天　気　1991年11月
Vol. 38, No. 11

〔解　説〕　504（数値シミュレーション；ラージ・エディ・シミュレーション；Planepoiseuille 流；乱流モデル）

乱流のラージ・エディ・シミュレーションについて*

堀　内　　潔**

1. はじめに

ラージ・エディ・シミュレーション（Large Eddy Simulation, 以下 LES と略す）と呼ばれる乱流の数値シミュレーション手法は，今日では，基礎的な研究から工学上の応用まで広く使われるようになっている．

その起源をたどっていくと，1963年の Smagorinsky の論文にさかのぼることができる．この論文は，Monthly Weather Review という論文誌に掲載されたものであり，たぶん，本誌の読者の皆様にはなじみの深いものであろうと思われる．すなわち，LES は気象学の研究者により開発された手法であり，その後，他の広い分野に拡張されていったわけである．そもそも，“Richardson の夢”（1922）に代表される通り，気象学者にとって，気象の物理現象を数値計算によって予測するというのは，古くからの夢であったように思われる．6時間後の天候予報のために64,000人を一堂に介したこの“人間並列計算機”の試みは，残念ながら大はずれに終わったそうであるが，この夢は脈々と受け継がれてきたように思われる．その一つの画期的飛躍は，Smagorinsky (1963) にあったのではないかと，筆者は憶測している．聞くところによると，気象予報において，インプットのデータは，各々 100 km 以上の間隔を離れた観測点からのデータを基にしているということであるので，数値計算にかかる格子以下のスケールの運動の適切なモデル化を行なうことは必須であろう．それと同時に，台風といった大きなスケールの“渦”（eddy）については，直接その動きを追って行く必要が生じる．ところで，現在用いられている乱流の数値シミュレーション手法は，大きく，a）直接シミュレーション（Direct Numerical Simulation, 以下 DNS），b）LES，c）レイノルズ平均モデルによるシミュレーション（Reynolds Averaged Numerical Simulation, RANS）の3つに分けることができる．DNS は，動粘性係数（以下 ν）の効く Kolmogorov microscale と同程度のスケールまで解像して解く方法，LES は，計算にかかる格子以下のスケールはモデル化し，それ以上のスケールは，直接取り扱かう方法である．RANS は，時間および空間のアンサンブル平均をとったものであり，良く知られたものとして，k-ε モデル，あるいは，応力モデルがある．ところで，DNS を行なうためには，$\eta=\nu^{3/4}\varepsilon^{-1/4}$（ここに，$\varepsilon$ はエネルギー散逸率）で与えられる Kolmogorov microscale と同程度のスケールまで格子点を入れなければならない（Tennekes *et al.* (1972)）．

ε が，大きなスケールの速度 U および長さスケール L を用いて U^3/L と近似できることを用いると，3次元 DNS に必要な格子点数は $N=(L/\eta)^3=Re^{9/4}$ となる．ここに，$Re=UL/\nu$ はレイノルズ数である．したがって，例えば，$Re=10^4$ の DNS の計算を行なうためには 10^9 のオーダーの格子点数が必要になる．時間刻み Δt も $(\nu/\varepsilon)^{1/2}$ のオーダーにしなければならないことも考え合わせると，現在最高速・最大容量のスーパー・コンピュータをもってしても，ほとんど不可能なことは明白である．したがって，DNS の適用は，低レイノルズ数に限られる（Moser *et al.* (1987)，Kim *et al.* (1987)）．これにたいして，RANS は，気象予報に必要な台風の動き

* On Large Eddy Simulation of Turbulent Flows.
** Horiuti Kiyosi 東京大学生産技術研究所.

を追うといった非定常な運動の予測には不向きである．こうした事情をふまえると，Smagorinsky の発想自体は"自然"であったかもしれない．しかし，論文が出版されて30年を経た今日ですら，本質的に，Smagorinsky 氏の提案したモデルを越えるモデルは出現していないことは，氏の卓越した洞察力を物語っているように思われる．ところで，昨年の12月下旬に，米国フロリダ州セント・ピーターースバーグにおいて，プリンストン大学の Orszag 教授等が組織したワークショップ "Large Eddy Simulation……Where Do We Stand ?" が開かれ，筆者も出席した．このワークショップに Smagorinsky 氏も出席され，氏がモデルを提案された頃のエピソード等もお聴きすることができた．氏はその後，管理職に移られ，研究よりもマネージメントを主にされたようであるが，その後の多くの優秀な気象学者の輩出には，氏の卓観力や指導力が多大に貢献していたのではないだろうか．現在は，引退生活を楽しんでおられるとのことであった．こうした歴史的経緯をふまえ，以下，LES の解説を進めていきたいが，筆者は，気象学には門外漢であることを最初にお断わりしておきたい．本解説では，気象では重要な熱源といった外的要素を含めない，非圧縮性流体に限った．また，応用例としても，Plane Poiseuille 流のみをとりあげるので，はたして，気象の専門家の方に興味をもっていただけるかわからないが，御容赦願いたい．

