日本気象学会 1882 創立

天　気　1991年7月
Vol. 38, No. 7

〔解　説〕　101 気象力学（E-CC 法；非線型安定性；アーノルドの判定条件；カシミール）

運動方程式の線形化を必要としない定常渦の安定性解析法について*

佐久間　弘　文**

1. はじめに

a．E-CC 法の簡単な歴史，及び気象海洋力学における応用

ニュートン力学の構築以来，力学系の安定性の問題は常に力学の中核的な問題の一つであり続けて来たと言ってよいと思います．太陽系の安定性等を議論する天体力学に比べ歴史の浅い近代気象力学においても，一時代を画した Charney や Eady の傾圧不安定性理論をはじめとする数多くの気象・海洋力学の理論は力学系の安定性の問題をとり扱ったものと言えます．この小稿の副表題にある E-CC 法というものも，摩擦や強制力のない理想流体の安定性を議論するのにとても強力な解析法として導入されたものです．この方法においては，与えられた非線形の支配方程式を線形化する必要はなく，系を代表するある積分不変量の位相空間における幾何学的特性がその力学系の安定性と対応するため，与えられた流れの場が変数分離可能かどうかという事も問題ではなくなります．したがってブロッキングのような線形化も変数分離も容易ではない流れの場の安定性を調べるのにはとても有力な手法と言えます．

E-CC 法はそのようにとても強力な数学的手法ですが，比較的最近なされた双極渦（モドン）の安定性の研究等（Pierini 1985, Laedke and Spatschek 1986, Swaters 1986）を除いては，今まで気象力学においてあまり注目されませんでした．60年代後半にソビエトの数学者アーノルド（V.I. Arnol'd）によって導入されたこの解析法は，気象力学のみならず，西側の数理物理学界でも80年代に入るまであまり注目されませんでした．(McIntyre and Shepherd 1987)．少なくとも地球流体学に関する限り，何故そうであったのかという事について筆者は，従来の E-CC 法によって得られる安定性のための十分条件を満たす流れの場は，地球流体において，すでによく調べられている帯状流の場合を除き，あまり実現しないものであるといったことが主な理由であると考えています．帯状流の場合，アーノルドが得た安定性に関する条件はよく知られている順圧不安定に関係するレーリーの判定条件（コリオリパラメータを含む場合はクオの条件）になり，唯一ちがいは，本論で詳しく述べますが，線形安定性（無限小振幅のじょう乱に対する安定性）か非線形安定性（有限振幅のじょう乱に対する安定性）かということになります．E-CC 法に関するこの小稿の目的は，その平易な解説と気象・海洋力学にとってより有用な E-CC 法の技術的改良の一例を簡単に紹介することにあります．

以下の本論に入る前に，予備知識としてハミルトニアン構造の述語を二次元非発散流体の比喩を用いて平易に説明し，本論ではまず E-CC 法及びその母体となったリアプノフの方法（Liapunov's direct method）についてその概略を直観的にわかり易く述べ，次に最近の筆者の研究にもとづいた新変数表示による E-CC 法の要点を説明します．そして最後に新しい方式によって得られ，

* E-CC 法：Energy-Casimir Convexity method

** Department of physics, University of Toronto

気象力学上の応用が広いと期待される，新しい判定条件を求めます．主題そのものは気象学というよりは応用数学に近いものですが，以下の説明すべてにわたり数学的厳密さやエレガンスというものに主眼が置かれてはいない事をはじめに強調しておきます．

アーノルドが導入した E-CC 法は，地球流体力学の分野においてはまず Blumen (1968) により，コリオリパラメータ f が重要な役割を担う回転流体へ適用されました．アーノルドが得た条件の中にあらわれる渦度を f を含む絶対渦度で置き換えたものは，Blumen の条件とも呼ばれます．70年代から80年代にかけては，物理学におけるソリトン旋風の影響を受け，気象・海洋力学においても統計的な乱流理論が予測する寿命よりはるかに長い寿命を持つ渦（メキシコ湾流の Ring や大赤斑）をいわゆる孤立波モデル (solitary wave model) と呼ばれるものでモデル化する試みが盛んになりました．Redekopp (1977) による Rossby shear soliton, 80年代初めの山形-Flierl による中間地衡風力学の提唱，Larichev & Reznik (1976) による東西方向に移動するモドンの研究等がその代表例と言えます．この3例のうち，はじめの二つは現在ではとても有名になった「KdV 力学」と密接な関係がありますが，最後のモドンは，Stern (1975) により，孤立渦とは全く異なる海洋力学の統計的側面を調べるという動機で導入された概念です．Stern は論文の中でモドンはおそらく不安定であろうと予測しました．その根拠となったのが本論で述べるアーノルドの第一判定条件です．しかし，その後牧野 (1980) や McWilliams (1982) の数値実験により，モドンはソリトンのようなとても安定な渦であることが示されました．モドンは Rossby shear soliton とは異なり支配方程式の厳密解ということもあり，その安定性を解析的にも証明しようとする気運が高まり，アーノルドの第二判定条件をも考慮した解析 (Pierini 1985) が行なわれましたが，筆者の知る限り，モドンの非線形安定性を任意のじょう乱に対して示した解析的証明はまだなされていません．数値実験によると，とても安定なモドンが E-CC 法では簡単にその安定性が示せないという事は，E-CC 法によって得られる安定性の十分条件は少々強すぎるのではないかという可能性を示しているように思われます．この小稿の後半で説明する E-CC 法の技術改良はそのような視点から生じたものです．

b. ハミルトニアン構造

保存力学系（摩擦や強制力がない系）が有するハミルトニアン構造と，運動方程式の正準形 (canonical form, これは平たく言うと基本となる形，すなわち日本人にとっては normal form と言った方がわかり易いように感じます）という概念は解析力学においては基本となる重要な概念ですが，気象力学では今までほとんど使われなかったと言えると思います．ここでは本論の中で必要なハミルトアン力学における術語の予備的説明と共に，何故気象力学と解析力学とが疎縁であったのかを少々述べてみたいと思います．

多くの読者にとって，ハミルトニアンという術語はなじみのうすいものであるという前提の下で話を進めます．ハミルトニアンとは力学系の全エネルギーのように，いったんその初期値を与えれば，その後系がどのように運動しようとも，その値が常に一定に保たれている量（積分不変量）を数学的に便利な“ある変数”（正準変数）で書きあらわしたもので，正準変数で書き直された運動方程式を正準方程式と呼びます．この説明だけではとても抽象的で，何の御利益があるのかよくわかりませんので我々がよく知っている二次元非発散流体のたとえで，さらに具体的に説明したいと思います．空中に投げ上げた一個の石ころの運動を考えるとよくわかりますように，一般に力学系の運動は，初期値として，物体の位置と速度（運動量）を指定すると一意的に決定されます．正準形の方程式においては，この位置 q と運動量 P が時間 t の従属変数となっていて，q と P の時間変化はそれぞれハミルトニアン H を P と q の関数と考えたとき以下の式（正準方程式）で与えられます．

$$dp_i/dt=-\partial H/\partial q_i,\ dq_i/dt=\partial H/\partial p_i \qquad (1\text{-}1)$$

ここに添字 i は考えている系がいくつの非分割的要素から成っているのかという数を示すものです．上の一個の石ころの例では $i=1$ となり (1-1) で与えられる一組の式が運動を決定します．石ころが二つなら $i=2$ に対してもう一組の式が存在するといった具合です．(1-1) において大切な点は，保存系と一口に言っても実に様々なものが考えられますが，その多様性にかかわらず，ある変数を選ぶと（選び方はたくさんあります）運動方程式はすべて (1-1) の形に書けるということです．したがってこれを Canonical (=normal) form と呼びます．

式 (1-1) で特に面白い点は p_i と q_i が対称となっておらず，簡単のため $i=1$ の場合を考えると，その関係は二次元非発散流体の速度 $\mathbf{V}=(u, v)$ と流線関数 ψ との関係

$$dx/dt\equiv u=-\partial\psi/\partial y,\ dy/dt\equiv v=\partial\psi/\partial x \qquad (1\text{-}2)$$

によく似ています．(19世紀に G. Kirchhoff によって指摘されたこの類似に見られるような変数の非対称性は現在 Symplectric 構造と呼ばれています(Arnol'd 1978)．したがって，厳密さにとらわれず大ざっぱに考えると，保存力学系の位相空間（p-q 空間）での運動は $i=1$ の時に限らず一種の（高次元空間における）非発散運動と見做すことができます（Liouville の定理）．そしてその様な運動において，系のハミルトニアン（多くの場合系の全エネルギーをpとqで表わしたもの）は流線関数のようなものに対応しています．(1-2) において流線関数 ψ が流れの場を一意的に決定するように，ハミルトニアンHはpとqの時間変化を決定し，それ故系を特徴づける大切な量であると言えます．

このような正準形式の力学は，特に量子力学の発展には不可欠のものでしたが，古典的な流体力学においては，数学的モデルとして理想化された二次元の渦糸（point vortices）の力学以外はあまり注目されませんでした．その大きな理由の一つとしては，流体力学の運動方程式を正準形に書き直すと，変数の数が気象力学でも最もよく使われるオイラー的変数（速度**V**，密度 ρ，温度T等）以上の変数が必要となり，観測等の実用面においては取扱いにくいものになってしまうという事が考えられます．多くの場合，余分な変数はラグランジュ的変数となります（詳細につきましては R. Salmon (1988) を参照して下さい）．何故余分な変数が必要かは，(1-1) の中に位置q（定義によりこれは各流体粒子に固定されている）があるのに，オイラー表示の運動方程式の中には，速度**V**はあるものの，流体粒子の位置に関する変数はどこにもないことからもわかります．

