\ x_2]$ において $\hat{f}'(x)\geqq0$ (第16図) と仮定すると (A2) より，

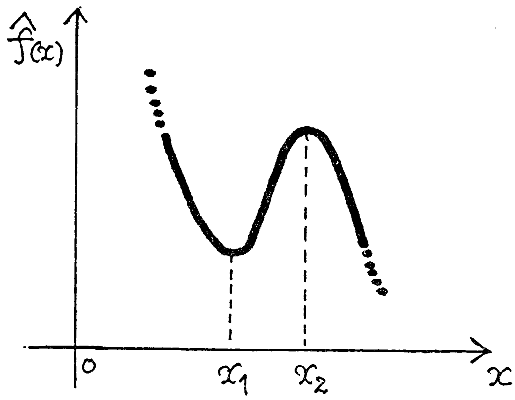
$$f(x_1)-f(x_2)=-P(x_1)\hat{f}''(x_1)+P(x_2)\hat{f}''(x_2)$$
$$+B\{\hat{f}(x_1)-\hat{f}(x_2)\}$$

となる．$\hat{f}'(x_1)=0,\ \hat{f}''(x_1)\geqq0,\ \hat{f}'(x_2)=0,\ \hat{f}''(x_2)\leqq0$ $(x_2\neq1)$，$\hat{f}'(1)\geqq0$，$P'(1)<0$ より右辺は非正であるが，左辺は正であるから矛盾．

②$x_1\neq1$ において $\hat{f}'(x_1)=0,\ \hat{f}''(x_1)=0,\ \hat{f}'''(x_1)\leqq0$ あるいは $x_1=1$ において $\hat{f}'(1)=0,\ \hat{f}''(1)\geqq0$ と仮定すると，(A2) より



第15図



第16図

$$f'(x_1)=-2P'(x_1(f'')x_1)-P(x_1)f'''(x_1)$$

となる．$P(1)=0$，$P'(1)<0$ より右辺は非負であるが，左辺は負であるから矛盾．

証明終

付録 4

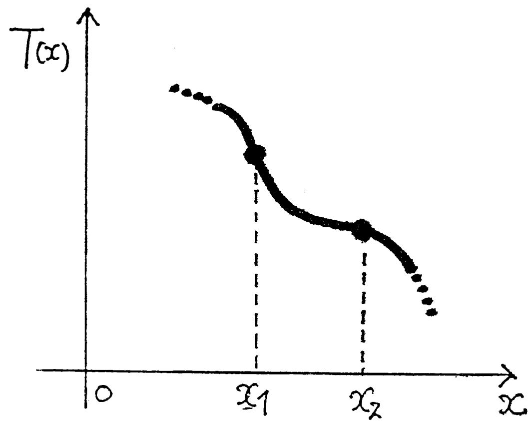
本文で還元関数を $(0,\ 0)$ 近傍で近似するときに必要な事実を列挙する．g は，

$$g\ (\theta,\ \mu-\mu_0)=\int_0^1 dx\phi_1(x)F(T_0(x)+\theta\phi_1+W(\theta,\ \mu-\mu_0),\ \mu)$$

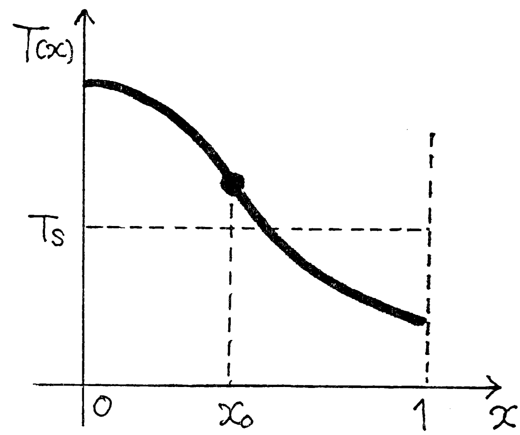
$W(\theta,\mu-\theta_0)$ は $E^{\perp}$ の元で $P^{\perp}F(T_0+\theta\phi_1+W,\mu)=0$ の解であった．証明は，Golubisky & Schaeffer (1985) にかえる．

① $g(0,\ 0)=0$

② $\dfrac{\partial}{\partial\mu}g(0,\ 0)=\displaystyle\int_0^1 dx\phi_1(x)\frac{\partial}{\partial\mu}F(T_0,\ \mu_0)$



第17図



第18図

③ $\dfrac{\partial}{\partial\theta}g(0,\ 0)=-\nu_1$

④ $\dfrac{\partial}{\partial\theta^2}g(0,\ 0)=\displaystyle\int_0^1 dx\phi_1(x)D^2F(T_0,\ \mu_0)\cdot\phi_1{}^2(x)$