第2節では，基礎方程式と LES における乱流モデリングを紹介し，第3節で LES の数値解析にふれる．続く第4節では，DNS データ・ベースを用いた LES 乱流モデルの検証を行ない，最後に第5節で，LES モデルの最近の展開にふれたい．本解説では，紙面の都合上，筆者の研究を中心に取り上げるので，欠落する部分も，多分にあると思われるが，その部分を補なうものとして Fox and Lilly (1972), Reynolds (1976), Rogallo and Moin (1984) の優れたレビューを御参考にされたい．

2. 基礎方程式と LES 乱流モデル

ここでは，非圧縮性流体の運動を考えるので，基礎方程式は，ナビエ・ストークス，および，連続の方程式である．

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i u_j)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\Delta u_i. \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \qquad (2)$$

ここに，u_i は，i 方向の速度成分，p は圧力を示す．

LES では，各点の乱流変動 f を，一種の粗視化の導入により，格子以上のスケールで変化する変数 $\bar{f}$ (Grid Scale あるいは GS 変数) と，それからの変動量 f' (Subgridscale, SGS 変数) に分離する．これには，フィルタリングという操作によるもの (Deardorff (1970), Leonard (1974)) と体積平均法 (Shumann (1975)) の2つが用いられている．フィルタリングとは，$f(x)$ にたいし，粗視化変数 $\bar{f}(x)$ を，フィルター関数 $G(x)$ との convolution により，

$$\bar{f}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x-x')f(x')\,dx' \qquad (3)$$

により定義する方法で，Deardorff (1970) により導入された．フィルター関数は，全空間で積分したとき1になり，格子間隔 Δ のスケールよりも小さな変動を効果的に消去するものでなくてはならないが，一般に用いられているものは，以下の3つである (Leonard (1974))．

1) Gaussian フィルター

$$G(x)=\sqrt{\frac{6}{\pi}}\cdot\frac{1}{\Delta_a}\exp\left(-\frac{6x^2}{\Delta_a^2}\right)\quad(\Delta_a=2\Delta) \qquad (4)$$

2) Top-hat フィルター

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta};\ |x|\leqq\dfrac{\Delta}{2}\\ 0\ ;\ \text{otherwise}\end{cases} \qquad (5)$$

3) Cutoff フィルター

$$G(k)=\begin{cases}1\ ;\ |k|\leqq\dfrac{\pi}{\Delta}\\ 0\ ;\ \text{otherwise}\end{cases} \qquad (6)$$

ここに，k は，フーリエ空間における波数を表わす．Gaussian および Cutoff フィルターは，通常，一様と考えられる空間方向に適用され，フーリエ空間で施こされる．これにたいし，体積平均法は，フィルター変数 ${}^V\bar{f}$ を

$${}^V\bar{f}=\frac{1}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3}\iiint_{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_1dx_2dx_3 \qquad (7)$$

で定義し，積分は，i 方向に Δx_i の長さをもつ計算セルの中で行なわれるので，2) の Top-hat フィルターに近い．Schumann (1975) は，たとえば，

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_1}(u_1u_2)}^{V}=\frac{1}{\Delta x_1}\left\{{}^1\bar{u}_1{}^1\bar{u}_2\left(x_1+\frac{\Delta x_1}{2}\right)\right.$$
$$\left.-{}^1\bar{u}_1{}^1\bar{u}_2\left(x_1-\frac{\Delta x_1}{2}\right)\right\} \qquad (8)$$

$${}^1\bar{u}_1=\frac{1}{\Delta x_2\Delta x_3}\iint_{\Delta x_2\Delta x_3}u_1(x_1,x_2',x_3')\,dx_2'dx_3' \qquad (9)$$