比較的最近まで，保存系のハミルトニアン構造といえば，それは正準形 (1-1) と同義に扱われていましたが，実際にはハミルトニアン構造は正準変数（正準形）とは独立に定義できるということが，アーノルド (1969)，や Morrison & Greene (1982) の研究により明らかにされ，その結果，現在ではオイラー変数のみによるハミルトニアン構造も明確に定義づけられています．(上で少々見ました様にオイラー変数は正準変数ではありませんので我々が大変お世話になっている式

$$DV/Dt=-\frac{1}{\rho}\nabla p-g\nabla z \tag{1-3}$$

は正準方程式とは呼べません．) それではいったい何によりハミルトニアン構造を定義するかと言えば，ポアソン括弧式と呼ばれるもので定義します．ポアソン括弧式とは上述の正準形と二次元非発散流体との比喩を再び使うならヤコビアンに相当するものです．今話の都合上，ここでは定常状態の二次元非発散流を考えます．そのような状態に対しては，任意の物理量Fのラグランジュ微分 DF/Dt は

$$\frac{DF}{Dt}=\boldsymbol{V}\cdot\nabla F=-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial(\psi,F)}{\partial(x,y)} \tag{1-4}$$

のように，Fと流線関数 ψ のヤコビアンで表わせます．ヤコビアン $\partial(A, B)$ は

$$\partial(B,A)=-\partial(A,B) \tag{1-5}$$

という交代性を持つ演算子ですので，

$$\partial(B,A)=\partial(A,B) \tag{1-6}$$

なら $\partial(A, B)=0$ となります．したがってヤコビアン $\partial(A, B)$ においてAとBとが可換（AとBを交換しても値が変わらない）ならゼロとなります．任意の物理量Gを位相空間 p-q 内の関数と見做すハミルトニアン力学においては，Gの時間微分 dG/dt は，Gがtを陽に含まないとき，つまり $G=G(p_i(t), q_i(t))$ のとき，合成関数に関する微分の規則により

$$\frac{dG}{dt}=\sum_i\left(\frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}+\frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}\right) \tag{1-7}$$

となります．簡単のため $i=1$ の場合を考え，(1-1) を使うと (1-7) は

$$\frac{dG}{dt}=-\frac{\partial G}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}+\frac{\partial G}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{\partial(H,G)}{\partial(p,q)} \tag{1-8}$$

となり，右辺のヤコビアンをハミルトニアン力学ではポアソン括弧式と称し，記号 $\{H, G\}$ で表わします．(1-8) よりGが保存量 ($dG/dt=0$) であることと，GとHとのポアソン括弧式が可換，すなわち

$$\{H,G\}=-\{G,H\}\Rightarrow\{H,G\}=0 \tag{1-9}$$

であることは同値であることは明らかです．我々にとってはおなじみの式 (1-4) とそうでない式 (1-9) とは全く同形になっています．この同形を生んだ原因はハミルトニアンが“流線関数”のようにふるまう（正準形 (1-1)）という事であることは言うまでもありません．正準方程式 (1-1) と (1-8) は同値な関係にありますから，任意の物理量Gの時間微分がGとHのポアソン括弧式で与えられるという事をハミルトニアン構造と呼んでもさしつかえないことになります．(1-4) において，気象力学ではよくFが ψ の関数ならば流線に沿って一定値をとると言い，例えばベルヌーイ関数がその一例となっています．全く同じ内容の事を解析力学流に言うと，Fと

ϕ とのポアソン括弧式（ヤコビアン）が可換ならFは流線に沿って保存されるとなります．

平易な言葉で納得のいくように説明することはここではできませんが，Morrison と Greene (1982) はプラズマ流をも含めた理想流体に対しオイラー的変数のみで，ハミルトニアンとポアソン括弧式を推測し書き下すというはなれ業をやってのけました．彼等の発見したポアソン括弧式は正準変数を必要としないものの，従来の括弧式が満たすすべての性質

$$dG/dt=\{H,\ G\} \tag{1-10 a}$$

$$\{F,\ G\}=-\{G,\ F\} \tag{1-10 b}$$

$$\{\{E,\ F\},\ G\}+\{\{F,\ G\},\ E\}+\{\{G,\ E\},\ F\}=0 \tag{1-10 c}$$

（ヤコビの恒等式）

を満足しています．ここに，E, F, G は任意の物理量でHはハミルトニアン．しかしそのようにして得られた括弧式は，オイラー的変数の数が正準変数の数より少ないため，変数の次元の縮退から生ずる特異な性質を持っていて，ちょうど (1-8) においてGとHが“縮退”($\partial(G, H)=0$) するときGが保存量であるように，括弧式の特異な縮退に帰因するある保存量Cがあることが示され，その様なCに対しては，Cと任意の物理量Gとの括弧式は常にゼロとなります．

$$\{G,\ C\}=0 \tag{1-11 a}$$

ここにGは任意ですので，特に $G=H$ とすれば (1-8) より，

$$\{H,\ C\}=\frac{dC}{dt}=0 \tag{1-11 b}$$

となり確かに C は保存量であることがわかります．(1-11 a) を満足する量は，量子力学においてカシミール (Schiff, 1968) と呼ばれています．流体力学において，カシミールとはいったいどんな量かと言えば，以前よりよく知られている（ポテンシャル）渦度に関係した量であることが示されます．現実的には，ポンテシャル渦度保存を示すという目的のため，複雑な Morrison-Greene 括弧式を使う人はいないと思いますが，どこにその意義があるかと言えば，系の保存量をポアソン括弧式の縮退という一般規則から導いた点にあります．ちなみに，はじめてオイラー表示の運動方程式を目にする人にとって，ポテンシャル渦度保存を予見することは容易ではないと思われます．そしてさらに重要なことは，全エネルギーとしてのハミルトニアンHにそれと独立な量でであるカシミールをつけ加えたものも系のハミルトニアンになっているという点です．(Littlejohn 1982)．このハミルトニアンの任意性（カシミールは一意的に決まらないので）こそが，以下で説明する E-CC 法の原点になっています．尚気象力学で使用される色々な近似方程式系が持つハミルトニアン構造と保存量に関する総合報告は Shepherd により Advances in Geophysics vol 32, 1990 に出されています．

このセクションをしめくくるに当り，後の説明に必要なハミルトニアン力学における重要な点をもう一つだけあげておきます．少々抽象的ですが，まず以下の様な時間積分によって与えられる量を考えます．

$$I=\int\left(p_i\frac{dq_i}{dt}-H(p_i,\ q_i)\right)dt \tag{1-12}$$

ここで，pとqを運動方程式とは全く関係なく任意に与え色々なpとqに対してIの値を計算してみますと，pとqが運動方程式の解になっている時にIの値が最小値（実際は停留値）をとります．これは光が屈折する時に選ぶ軌道は軌道上の二点間を通過するのに要する時間tを最小にするものであるという光学原理の力学版と見做すことができ，物質と光という一見大変異なるものも同様な運動原理にしたがっているという深遠な事実を示しているものと考えられています．Iで定義される量はポアンカレーカルタン不変量または単に作用と呼ばれ，この原理は最小作用の原理と名付けられています．(1-12) 右辺の積分記号下の量はラグランジアンと呼ばれます．

2. リアプノフの方法及び E-CC 法について

2.1 調和振動子を例にとった簡単な力学系の安定性の説明

安定性の問題に対するリアプノフの方法は考える力学系が必ずしも保存系である必要はありませんが，ここでの説明は後述の理想流体の安定性の議論の予備的なものなので以下考える系は保存系と仮定します．一般に力学系とは，与えられた初期および境界条件のもとに，系の時間的変化がある支配方程式により一意的に決定できるものを意味します．これを数学的に表現すると

$$\frac{dx}{dt}=f(x);\ x(t)\in\boldsymbol{R}_n \tag{2-1}$$

となります．ここに x は時間 t に関する系の状態変数で，系の次元が $1(n=1)$ なら x は一つの変数ですが，次元が2より大きいときはベクトル量と見做すことができます．fの具体的な形は支配方程式によって決定されます．

例えば力学の教科書のはじめに必ず出てくる調和振動子の運動方程式はmを質点の質量，$k(>0)$ をバネ定数，

ξ を変位とすると

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2}=-k\xi \qquad (2\text{-}2)$$

なりますが，これは形式的に新しい変数 x_1, x_2 を

$$x_1\equiv\xi,\ x_2\equiv\frac{d\xi}{dt}\ (\text{速度}) \qquad (2\text{-}3)$$

で定義すると，式 (2-2) は

$$\begin{pmatrix}\dfrac{dx_1}{dt}\\[2ex]\dfrac{dx_2}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\[2ex] -\dfrac{k}{m} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\[2ex]x_2\end{pmatrix} \qquad (2\text{-}4)$$

となり，(2-1) の形に書き直せたことになります．この簡単な例の場合，時間についての二階の微分方程式 (2-2) を (2-4) のような時間について1階の連立方程式系に書き直すことは，運動方程式をハミルトニアンを介在とした正準形 (1-1) に書き直すことに対応しています．式 (2-2) で与えられる調和振動子の場合，系の全エネルギー $E\left(=\frac{m}{2}\dot{\xi}^2+\frac{k}{2}\xi^2\right)$ を座標 $q(\equiv\xi)$，運動量 $p(\equiv m\dot{\xi})$ で表わしたハミルトニアンHは

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{k}{2}q^2 \qquad (2\text{-}5)$$