付録 5

$P''(x)\leqq 0$，$P'''(x)\geqq 0$ ならば $T''(x)<0$

証明

(3) で $\mu QS(x)a(T)$ を $f(x)$，$T(x)+A/B$ を $\hat{f}(x)$ として，次のように書く

$$f(x)=-P(x)\hat{f}''(x)-P'(x)\hat{f}'(x)+B\hat{f}(x)\qquad (A\,3)$$

$T(x)>T_s$ または $T(x)<T_s$ なる開区間 $(x_1,\ x_2)$ で $\hat{f}''(x)>0$ であるとする（第17図）．この時，$x=x_1$，x_2 では $\hat{f}(x)$ の曲率は零，$\hat{f}'(x_1)<\hat{f}'(x_2)$，$\hat{f}'''(x_1)\geqq 0$，$\hat{f}'''(x_2)\leqq 0$ である．（A 3）の両辺を 2 回微分したものを閉区間 $[x_1,\ x_2]$ で積分する．部分積分を用いて，次の

ように整理する.

$$\int_{x_1}^{x^2} dx f''(x) = -P(x)\hat{f}'''(x)\Big]_{x_1}^{x^2} - P''(x)\hat{f}'(x)\Big]_{x_1}^{x^2} + B\int_{x_1}^{x^2} dx \hat{f}''(x) \qquad (\mathrm{A}\ 4)$$

$P(x)$の仮定より右辺は正，$a(T)$は定数，および $S''(x)<0$ より左辺は負となり等号関係に矛盾が生じる. x_1もしくは x_2 が氷端である場合，(x_1，x_2) が T_s をまたぐ場合も同様に，矛盾を導くことができる.

さらに，$\hat{f}'(0)=T'(0)<0$ より $\hat{f}''(0)\leqq 0$であるから，第18図の x_0 のような可能性がある. $x=x_0$ は曲率が零で，$T(x_0)$ は T_s より大きく，$x>x_0$ では $\hat{f}''(x)>0$である. (A 4) で $x_1=x_0$，$x_2=1$ とすると，$\hat{f}'(x_0)<\hat{f}'(1)$，$\hat{f}'''(x_0)\geqq 0$ であることから左辺は負，右辺は正となって矛盾. $T(x_0)$ がT_s より小さい場合も同様である.

証明終

参考文献

Chil, M., 1976: Climate Stability for Sellers-Type Model, J. Atmos. Sci., 33, 3-20

———, Childress, S., 1987: Topics in Geophysical Fluid Dynamics: Atmospheric Dynamics, Dynamo Theory, and Climate Dynamics, Springer-Verag, 294-328

Golubisky, M., Schaeffer, D.G., 1985: Singularity and Groups in Bifurcation Theory, Springer-Verlag

North, G.R., 1975: Analytical Soution to A Simple Climate Model with Diffusive Heat Transport, J. Atmos. Sci., 32, 1301-1307

———, 1975: Theory of Energy-Balance Climate Models, J. Atmos. Sci., 32, 2033-2043

———, 1979: Variational Formulation of Budyko-Sellers Climate Models, J. Atmos. Sci., 36, 255-259

1989年地球化学研究協会学術賞「三宅賞」の研究助成受領候補者の推薦依頼について

三宅泰雄教授退官記念事業として，創立された（1972年）地球化学研究協会は，その翌年から地球化学に顕著な業績をおさめた科学者に，毎年地球化学研究協会学術賞「三宅賞」を贈呈しています.

さらに1983年からは，あらたに，地球化学の若手研究者で海外シンポジウム等に出席し，論文を発表する者に対し，助成を行っています.

なお，賞金および助成金は本協会を母体として，1983年に新設された公益信託「地球化学研究基金」（受託者東洋信託銀行株式会社）から贈られます.

つきましては，下記の要領により，受賞候補者および研究助成受領候補者のご推薦をお願いします.

記

三宅賞

1. 本賞は地球化学に顕著な研究業績をおさめた科学者に贈呈します.
2. 本賞は賞状とし，副賞として賞牌および賞金（30万円）をそえます.
3. 本賞の贈呈は，1年1件（1名）とします.
4. 同封用紙に受賞候補者の推薦対象となる研究題目，推薦理由（400字程度），主な論文10編程度に略歴をそえて，協会事務所までお送り下さい.

研究助成

1. 研究助成は地球化学の若手研究者で，海外のシンポジウム等に出席し論文を発表する者に対して，行われます.
2. 助成金は1件10万円とし，年に3件とします.
3. 同封用紙に推薦対象者（各締切日において満40歳までとする）の略歴，研究業績，助成金使用の目的，出席予定の国際会議名（開催年月日，開催場所），論文題目推薦理由等を記入して，協会事務所までお送り下さい.

三宅賞の贈呈および研究助成受領者の発表は，1989年12月2日東京で行います.

申込締切日は三宅賞は，1989年9月5日(火)・研究助成は，第1回締切1989年9月5日(火)，第2回締切1990年1月末日.

地球化学研究協会
〒166 東京都杉並区高円寺北 4-29-2-217
TEL. 03-330-2455