新用語解説(27)

WAVELET 解析

データ解析の一手法．80年代初め，石油探査の反射波地震波の解析のために開発され，後に数学的に基礎づけられた方法で，フーリエ解析に似ている．例えば，ある時刻における周波数やある場所における波数など，局所的な周波数（波数）構造を調べたい場合に用いられる．また，時系列中である時刻 t_c を境としてデータの性質が変化しているような場合，t_c を求めるために用いられることもある．あるいは，時系列が（マルチ）フラクタル的であるときには，それを特徴づける f(α) スペクトルを調べるために用いられる場合もある．さらに，画像データなど大量のデータを扱う場合のデータ圧縮法としての利用も行われている．現在，ウェイブレット解析には，連続ウェイブレット変換と離散ウェイブレット変換の2種類のものがある．前者は積分変換，後者は関数展開に基づいており，見かけ上，これらはそれぞれフーリエ変換とフーリエ展開に類似している．ここでは主として連続ウェイブレット変換について述べる．

時系列 $f(t)$ の連続ウェイブレット変換 $T(a,b)$ は，つぎのように定義される．

$$T(a,b)=\frac{1}{\sqrt{ac}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi\left(\frac{t-b}{a}\right)f(t)dt \qquad (1)$$

ここで $\phi(t)$ は，analyzing wavelet と呼ばれフーリエ変換の場合の $\exp(i\omega t)$ に対応するものであるが，$\exp(i\omega t)$ が時間軸上に一様に広がっているのに対し，ある時刻（普通は $t=0$）のまわりでのみ振幅をもつ局在した関数である．通常は逆変換の存在を保証するために，analyzing wavelet は次の条件を満たすものに限られる．

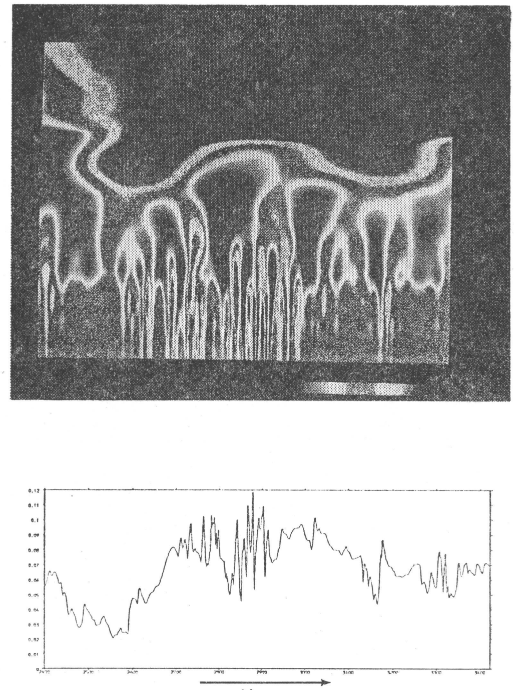
$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)dt=0. \qquad (2)$$

例えば，次の関数は Mexican hat と呼ばれしばしば用いられるものである．

$$\phi(t)=-\frac{d^2}{dt^2}\exp(-t^2/2). \qquad (3)$$

なお(1)式の定義中，c は $\phi(t)$ で決まる定数である．

さて，連続ウェイブレット変換の形から分かるようにパラメーター a は，フーリエ変換の場合の $1/\omega$，つまり周期に対応している．一方 b は $\phi(t)$ の平行移動の量を表している．フーリエ変換には b に対応するパラメーターが無いことに注意されたい．$T(a,b)$ は，従って，$f(t)$ に含まれる「時刻 b における“周期 a”の成分の大きさ」，と解釈できる．これは局所的にフーリエ解析を行うことに相当している．第1図は，乱流のデータ（下図）を連続ウェイブレット変換して $T(a,b)$ を濃淡で示した（原図はカラー）例である．データに細かな振動が現れる時刻に，小さな a の部分の成分が多く励起されているのが分かる．このようにウェイブレット解析は，「ある特定の“周期”を持つ成分が励起されているのはどの時刻か」，といった問いに答えるための道具を与えている．



第1図　乱流信号の連続 Wavelet 変換（縦軸は log a）.
(Everson and Sirovich, 1989)

しかし，連続ウェイブレット変換の応用に際しては，

いくつかの注意が必要である．まず，a は“周期”に対応するがその対応はあまりシャープではなく，むしろある周波数バンドに対応すると言う方が正確である．これは ψ(t) 自身が多くの周波数成分から成ることを思えば当然であろう．次の問題は，若干数学的になるが，フーリエ変換の場合とは異なり，連続ウェイブレット変換の基底関数である $\{\psi(t-b)/a)/\sqrt{a}\}$ が直交系ではないことである．これは，$T(a,b)$ どうしが互いに独立にはならないこと，つまり，第1図に見えるパターンには，データそのものの性質のほかに連続ウェイブレット変換法の性質から生まれる要素が混入していることを意味している．この点にこだわり解決しようとするならば，直交系を用いるウェイブレット変換が必要となる．これが離散ウェイブレット変換であるが，詳細は次に掲げる文献を見られたい．なお，連続ウェイブレット変換はマルチフラクタルの解析に適した面があり，乱流の微細構造の研究にも応用されている．これらについても次の文献等を参照されたい．

参考文献

Combes J.M. *et al.* (eds), 1989: Wavelets, Springer.

山口昌哉・山田道夫，1990：ウェーブレット解析，科学，岩波書店，6月，398–405.

Everson, R.M. and L. Sirovich, 1989: Center for Fluid Mechanics #89–182.

（京都大学防災研究所，山田道夫）