となります．(2-5) において，q を x_1, p/m を x_2 と見做せば，(1-1) は (2-4) と一致します．

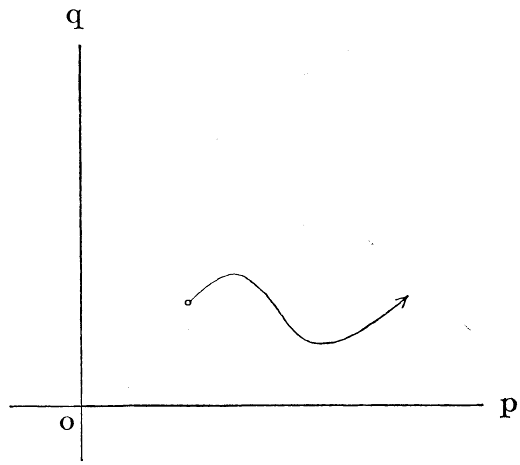
このように座標 q とそれに共役な（q に対応する）運動量pを独立な変数と見做し，q の次元の二倍の次元を持つ q-p 空間を考えるとき，その空間は物理学者によって位相空間 (Phase space) と呼ばれます．話を簡単にするため，今しばらくは方程式系 (2-2) について考えて行きますが，以下のことは式 (1-1) が成立する限りより複雑な系についても同様に言えることです．(2-2) は一次元の問題なので，この場合 q-p 空間は二次元となります．系の運動を一意的に決定するための初期条件は，初期値としての q と p を独立に与えることにより決まりますから，任意の初期条件は q-p 空間のある点に対応し，系の運動はその点からのびる軌跡で表現されることになります．(第 2-1 図) この系についての重要な特性は系の全エネルギーHが保存されるということです．すなわち，

$$H=\text{constant} \qquad (2\text{-}6)$$

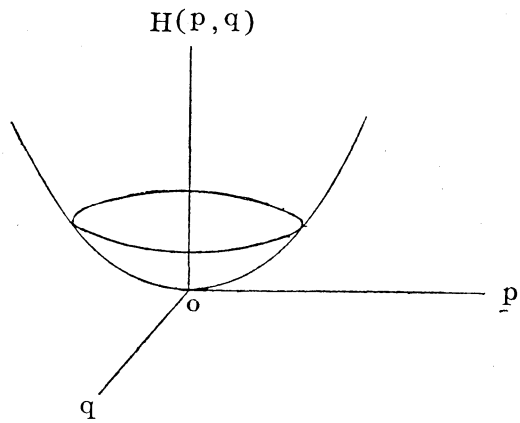
したがって，q-p 空間上の軌跡（系の運動）は初期条件によって決まるある H_0 をパラメータとする楕円

$$\frac{p^2}{2m}+\frac{k}{2}q^2=H_0 \qquad (2\text{-}7)$$

になることがわかります．q-p 空間の原点0は系の平衡点（$\dot{q}=\dot{p}=0$）となっています．



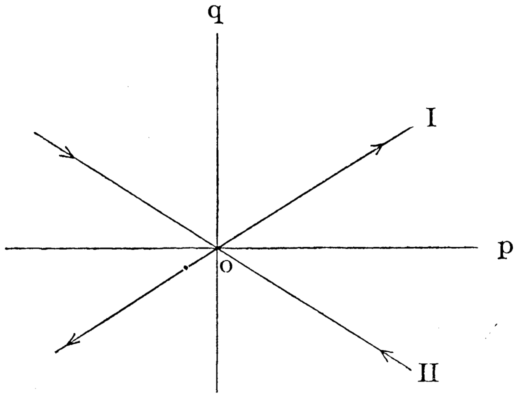
第 2-1 図



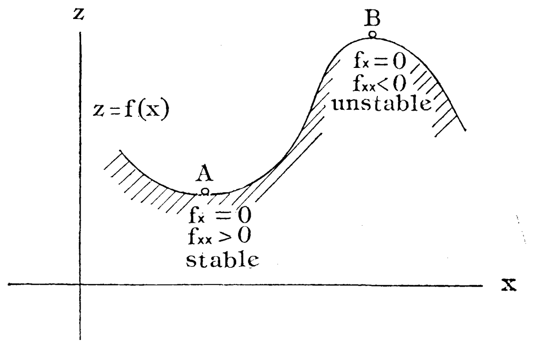
第 2-2 図

平衡点Oを外部より小さな力あるいは変位を与えみだしてやると，第 2-2 図より質点はOの囲りの小さな楕円上を動くことは明らかです．すなわち質点はこの場合決して平衡点Oからどんどん遠ざかってしまうことはありません．この事実を数学的に少々形式ばった言い方をすると，「平衡点Oはリアプノフ的意味において安定 (stable in the sense of Liapunov)」となります．

ここまでは式 (2-2) において $k>0$ と仮定してきましたが，次に $k<0$ としてみます．これは変位に比例した力が変位と同じ向きに加わることを意味しますから，平衡点Oはもちろん不安定となります．この場合系のハミルトニアンHを与える式 (2-5) は不変ですが，k の符



第 2-3 図



第 2-4 図

号が異なるため，$H(q, p)$ は三次元の q-p-H 空間内で楕円体にならず，双曲体（p 軸に沿って凹，q 軸に沿って凸）となり平衡点Oは鞍点 (saddle point) となります．したがってq，p軸間のある方向に平衡点0を通る $H=0$ の節線 (separatrix) が存在します．この節線の方程式は $\frac{p_2}{2m}+\frac{k}{2}q^2=0$ を因数分解して得られる直線であることは明らかです．この節線に沿ってはOからどんなに離れてもエネルギーは点Oと同じゼロです．したがって点Oに生じたみだれはこの節線の近傍に沿ってどこまでもから遠ざかることができます．第 2-3 図において点Oから遠ざかる節線はⅠで節線ⅡはOに漸近的に近づく軌跡を表わしています．力学用語ではⅠは不安定多様体 (unstable manifolds) Ⅱ は（漸近的に）安定な多様体 (Asymptotically stable mainfolds) と呼ばれています．このようにⅠとⅡが同時に存在することは，系の運動を q-p 空間の軌跡で表現したとき，それは非発散の流れになっているというⅠ-b. で紹介した Liouville の定理の帰結です．力学系 (2-2) についての上の観察をまとめてみますと

—規則A—

平衡点Oにおいて

i）$\dot{q}_i=\dot{p}_i=0 \Rightarrow \partial_{pi}H=\partial_{qi}H=0$ (2-8)

（OはHの停留点）

ii）q，pについての二次形式Hが

正定値 ($k>0$) ⇒ 安定

不定値 ($k<0$) ⇒ 不安定

となります．

前に少々ふれました様に，上記の結果は (2-2) より複雑な系に対しても (1-1) が成立するなら同様に導くことができます．したがって上述の結果を少し詳しく書くと以下の様になります．

i）平衡点Oにおいて停留値（勾配がゼロ）をとる系の積分不変量Hを見つける．例えば第 2-4 図のような床の上に球を置いたとき，床の傾き ($f'(x)$) はA点とB点とでゼロとなるので，そこで球は止まることができます．実際この場合，全エネルギーHを位置xと運動量p ($\equiv m\frac{dx}{dt}$; m は球の質量) で表わしたものは

$$H=\frac{p^2}{2m}+mgf(x) \tag{2-9}$$

となり，運動（正準）方程式は

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{m},$$

$$\frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-mgf'(x) \quad \text{(2-10 a, b)}$$

となり，球が静止する ($p=0$) 平衡点では $f'(x)=0$ となっていなければなりません．

ii）平衡点Oから，pとqの値を Δp, Δq だけずらして，それに対するHの変化 ΔH を計算してみますと

$$\Delta H\equiv H(p_0+\Delta p,\ q_0+\Delta q)-H(p_0,\ q_0) \tag{2-11}$$

なので，上の例では，点AまたはBを座標xの原点にとれば

$$=\frac{(\Delta p)^2}{2m}+\frac{mg}{2}f''(x)(\Delta x)^2+0((\Delta x)^3) \tag{2-12}$$

また前述の調和振動子の場合では，

$$\Delta H=\frac{(\Delta p)^2}{2m}+\frac{k}{2}(\Delta q)^2 \tag{2-13}$$

となり，いづれの場合も平衡点Oの付近 ((2-12) で $(\Delta x)^3$ 以上の項を無視できる) では，Δp, Δq (Δx) に関する二次（形）式 ΔH が正定値ならOは安定，不定

値なら不安定となります（図2-4）．上の二つの例で注目に値するちがいは，(2-13) における正定値性 ($k>0$) は必ずしも $\varDelta p$ と $\varDelta q$ が小さい必要はないということです．またいずれの場合も $\varDelta H$ は保存量 $H(p_0+\varDelta p, q_0+\varDelta q)$ から時間に関係しない基底状態の $H(p_0, q_0)$ を差し引いた量なので，やはりそれ自身保存量となります．すなわち

$$\varDelta H(0)=\frac{1}{2m}(\varDelta p(0))^2+\frac{k}{2}(\varDelta q(0))^2$$
$$=\frac{1}{2m}(\varDelta p(t))^2+\frac{k}{2}\varDelta q(t))^2 \qquad (2\text{-}14)$$

となり，$\varDelta H$ が正値二次形式ならどんなに時間がたっても位相空間 p-q 内の軌跡（系の運動）は楕円 ($p^2/2m+kq^2/2=\varDelta H(0)$ の外へは出て行かないことになります．すなわち，軌跡と平衡点Oからの位相空間内における距離（ノルム）は初期の“じょう乱”によって決まるある値 $\varDelta H(0)$ によってその上限が与えられることになります．数学的にこのように定義された安定性は，リアプノフ安定性，非線形安定性，またはノルム安定性 (normed stability) と言われます．式 (2-14) は空間内の距離（ノルム）を決める二次形式 x^2+y^2 と同様な形をしているのでしばしば disturbance norm と呼ばれます．

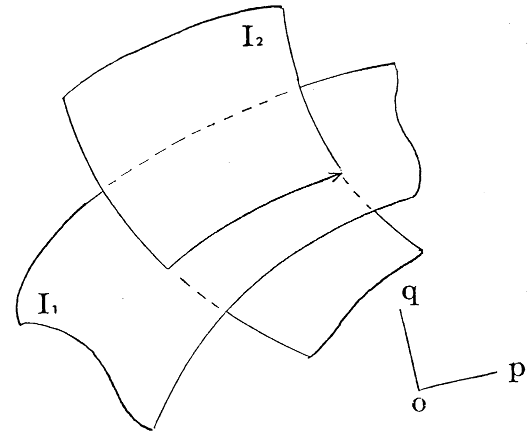
有限振動幅ではなく無限小の振幅に対し，$\varDelta H$ の二次形式としての（3次以上の無限小を無視する）正（または負）定値を示すことは，formal stability 解析 (Holm, 1985) と呼ばれ，非線形安定性を示す前段階と考えられます．この場合は，非線形安定性の解析と異なり特にじょう乱の時間変化は考えず，無限小振幅の任意のじょう乱（変分）に対して平衡点Oの近傍で三次以上の無限小の項を無視した二次形式としての $\varDelta H$ の正（負）定値を示します．しかし非線形安定性は，調和振動子や流体力学においても密度変化のない非発散流という特別に簡単な場合を除き，それを主張することはきわめて困難で，formal stability でさえ多くは未解決のままです．この事は，密度変化を無視できない流体では，運動エネルギー $K.E.$ が

$$K.E.=\int_\Omega \rho\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}}{2}d\Omega \qquad (2\text{-}15)$$

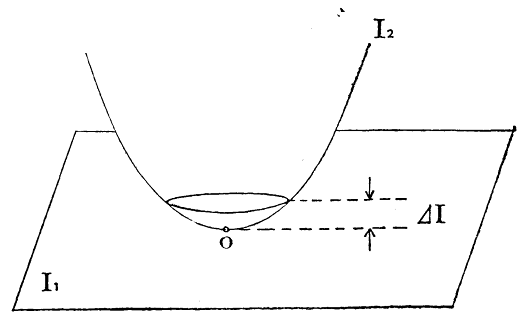
となり，質点系と異なり $\varDelta\rho$ は時間と空間の関数になりますから，有限振幅の $\varDelta\rho$, $\varDelta\boldsymbol{V}$ に対し二次形式の disturbance norm が得られないことは推測できます．

2·2 E-CC 法の幾何学的説明

ここまでの話では系の積分不変量Hは全エネルギーでしたが，一般に力学系 (2-2) より複雑な保存系に対しては積分不変量はHだけではありません．例えば角運動量や流体の場合のポテンシャルうず度等がそのような不変量となります．高次元の q-p 空間内の軌跡（系の運動）に沿ってこれら複数の不変量の値はそれぞれ一定ですから，軌跡は複数の不変量 $I_k(k=1,2\cdots\cdots M)$ が定める超曲面（高次元の曲面）が互いに交叉して得られる曲線となります（図2-5）．系の平衡点Oは今考えているような高次元空間の場合でも点として表わせますから，もし $M=2$ でかつ平衡点Oの近傍で超曲面 I_1 と I_2 の幾何的関係が第2-6図の様になっていたら前述の調和振動子の例と同様に点Oは安定であると推論できます．何故そうであるのかと言えば，今簡単のため I_2（例えば角運動量に関する不変量）を固定し，I_1（エネルギー）を図のように $\varDelta I_1$ だけ変化させると軌跡は I_2 と $I_1+\varDelta I_1$ が交わることによって得られる曲線となり，それは点Oの囲りを小さな振幅で振動する周期運動を表現して



第2-5図



第2-6図

います．この場合 I_2-I_1 は高次元の q-p 空間で超楕円体のようなものになっているわけです．I_2-I_1 が超双曲体となるような場合は，例 (2-2) の $k<0$ の場合と同様に平衡点 O を通る I_2-I_1 の節線 (unstable or asymptotically stable manifolds) が存在する可能性が多分にあり，じょう乱はそのような方向に沿って O から遠く離れて行くことができるため O は不安定な平衡点となります．第2-6図では平衡点 O は I_2-I_1 の停留点として描いてありますが，これはいつでもそうなるかといえばそうではありません．したがって点 O で停留値をとるような I_2-I_1 をうまく見つけることが必要となります．ここで平衡点 O の意味について少々説明を付け加えますと，例 (2-2) の様な簡単な系の場合，平衡点 O は運動がない静止状態に対応していましたが，流体力学において興味ある平衡点とは運動エネルギーがゼロでない定常状態に対応しています．したがって系の全エネルギーだけを考えたのでは，一般にその勾配分は平衡点 O でゼロになりません．それ故全エネルギー I_1 に独立な他の不変量 I_k をも考えて，

$$H\equiv I_1-\sum_k f_k(I_k) \tag{2-16}$$

が O で停留値（勾配がゼロ）をとるように f_k を決めることができれば，そのような H に対しては前述の規則Aをそのままあてはめることにより平衡点の安定性が調べられることになります．これがアーノルドが導入した方法の中心となるアイデアです．平衡点 O で停留値をとるような H が実際に存在するかどうかは厳密に調べなければなりませんが，それにはハミルトン力学の数学的知識が必要でそれを詳しく書くことはここでは必要ないと思います．この事に関して一言付け加えますと，I-b.で述べましたカシミールの任意性を利用して，全エネルギーとカシミールとの和を考え，この和が与えられた定常状態に対して停留値をとるようにカシミールを調節するわけです．したがって，理想流体の安定性の議論に使われる不変量 H の一般的な形は

$$H=\int_\Omega d\Omega(E+F(C)) \tag{2-17}$$

E：エネルギー

C：カシミール

Ω：流体の定義域

であり，関数 F は平衡点 O で H の勾配がゼロになるように定めます．

3. アーノルド (1965) による二次元非発散流に対する E-CC 法の応用 (formal stability)

3.1 アーノルドの方法

二次元非発散流に対し，アーノルド (1965) は

$$H=\iint dxdy\left[\frac{1}{2}\nabla\psi\cdot\nabla\psi+F(\nabla^2\psi)\right] \tag{3-1}$$

ψ＝流線関数

を考え，定常状態

$$\frac{\partial(\psi,\nabla^2\psi)}{\partial(x,y)}=0 \tag{3-2}$$

に対し，ψ に関する H の第一変分（ψ の任意の無限小変化に対する H の変化のうち一次の無限小の部分）がゼロとなるように F を決めた後，H の第二変分（二次の無限小）を計算して以下のような結果を得ました．

$$\delta^2 H=\iint dxdy\left[\nabla\delta\psi\cdot\nabla\delta\psi+\frac{d\psi}{d(\nabla^2\psi)}(\delta\nabla^2\psi)^2\right] \tag{3-3}$$

定常状態においては，ψ はうず度 $\Delta^2\psi$ の関数となりますから式 (3-3) における $d\psi/d(\Delta^2\psi)$ は意味を持ちます．上式よりただちに

$$\frac{d\psi}{d(\nabla^2\psi)}>0 \tag{3-4}$$

なら $\delta^2 H$ は正定値となり与えられた定常状態は安定となります．実は安定のための条件は前述の q-p 空間の幾何学的考察から，$\delta^2 H$ が不定値でなければよくしたがって $\delta^2 H$ が負定値であってもよいことになります．しかし負定値である場合は，(3-3) における積分記号下の第一項は常に正ですから，$d\psi/d(\nabla^2\psi)$ が負であるばかりでなく，第二項が第一項を打ち消す程小さくなっていなければならず，(3-3) に関する限りは正定値の場合ほど簡単には行きません．ここでは安定性の十分条件として負定値の場合もあるという事を言及するに留め，以下正定値の場合を少々詳しく見て行きます．

3.2 気象力学的見地から見たアーノルドの判定条件

安定性のための判定条件 (3-4) は Blumen (1968) により，コリオリの力 f が重要になる回転流体に対しては

$$d\psi/d(f+\nabla^2\psi)>0 \tag{3-5}$$

となることが示されました．しかし地衡風バランスに近い大規模スケールの流れの場では流線関数 ψ と高度場 h とは正の相関があり，h と絶対うず度 $f+\nabla^2\psi$ は負の相関があるため条件 (3-5) は通常満たされていません．したがって気象学上の応用としては $\delta^2 H$ が負定値か，

あるいは $d\phi/d(f+\nabla^2\phi)$ が負であるが，しかし $\delta^2 H$ は正定値である場合が有用となります．後者の可能性は(3-3) において，エネルギーの変分 $\nabla\delta\phi\cdot\nabla\delta\phi$ と渦度の変分 $\nabla^2\delta\phi$ とは全く独立ではないということから生じます．しかしこの二つの量の絶対値の大きさは，単波長のじょう乱を考えてみれば容易にわかように，じょう乱の波数によるので，ノーマルモード解析のように，じょう乱の波数に制限を加えない限り（ある波数領域のじょう乱のみ考える）一般には評価することは容易ではありません．このことは表式 (3-3) が負定値である場合も同様に問題となります．すなわち $\nabla\delta\phi\cdot\nabla\delta\phi$ は常に正ですので，(3-3) が負定値となるためには，(3-3) の第二項の絶対値は第一項の絶対値より大きくなければなりません．

表式 (3-3) に対する条件 (3-4) あるいは (3-5) はアーノルドの第一判定条件と呼ばれ，それに対して，同じ表式 (3-3) を用いるが負定値を考えることによって得られる条件を第二判定条件と呼びます．しかし上に見たように第二条件は，波数に関係してくるので，たとえ初期にじょ乱がこの条件を満たしていたとしてもその後もそうであるかは前もっては保障できないので注意が必要です．Blumen の判定条件 (3-5) はブロッキング等変数分離不可能な非帯状流の安定性の議論に対しより有効であると期待されるわけですが，この点について Andrews (1984) がこの判定条件における境界条件が持つ大きな制約を指摘しました．彼の議論の要点は数学的にとても簡単なのでここに紹介します．

今，与えられた定常流が条件 (3-4) を満たすとします．我々はそのような定常流を Arnold' stable な流れと呼ぶことにします．またここでは簡単のため $f=0$ の場合を考えています．($f\neq0$ でも同様)．さらに流れは東西方向（x一方向）に一様にのびた帯状領域の内部にあるとします．したがって速度の南北（y 方向）成分 ψ_x は南北の境界でゼロとなります．定常状態において ψ はうず度 $\nabla^2\psi$ の関数ですから x に関する ψ の偏微分 ψx は

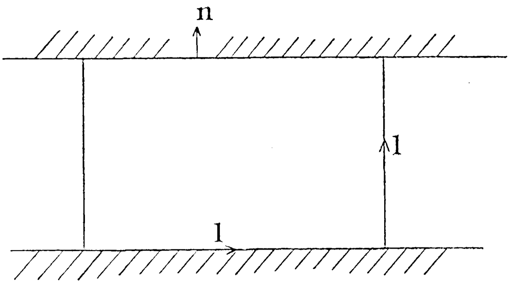
$$\psi_x=\psi'(\nabla^2\psi)_x\,;\,\psi'\equiv d\psi/d(\nabla^2\psi) \qquad (3\text{-}6)$$

となります．式 (3-6) より量 $\psi_x(\nabla^2\psi)_x(=\psi_x\nabla^2\psi_x)$ の全域 S に渡る積分は

$$\int_S dxdy\psi_x\nabla^2\psi_x=\int_S dxdy\psi'(\nabla^2\psi_x)^2 \qquad (3\text{-}7)$$

となり，恒等式（部分積分）

$$\int_S dxdy\psi_x\nabla^2\psi_x=-\int_S dxdy\nabla\psi_x\cdot\nabla\psi_x$$



第 3-1 図

$$+\oint dl\psi_x\frac{\partial\psi_x}{\partial n} \qquad (3\text{-}8)$$

を使って (3-7) の左辺を書き変えると

$$\oint_{\partial S} dl\psi_x\frac{\partial\psi_x}{\partial n}=\int_S dxdy[\nabla\psi_x\cdot\nabla\psi_x+\psi'(\nabla^2\psi_x)^2] \qquad (3\text{-}9)$$

を得ます．南北の境界に沿って，$v=\psi_x=0$，また流れが $x=\pm\infty$ で帯状流になるか，あるいは x 方向に長さで周期的にくり返されているものであれば (3-9) の左辺の線積分はゼロとなりますから，結局

$$\int_S dxdy[\nabla\psi_x\cdot\nabla\psi_x+\psi'(\nabla^2\psi_x)^2]=0 \qquad (3\text{-}10)$$

となり，積分記号下の第一項は常に負になり得ませんから，$\psi'>0$ に対し (3-10) を満たす唯一の流れは $\psi_x=v=0$，すなわち帯状流に限るという結論を得ます．このことは帯状領域に限らず，一般に流れが存在する領域がある対称性を持てば Arnold' stable な解はそれと同じ対称性を持つことが示されます．したがって気象力学でよく使われる球面領域や帯状領域の全域で微分可能な解はすべて軸対称（帯状）流になり，その様な境界条件のもとでは条件 (3-4) は見かけ程ありがたいものではなくなります．Arnol'd が使った H（式 (3-1)）に関する限り Andrews のこの議論は負定値についても同様に言えます (Andrews 1984)．また簡単のため（基底状態）のモドン解（波数の一番小さいモドン；5.1 参照）の二つの分岐解のうち原点 O を含む半径 R（モドン半径）内の解だけを考えてみると，境界は円ですので，そのような解は Arnol'd stable な解ではあり得ないことが導かれます．何故ならモドン解は円対称となっていないからです．

式 (3-3) において，$\psi'>0$ は $\delta^2 H$ が正定値となるための十分条件であっても必要条件ではないという事は大切な点です．$\psi'<0$ であっても $\delta^2 H$ が正定値なら前述

の幾何学的考察に基づき流れは安定であると言えます．また前に述べた様に大規模スケールの流れは通常 $d\phi/d(f+\nabla^2\phi)<0$ を満たすので気象力学的には $\phi'<0$ の場合が特に興味深いものになります．しかしアーノルドの表式 (3-3) ではこの場合を吟味するのは簡単ではありません．また $\phi'<0$ で $\delta^2 H$ を正定値にする流れに対しては上述の Andrews の議論は適用できなくなり，流れは帯状流である必要はありません．この様な次第で，式 (3-3) においてエネルギーの第二変分である第一項とカシミールの第二変分である第二項の項別の正定値性ではなく，二項の和全体の正定値性を容易に評価できるような不変量を表わす適当な変数表示を見つけることができれば，それによって得られる安定性のための条件は特に気象学において役に立つようなものであると言うことができます．

4. E-CC 法における新変数表示及び弱い十分条件の導出について

4.1 浅水方程式系に対するベクトルポテンシャル表示

以上の考察に基づき，以下に $\phi'<0$ でかつ $\delta^2 H$ が正定値であるような条件を容易に得られるような表示について考えてみます．ここで説明する方法は三次元の理想流体にも適応できますが，ここでは筆者がまず最初に調べた浅水方程式について説明したいと思います．以下数学的表示の簡便さのため，場の独立変数である時間 t，二次元のデカルト座標 x，y を

$x_0\equiv ct$,（c は速度の次元を持つ任意定数）

$$x_1\equiv x,\ x_2\equiv y \tag{4-1}$$

で表わします．浅水方程式系を完全に記述するための状態変数は，自由表面の高さ h，二次元の速度 $v_1(\equiv\dot{x}_1)$，v_2 $(\equiv\dot{x}_2)$ ですが，独立変数表示 (4-1) を用いると，この三つの状態変数を形式的に 3-運動量 $\vec{M}\equiv(hc,\ hv_1,\ hv_2)$ としてベクトルのように書き下すことができます．次にこの $\vec{M}$ に対し，3-ベクトルポテンシャル $\vec{\phi}\equiv(\phi_0,\ \phi_1,\ \phi_2)$ を次の様に定義します．

$$\begin{aligned} hc&=\partial_{x1}\phi_2-\partial_{x2}\phi_1,\\ hv_1&=\partial_{x2}\phi_0-\partial_{x0}\phi_2,\\ hv_2&=\partial_{x0}\phi_1-\partial_{x1}\phi_0 \end{aligned} \tag{4-2}$$

$$\left(\partial_{xj}\phi_i\equiv\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}\right)$$

式 (4-2) において，数学的には 3-ベクトル $\vec{\phi}$ を考える代りに，二階の交代テンソル ϕ^{ij}; $0\leqq i,\ j\leqq 2$

$$(\phi^{ij})=\begin{pmatrix}0 & \phi^{01} & \phi^{02}\\ -\phi^{01} & 0 & \phi^{12}\\ -\phi^{02} & -\phi^{12} & 0\end{pmatrix} \tag{4-3 a}$$

を考え

$$\phi^{01}=\phi_2,\ \phi^{02}=-\phi_1,\ \phi^{12}=\phi_0 \tag{4-3 b}$$

とすれば

$$M^i=\partial_{xj}\phi^{ij} \tag{4-4}$$

となりこれは式 (4-2) と同じことになります．テンソル ϕ^{ij} の交代性 $\phi^{ji}=-\phi^{ij}$ より直ちに恒等式

$$\partial_{xi}M^i=0 \tag{4-5 a}$$

が得られます．式 (4-5 a) を成分で書き下すと，

$$\partial_t h+\partial_{x1}(hv_1)+\partial_{x2}(hv_2)=0 \tag{4-5 b}$$

となり，質量保存の式が ϕ^{ij}（3-ベクトル $\vec{\phi}$）の値に関係なく自動的に満足されることになります．（以下 ϕ^{ij} と $\vec{\phi}$ を区別なく使います）テンソル ϕ^{ij} の変分 $\delta\phi^{ij}$ に対しても式 (4-4) により M^i の変分 δM^i が定義されこれも（4-5 a）と同じ質量保存の式を自動的に満足します．したがってこの表示による変分は質量保存を満たす変分だけを取り扱うのに便利であり，質量が系の外部より加えられたりしない気象力学等の問題を考えるのにはむしろ好都合であると言えます．$\vec{M}$ と $\vec{\phi}$ の関係についてよく知られている事実としては，任意に与えられた $\vec{M}$ に対して $\vec{\phi}$ は一意的に決定できないという事があります．実際，式 (4-4) を満足するある $\vec{M}$ と $\vec{\phi}$ が与えられたとして，これとは全く独立に微分可能な任意の関数 G を考え，その 3-グラジアント $\partial_{xi}G$ を ϕ_i に加えたベクトル $\phi_i+\partial_{xi}G$ も式 (4-4) を満たすことは容易に確かめられます．ポテンシャル $\vec{\phi}$ のこの様な任意性に対して，物理的に意味のある $\vec{M}$ が変化しないという事は電磁気の理論ではゲージ不変性と呼ばれています．

4.2 ベクトルポテンシャル表示によるカシミール及びゲージ条件

式 (2-17) においてカシミールに対応する第二項の関数 F の形は H の第一変分が与えられた定常状態に対してゼロになるように定められました．今ここで考えているベクトルポテンシャル表示においては，G の任意性を利用して F の形を決定することになります．少々天下り的ですが，今カシミールに相当するものとして

$$H_B\equiv-\iint_\Omega dx_1dx_2\phi_0(\partial_{x1}v_2-\partial_{x2}v_1) \tag{4-6}$$

を考えます．この量の次元はエネルギーの次元になることは ϕ_i の定義式 (4-2) または (4-4) よりすぐにわかります．ϕ_i の代りに $\phi_i+\partial_{xi}G$ を用いても物理的に意味のある $\vec{M}$ は変化しませんから，G として ϕ_0 が

$$\frac{D\phi_0}{Dt}=0 \tag{4-7}$$

を満たすものを採用します．こうすると簡単な計算により

$$\frac{\partial H_B}{\partial t}=0 \tag{4-8}$$

すなわち H_B は積分不変量となることがわかります．式 (4-6) において積分記号の下の量を

$$\phi_0(\partial_{x1}v_2-\partial_{x2}v_1)=h\phi_0 Q \tag{4-9 a}$$

$$Q\equiv\frac{1}{h}(\partial_{x1}v_2-\partial_{x2}v_1) \tag{4-9 b}$$

と書き直し，ポテンシャルうず度 Q が $DQ/Dt=0$ を満足することから，ϕ_0 に対し (4-7) より少々強い条件

$$\phi_0=\phi_0(Q) \tag{4-10}$$

を仮定してやると

$$H_B=-\int\int_{\Omega}dx_1dx_2hQ\phi_0(Q) \tag{4-11}$$

となり，単位質量当りのカシミール密度が $Q\phi_0(Q)$ になり今までよく知られている様にそれはポテンシャルうず度 Q だけの関数となり，したがって H_B が不変量であることも計算せずにわかります．式 (4-7) あるいは (4-10) は実現可能な系の運動についてのゲージ条件と呼べるものです．

式 (4-2) を使って式 (4-7) を書き直すと，

$$dx_0\frac{D\phi_0}{Dt}=c\Delta_t\phi_0+v_1\Delta_t\phi_1+v_2\Delta_t\phi_3=0 \tag{4-12}$$

$$\Delta_t\equiv dx_0\frac{\partial}{\partial x_0}$$

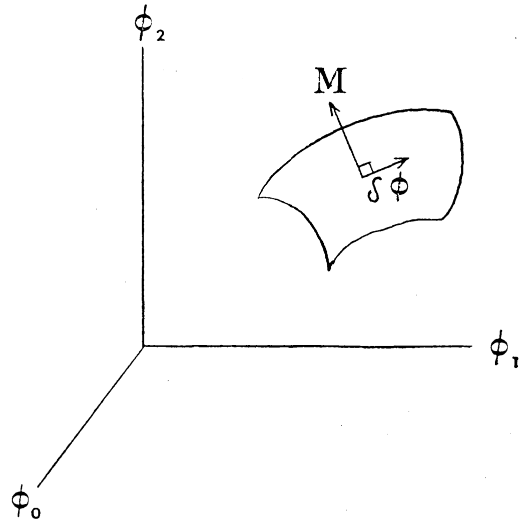
となります．系の時間変化 $\Delta_t\phi_i$; $i=0,1,2$ は ϕ_i の任意の変分 $\partial\phi_i$ の特別なものと考えられますから，変分 $\delta\phi_i$ に対するゲージ条件として式 (4-12) と同様な

$$\vec{M}\cdot\vec{\delta\phi}=h(c\delta\phi_0+v_1\delta\phi_1+v_2\delta\phi_2)=0 \tag{4-13}$$

をとれば条件 (4-13) は (4-12) を矛盾なく含むことになります．このようにして，始めは3成分のベクトルポテンシャルを導入したわけですが，質量保存を満たす変分を考える限りにおいては，$\vec{\delta\phi}$ に条件 (4-13) を課すことができ，これは第4-1図に示すように，$\vec{\delta\phi}$ は三次元 ϕ 空間に埋め込まれた 2-多様体 $M^2{}_\phi$ 上のベクトルになります．

4.3 ベクトルポテンシャル表示による（一般化された）ハミルトニアン

ここで話を前にもどし，何故式 (4-6) のような H_B を導入したかについて説明します．2章では式 (2-17)



第 4-1 図

の様な汎関数を見つけるに当り，系の全エネルギーであるハミルトニアンが非常に役に立つことを少々述べました．古典力学においては，ハミルトニアンHはしばしばルジャンドル変換によってラグランジアンL (1. b 参照) より定義されます．Lは系の運動エネルギーよりポテンシャルエネルギーを差し引いた量として与えられます．したがって浅水方程式系の場合，単位面積当りのラグランジアン密度Lは

$$L=\frac{h}{2}(v_1^2+v_2^2)-\frac{gh^2}{2} \tag{4-14}$$

となります．したがって作用積分 I は (1. b 参照)

$$I\equiv\int dx_0\int dx_1dx_2\,L(\phi_i) \tag{4-15}$$

で定義されます．$L(\phi_i)$ は式 (4-14) の右辺にある h や v_i を $\vec{\phi}$ で書き直したものを意味します．式 (4-15) において，ϕ_i に関する I の第一変分を計算した後，$\delta\phi_0$ を条件 (4-13) によって $\delta\phi_1$ と $\delta\phi_2$ で表わし，かつ時空領域の境界での変分をゼロとすると

$$\delta I=\int dx_0\int_{\Omega}dx_1dx_2\frac{1}{c}(-F_2\delta\phi_1+F_1\delta\phi_2) \tag{4-16 a}$$

$$F_1\equiv\partial_tv_1+\partial_{x1}B-v_2(\partial_{x1}v_2-\partial_{x2}v_1) \tag{4-16 b}$$

$$F_2\equiv\partial_tv_2+\partial_{x2}B+v_1(\partial_{x1}v_2-\partial_{x2}v_1) \tag{4-16 c}$$

$$B\equiv\frac{1}{2}(v_1^2+v_2^2)+gh \tag{4-16 d}$$

となります．(4-16 a) において，任意の変分 $\delta\phi_1$, $\delta\phi_2$ に対し $\delta I=0$ となるための必要十分条件は

$$F_1=F_2=0 \tag{4-17}$$

すなわち浅水方程式系（コリオリ力は簡単のためゼロとします）の運動方程式が成立することです．以上の結果はよく知られた最小作用の原理（1. b参照）と呼ばれるものですが，$\vec{\phi}$ を用いたこの表示法においては質量保存が自動的に満たされるため，質点の力学同様運動方程式だけを得ればよいことになります．筆者の知る限りにおいて，流体に対するこの様な最小作用の原理の表示は新しいことだと思います．

独立な状態変数 ϕ_1, ϕ_2 に対する共役な運動量 π_1 ,π_2 はよく知られた関係（Goldstein 1980）

$$\pi_i \equiv \partial L/\partial(\partial_{x0}\phi_i);\ i=1,2 \tag{4-18}$$

で定義され，さらにハミルトニアン密度Hはルジャンドル変換

$$H=\sum_i \pi_i \partial_{x0}\phi_i - L \tag{4-19}$$

で与えられます．式（4-18）において π_i を具体的に計算してみますと以下の様な非常に簡単な表現になります．

$$\pi_1=v_2,\ \pi_2=-v_1 \tag{4-20}$$

またHは2つの項 H_A と H_B の和になることがわかります．

$$H=H_A+H_B \tag{4-21 a}$$

ここに

$$H_A=\frac{1}{2c}(\partial_{x1}\phi-\partial_{x2}\phi_1)(\pi_1{}^2+\pi_2{}^2)$$

$$+\frac{g}{2c^2}(\partial_{x1}\phi_2-\partial_{x2}\phi_1)^2$$

$$\left(=\frac{h}{2}(v_1{}^2+v_2{}^2)+\frac{gh^2}{2}\right) \tag{4-21 b}$$

$$H_B=-\phi_0(\partial_{x1}\pi_1+\partial_{x2}\pi_2)$$

$$(=-\phi_0(\partial_{x1}v_2-\partial_{x2}v_1)) \tag{4-21 c}$$

H_A は明らかに全エネルギー密度であり，H_B は式（4-6）で導入したカシミール密度になっています．このようにして得られた系のハミルトニアンH

$$H=\int_\Omega dx_1dx_2(H_A+H_B) \tag{4-22}$$

はもはやは系の全エネルギーではありませんが，第一項，二項とも積分不変量ですから H も不変量となります．さらにこの不変量Hは全エネルギー H_A と異なり，以下のような安定性の議論に好都合な性質を持っている事を示せます（Sakuma and Ghil 1990）．

> 条件 $\delta\oint_{\partial\Omega} dlv_1=0,\ \ \delta\int_\Omega dx_1dx_2h=0$ (4-23)
>
> を満たす任意の変分（ϕ_1, ϕ_2, π_1, π_2）に対し，与えられた定常状態に対するHの第一変分はゼロになる．

第一の条件はアーノルドがすでに用いた条件で，これは変分により領域内のうず度の総和は変化しないということを表わしています．これは図2-6において I_2 は変化させないということに当ります．第二の条件は変分に関する全質量保存を示し，$\vec{\phi}$ 表示を用いる限りこれは自然な帰結です．

4.4 安定性に対する弱い十分条件の導出

ここまでくれば後はHの第二変分を計算するだけとなります．δ^2H を計算すると，

$$\delta^2H=[\partial^2H_A+\delta^2H_B(1)]+\delta^2H_B(2) \tag{4-24}$$

という形に書けることがわかります．ここで［　］の中の量は v_i や h のようにゲージ条件の選択に関係しない変分量で，$\delta^2H_B(2)$ は $\delta\phi_i$ をあらわに含む項です．このゲージの選択に依存する $\delta^2H_B(2)$ は，系の安定性には寄与しないという事を数学的に示すことは可能（Sakuma and Ghil 1990）ですが技術的な部分と思われますのでここでは割愛します．ただこの事について一言つけ加えさせていただくなら，これは系の安定性という力学的に意味のある特性はゲージの選択に依存しない量だけで表現できるという自然な帰結であると思われます．こうして最終的に式（4-25）を得ます．

$$\delta^2H_A+\delta^2H_B(1)=\int_\Omega dx_1dx_2\Big[\frac{g}{2}\delta h^2$$

$$+2\delta h(\pi_1\delta\pi_1+\pi_2\delta\pi_2)+\frac{h}{2}(\delta\pi_1{}^2+\delta\pi_2{}^2)$$

$$-\frac{h}{Q^2}\ \frac{dQ}{d\phi_0}(\pi_1\delta\pi_1+\pi_2\delta\pi_2)^2\Big] \tag{4-25}$$

定常状態 $\delta_{x0}(\cdot)=0$ において，式（4-2）より

$$hv_1=\partial_{x2}\phi_0,\ hv_2=-\partial_{x1}\phi_0 \tag{4-26}$$

となりますから，ϕ_0 は 2-運動量（hv_1, hv_2）の流線関数 Ψ

$$hv_1=-\partial_{x2}\Psi,\ hv_2=\partial_{x1}\Psi \tag{4-27}$$

と

$$\phi_0=-\Psi \tag{4-28}$$

の関係にあります．

式（4-25）の積分記号下の量 δ^2K は式（4-28）を使い，最初の三項を多少書き直すと以下のようになりま

す．

$$\delta^2K=\frac{g}{4}\left(\delta h+\frac{4}{g}\pi_1\delta\pi_1\right)^2+\frac{g}{4}\left(\delta h+\frac{4}{g}\pi_2\delta\pi_2\right)^2$$
$$+\frac{h}{2}\left[\left(1-\frac{\delta\pi_1{}^2}{gh}\right)\delta\pi_1{}^2+\left(1-\frac{\delta\pi_2{}^2}{gh}\right)\delta\pi_2{}^2\right]$$
$$+\frac{h}{Q^2}\ \frac{dQ}{d\Psi}(\pi_1\delta\pi_1+\pi_2\delta\pi_2)^2 \qquad (4\text{-}29)$$

これより δ^2K が正定値であるための条件として

$$1-\frac{8(\pi_1{}^2+\pi_2{}^2)}{gh}>0 \text{ かつ } \frac{dQ}{d\Psi}>0 \qquad (4\text{-}30)$$

が得られます．これは明らかに二次元非発散流に対して得られたアーノルドの判定条件の浅水方程式に対する拡張と考えられます．

表示 (4-29) の特徴的な点は，全エネルギーの変分より得られる項とカシミールの変分より得られる最後の項を $\delta\pi_i$ の二次形式として容易に結合できるという点です．実際式 (4-29) は

$$\delta^2K=\frac{g}{4}\left(\delta h+\frac{4}{g}\pi_1\delta\pi_1\right)^2+\frac{g}{4}\left(\delta h+\frac{4}{g}\pi_2\delta\pi_2\right)^2$$
$$+\frac{h}{2}\left[\left(1-\frac{8\pi_1{}^2}{gh}+\frac{4}{Q^2}\ \frac{dQ}{d\Psi}\pi_1{}^2\right)\delta\pi_1{}^2\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{8\pi_2{}^2}{gh}+\frac{4}{Q^2}\ \frac{dQ}{d\Psi}\pi_2{}^2\right)\delta\pi_2{}^2\right]$$
$$-\frac{h}{Q^2}\frac{dQ}{d\Psi}(\pi_1\delta\pi_1-\pi_2\delta\pi_2)^2 \qquad (4\text{-}31)$$

と書き直せることは容易に示せます．これより直ちに正定値性の条件として，

$$1-\frac{8(\pi_1{}^2+\pi_2{}^2)}{gh}>0 \text{ かつ}$$
$$0>\frac{dQ}{d\Psi}>-\frac{Q^2}{4(\pi_1{}^2+\pi_2{}^2)}\left\{1-\frac{8(\pi_1{}^2+\pi_2{}^2)}{gh}\right\} (4\text{-}32)$$

を得ます．コリオリ力が重要となる回転流体の場合は式 (4-32) の Q を

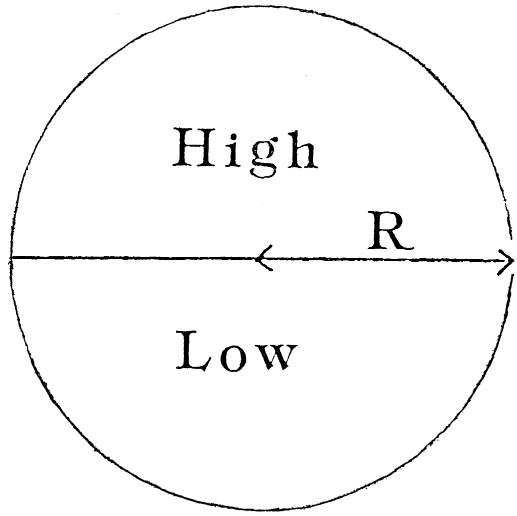
$$Q_R=\frac{1}{h}(f+\partial_{x1}v_2-\partial_{x2}v_1) \qquad (4\text{-}33)$$

で置き変えればよい事は式 (4-14) で定義されるラグランジアン密度にコリオリ力の項を加える他は全く同様な手続きで示すことができます．こうして，はじめのねらい通り δ^2K が正定値でしかも $dQ/d\Psi$ が負となるような判定条件 (4-32) が得られたことになります．

5. 新しく得られた弱い十分条件の気象，海洋力学における応用

5.1 二次元非発散流に対する弱い十分条件

新しく得られた弱い十分条件 (4-32) の地球流体力学



第 5-1 図

における有効性を調べるため，ここでは一例として基底状態のモドン解である Stern の解について見て行きます．Stern の解は β-平面における非発散流についての解ですので，まず浅水方程式系の非発散の定常解を考えてみます．ϕ を通常の速度 v_i に対する流線関数とすると，定常状態で定義される運動量の流線関数 Ψ と ϕ との間には

$$\frac{d\Psi}{d\phi}=h \qquad (5\text{-}1)$$

の関係が成り立ちます．したがって Ω を絶対うず度 $f+\partial_{x1}v_2-\partial_{x2}v_1$ とすると

$$\frac{dQ}{d\Psi}=\frac{d\phi}{d\Psi}\ \frac{dQ}{d\phi}=\frac{1}{h}\ \frac{d}{d\phi}\left(\frac{\Omega}{h}\right)$$
$$=\frac{1}{h}\left(\frac{1}{h}\ \frac{d\Omega}{d\phi}-\frac{\Omega}{h^2}\ \frac{dh}{d\phi}\right) \qquad (5\text{-}2)$$

となります．$\Omega=\Omega(\phi)$，$h=h(\phi)$ は非発散定常流に対する渦度方程式，および連続の式より直接得られます．簡単のため

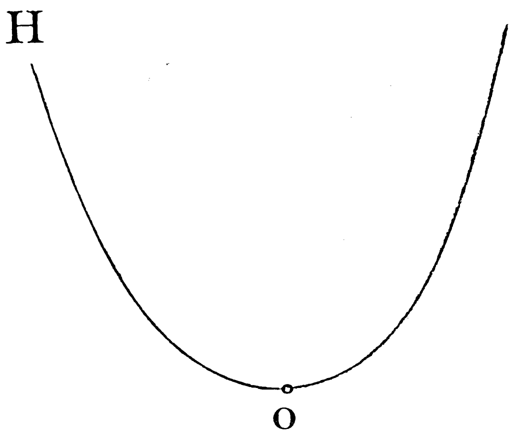
$$v^2\equiv\pi_1{}^2+\pi_2{}^2 \qquad (5\text{-}3)$$

と置き，式 (5-2) を使うと判定条件 (4-32) は

$$0>\frac{d\Omega}{d\phi}-\frac{\Omega}{h}\ \frac{dh}{d\phi}<-\frac{\Omega^2}{4v^2}\left(1-\frac{8v^2}{gh}\right) \qquad (5\text{-}4)$$

$$\Rightarrow\frac{\Omega}{h}\ \frac{dh}{d\phi}>\frac{d\Omega}{d\phi}>-\frac{\Omega^2}{4v^2}+\left(\frac{\Omega}{h}\ \frac{dh}{d\phi}+\frac{2\Omega^2}{gh}\right) \qquad (5\text{-}5)$$

となり，



第 6-1 図

浅水方程式系の平均層厚 $H(h=H+\eta)$ を形式的に限りなく大きくするとその系の力学は非発散系の力学に近づきますから（これはロスビー変形半径を→∞にすると言ってもよい）式 (5-5) において $h\to\infty$ として

$$0>\frac{d\Omega}{d\psi}>-\frac{\Omega^2}{4v^2} \tag{5-6}$$

を得ます．Arnol'd-Blumen の判定条件は δ^2H の正定値に対しては $d\Omega/d\psi>0$ でしたから条件 (5-6) は新しい条件と言えます．Stern のモドン解とは第 5-1 図の様な双極うずが静止状態の基本場の中にあるもので，式

$$\Omega\equiv f+\nabla^2\psi=-\lambda\psi \tag{5-7 a}$$

$$R_0{}^2\lambda\simeq 26.4 \tag{5-7 b}$$

で与えられます．条件 (5-6) より直ちに，

$$\frac{d\Omega}{d\psi}=-\lambda>-\frac{A^2}{4v^2}\sim-\frac{f^2}{4v^2} \tag{5-8}$$

なら安定と言えます．(5-7 b) を使うと (5-8) は

$$\frac{26.4}{R_0{}^2}<\left(\frac{f}{2v}\right)^2\Rightarrow\left(\frac{v}{fR_0}\right)^2<\frac{1}{4\times 26.4}\sim 10^{-2}$$

$$\Rightarrow\frac{v}{fR_0}\lesssim 10^{-1} \tag{5-9}$$

となります．（簡単のためここでは半径 R_0 の剛体壁で囲まれた双極うずを考えます）．式 (5-9) の左辺は Stern のモドンを代表する Rossby 数と見做せますから，大ざっぱに言って (5-9) が満たされていれば安定であると言えます．厳密に言うなら，コリオリパラメータ f そのものがあらわれている判定条件 (5-9) は，非発散流モデルに対する判定条件としてはふさわしくありません．何故なら非発散流モデルの渦度方程式は f の南北方向の微分である β を陽に含みますが，f そのものは陽に含まず Rossby 数が明確に定義できません．ここで考えた事はいわば浅水方程式系の "Stern の解" というべきものであり，そのような解に対しては上に見たように Rossby 数は意味を持ちます．現在知られているモドンの解としてはこの Stern の解の他に，1-a．で述べた東西に伝播するものもあります．アーノルドの方法を利用した安定性の解析法により今までモドンの安定性を調べる試みがいくつかなされてきましたが (1-a．参照)，東進するモドンの安定性はまだ証明されていません．しかしここで得られた新しい判定条件を用いると δ^2K が負定値になる場合を考えなくとも，浅水方程式系の東進するモドンの安定性を示すことも可能です．(Sakuma and Ghil 1991) そのようなモドンの安定性の数値実験は McWilliams 等 (1982) によってなされています．

6. おわりに

今まで地球流体力学ではあまり注目されなかった E-CC 法の中核となるアイデアを幾何学的に説明すると共に，二次元非発散流に対するアーノルド (1965) の判定条件を少々詳しく見てきました．ここに紹介したものはカシミールを含むハミルトニアン H の平衡点(定常状態)における第二変分の正定値を調べるものですが，変分量は数学的には無限小となりますので，振幅の小さなじょう乱（形は任意）の安定性しか主張できません．

アーノルド (1969) はその後この方法を改良し，有限振幅のじょう乱に対する解析法も提唱しました．一言で言うなら，これは第 6-1 図のように不変量が平衡点 0 のごく近い所だけではなく，有限領域にわたって高次元空間において凸 (convex) ならば，与えられた有限振幅のじょう乱は初期の振幅よりあまり大きくならないという事でこれは本文 2 章の $k>0$ の調和振動子と同様です．不変量 H はすでに説明した様に一般にはエネルギー (E) とカシミール (C) から成り，その汎関数 H の凸性 (convexity) を調べることにより安定性がわかるため，このアーノルドが提唱した解析法は現在 Energy-Casimir Convexity Method と呼ばれています．アーノルドの方法または E-CC 法はよく非線形安定性解析とも言われますが，今までの地球流体力学関係の論文によく引用されたのは，ここで紹介した変分法を用いた方法で，(formal stability analysis)，有限振幅のじょう乱に対するものではありません．この方法において注意すべき点は，簡単な調和振動子の方程式で $k<0$ の場合，H の節線は実際に不安定多様体になっていましたが，一般には

Hの節線は必ずしも不安定多様体になってはいないという事です．平衡点Oを通る不安定多様体に沿っては全エネルギーもカシミールも別々に保存され，その結果EとCの和であるHも保存されます．しかしある方向に関してはEとCは保存していないのにかかわらず ΔE と ΔC がうち消し合ってその結果その方向がHの節線となることもあります．そのような時はHはもやは正定値とはなりませんが，そのような節線は不安定とは直接関係ありません．本論では詳しく述べられませんでしたが，ゲージ変数を用いた方法では，見かけの節線は存在してもゲージに依存する項 $\delta^2 H_B(2)$ (4-24) に含まれることが示されます．したがってゲージ変数を用いた方法によると見かけの節線の影響が排除され，その結果従来のformal stability 解析よりもゆるい十分条件が得られることになります．

謝　辞

気象庁数値予報課の木本昌秀さんには UCLA にいる時より筆者の研究に大変興味を持っていただき，そのことがこの小稿をここに書かせていただく直接の要因となりました．また同じ気象庁の山田慎一さん，東京大学の住，林さん，気象大学校の松田，辻村，金久，黒田さん，気象研の猪川さんにも筆者の研究に興味を持っていただき，色々なコメントをいただきこの小稿を書くのに役に立ちました．内容にもしまちがいがあればそれはひとえに筆者の浅学のためです．

参考文献

McIntyre, M.E. and Shepherd, T.G. 1987: An exact local conservation theorem for finite-amplitude disturbances to nonparallel shear flows, with remarks on Hamiltonian structure and on Arnol'd's stability theorem. J. Fluid Mech. **181**, 527–565.

Larichev, V. and Reznik, G. 1976 b: Two-dimensional Rossby solition, an exact solution. Rep. U.S.S.R. Acad Sci. **231**(5).

Yamagata, T., 1982: On nonlinear planotay waves: a class of solutions missed by the guasi-geostrophic approximation J. Oceanogr. Soc. Japan, **38**, 236–244.

Salmon, R. 1988: Hamiltonian fluid mechanics. Ann. Rev. Fluid Mech. **20**, 225–256.

Arnol'd, V.I.: 1969 The Hamiltonian nature of the Euler equations in the dynamics of a rigid body and of perfect fluid. Usp. Mat. Nauk. **24**, 225–26 (In Russian)

Morrison, P.J., Greene, J.M. 1980: Noncanonical Hamilton density formulation: The Hamiltonian density formulation of hydrodynamics and ideal magnetoxhydrodynamics Phys. Rev. Lett. **45**, 790–94.

Little john R.D. 1982: Singular Poisson tensors. Am. Inst. Phys. Rev. Lett. **88**, 47–66.

Schiff, L.I. 1968: Quantum Mechanics, 3 rd edn. McGraw-Hill, 544 pp.

Abarbanel, H.D.I. 1985: Hamiltonian description of almost geostrophic flow. Gerophys. Astrophys. Fluid Dyn. **33**, 145–171.

————, Holm, D.D., Marsden, J.E. & Ratiu, T.S. 1986: Nonlinear stability analysis of stratified equilibria. Phil. Trans. R. Soc. Lond., A. **318**, 349–409.

Andrews, D.G., 1984: On the existence of nonzonal flows satisfying sufficient conditions for stability. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **28**, 143–256.

Arnol'd V.I. 1965: Conditions for nonlinear stability of stationary plane curvilinear flows of an ideal fluid. Sov. Maths Dokl. **6**, 773–776.

————, 1969: On an a priori estimate in the theory of hydrodynamical stability. Am. Math. Soc. Trans. Ser. 2, **79**, 267–269.

————, 1978: Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer Verlag

Benzi, R., Pierini, S., Salusti, E. & Vulpiani A. 1982: On nonlinear hydrodynamic stability of planetary vortices. Geophys. Astrophys Fluid Dyn. **20**, 293–306.

Blumen, W. 1968: On the stability of quasigeostrophic flow. J. Atmos. Sci. **25**, 929–931.

Carnevale G.F., Vallis, G.K. & Briscolini, M. 1988: The role of initial conditions in flow stability with an application to modons. Phys. Fluids **31**, 2567–2572.

Chern, S.J. & Marsden, J.E., 1990: A note on symmetry and stability for fluid flows. Gerophys. Astrophys. Fluid Dyn. **51**, 19–26.

Flierl, G.R. 1987: Isolated eddy models in geophysics. Ann. Rev. Fluid. Mech. **19**, 493–530.

————, Larichev, V.D., McWilliams, J.C. & Reznik, G.M. 1980: The dynamics of baroclinic and barotropic solitary eddies. Dyn. Atmos. Oceans 5, 1–41.

Ghil, M. & Childress, S. 1987: Topics in Geophysical Fluid Dynamics: Atmospheric Dynamics, Dynamo Theory, and Climate Dynamics. Springer Verlag

Goldstein, H. 1980: Classical Mechanics, 2nd edn. Addison-Wesley.

Holm, D.D., Marsden, J.D., Ratiu, T.S. & Weinstein, A. 1983: Nonlinear stability conditions and a priori estimates for barotropic hydrodynamics. Phys Lett. 98A, 15–21.

———, A. 1985 Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria. Phys. Pep. 123, 1–116.

Ingersoll, P.I. & Cuong, P.G. 1981: Numerical model of long-live Jovian vortices. J. Atmos. Sci. 38, 2067–2076.

Kuo, H.L., 1973: Quasi-geostrophic flows and instability theory. Adv. Appl. Mech., 13, 247–330.

Leadke, E.W., & Spatschek, K.H. 1986: Two-dimensional drift vortices and their stability. Phys, Fluid. 29, 133–142.

Landau, L.D. & Liefshitz, E.M. 1962: The Classical Theory of Fields, 2nd edn. Pergamon.

Lin, C.C. 1967: The Theory of Hydrodynamic Stability. Cambridge University Press.

Malanotte-Rizzoli, P. 1982: Planetary solitary waves in geophysical flows. Adv. Geophys. 24, 147–224.

Maxworthy, T. & Redekopp, L.G. 1976: New theory of the Great Red Spot from solitary waves in the Jovian atmosphere. Nature 260, 509–511.

McWilliams, J.C. 1980: An applicaton of equivalent modons to atmospheric blocking. Dyn. Atmos. Oceans 5, 43–66.

———, Flierl, G.R., Larichev, V.D. & Reznik, G.M. 1981: Numerical studies of barotropic modons. Dyn. Atmos. Oceans 5, 219–238.

Palais, R.S, 1979: The principle of symmetric criticality. Commun. Math. Phys. 69, 19–30.

Pierini, S. 1985: Onothe stability of equivalent modons. Dyn. Atmos. Oceans 9, 273–280.

Redekopp, L.G. 1977: On the theory of solitary Rossby waves. J. Fluid Mech. 82, 725–745.

Ripa, P. 1983: General stability conditions for zonal flows in a one-layer model on the β-plane or the sphere. J. Fluid Mech. 126, 463–489.

Sakuma, H and Ghil, M.. 1990: Stability of stationary baropic modons by Lyapunov's direct method. J. Fluid Mech 211, 393–416.

Sakuma, H and Ghil, M, 1991: Stability of propagating madons for small-amplitude perturbations

Stern, M.E, 1975: Minimal properties of planetary eddies. J Mar. Res. 33, 1–33.

Swaters, G.E. 1986 Stability conditions and a priori estimates for equivalent barotropic modons. Phys. Fluids. 29, 1419–1422.

Tribbia, J.J. 1984: Modons in spherical geometry. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 30, 131–168.

Wan, Y.H. & Pulvirenti, M. 1985: Nonlinear stability of circular vortex patches. Commun. Math. Phys. 99, 435–450.

Zabusky, N.J. & Kruskal, M.D. 1965: Interaction of 'solitons' in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. Phys. Rev. Lett. 15, 240–243.

第25回「夏季大学テキスト」販売について

去る8月5日〜8日，気象庁講堂において行われました夏季大学のテキストを希望者におわけいたします.

記

テキスト名：第25回夏季大学「人工衛星から地球を探る」

販売価格：1部1,500円

申し込み方法：代金を添えて必要部数を申し込んで下さい.（郵便振替 東京 3-5958）

申し込み先：〒100 東京都千代田区大手町気象庁内

日本気象学会

Tel.（03）3212-8341（代）