となり，実際上は，各計算セル内の面応力の差分で計算

されることに着目した．さらに，計算に用いるセルを設定し，そのセル内での平均，あるいは，各面内での平均応力を粗視化変数として採用する方法を用いた．（8）式より，数値計算の差分法でよく用いられている中心差分は，Top-hat フィルターと密接に関係していることがわかる．ところで，離散化したときには，面平均は厳密には定義されず，離散格子点での値を用いた近似積分となる．そのため，Taylor 展開を用いた誤差評価を行なうと，Gaussian あるいは Top-hat 関数によるフィルタリング体積平均法とはほとんど同一になる．したがってここでは，主にフィルタリングによる方法について述べる．操作（3）により，速度 u_i および圧力 p は，

$$u_i=\bar{u}_i+u_i', \quad p=\bar{p}+p' \tag{10}$$

と分離される．また，（1）および（2）式にフィルターを施こした際，空間微分および時間微分のオペレータは，通常，フィルター・オペレータと互換できる．したがって，(10) を考慮して，Filtered Navier-Stokes 方程式は，

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{u}_i\bar{u}_j)=-\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}+\nu\Delta\bar{u}_i \tag{11}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}=0 \tag{12}$$

となる．(11) 式中の τ_{ij} は

$$\tau_{ij}=(\overline{\bar{u}_i\bar{u}_j}-\bar{u}_i\bar{u}_j)+\overline{u_i'\bar{u}_j+\bar{u}_iu_j'}+\overline{u_i'u_j'} \tag{13}$$

と書き下せるが，右辺の第1項は，Leonard 項，第2項はクロス項，第3項は SGS レイノルズ応力項と呼ばれている．RANS と LES の主要な相違の一つは，クロス項の存在にあり，RANS では，クロス項は消える．Leonard 項は，フィルター関数を決めればモデル化なしに厳密に計算できる．クロス・SGS レイノルズ応力の2項は，SGS 成分を含むため，GS 変数と相関をつけるモデル化が必要である．第1節でふれた Smagorinsky モデルは，SGS レイノルズ応力にたいするモデルであるが，これは，渦粘性係数近似のモデル

$$\overline{u_i'u_j'}=\frac{2}{3}K_G\delta_{ij}-\nu_e\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) \tag{14}$$

$$\nu_e=(C_S\Delta)^2\left[\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right]^{1/2} \tag{15}$$

である．ここに，$K_G=\overline{u_l'u_l'}/2$ は SGS 乱流エネルギーである．これは，GS にくらべ十分スケールの小さい SGS の変動応力は，GS にたいし，ほとんど粘性的に振舞い，局所的なストレインに比例するという仮定に基づいたものである．特徴は，係数 ν_e が空間的・時間的に変動する点にある．動粘性係数 ν を導出するときと同様に，乱流場においても，こうしたスケールの分離が可能か否かは議論のある点だが，SGS 成分の十分スケールの小さな変動と GS 成分との相関を記述するものと考えることにする．ここで，Smagorinsky モデルの ν_e の導出過程をおってみよう．そのために，K_G の方程式を書き下してみると，

$$\frac{\partial K_G}{\partial t}=-\bar{u}_j\frac{\partial K_G}{\partial x_j}-\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}-\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\overline{u_j'u_i'u_i'}+\overline{p'u_j'}\right)$$
$$+\nu\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}K_G \tag{16}$$

となる．右辺第1項は SGS convection 項注)，第2項は SGS production 項，第3項は SGS dissipation 項（以下 ε と書く），第4・5項は SGS diffusion 項と呼ばれる．乱流場では，レイノルズ応力が平均速度勾配と相互作用して乱流エネルギーが生成される．いま，(16) の $\overline{u_i'u_j'}$ に (14) を用い，SGS production 項が dissipation 項に等しいという局所平衡の仮定をおいてみる．この2項の平衡は，次節で見るように，チャンネル流あるいはジェット流といった典型的な流れ場の平均エネルギー・バランスでは，比較的普遍的に成立していることである．すると，

$$-\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}=\nu_e\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{ux_j}+\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}=\varepsilon \tag{17}$$

となる．ここで，次元解析から，

$$\nu_e=C_\nu K_G^{1/2}\Delta, \qquad \varepsilon=\frac{C_\varepsilon K_G^{3/2}}{\Delta} \tag{18}$$

とおくと，

$$K_G=\frac{C_\nu}{C_\varepsilon}\Delta^2\left[\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right] \tag{19}$$

を得る．ここに，C_ν，C_ε はモデル定数である．(19) を (18) に代入して，(15) を得る．(15) 中のモデル定数 C_S は Smagorinsky 定数と呼ばれるが，Lilly (1966) は格子が inertial subrage に入っていると仮定し，次元解析的に，(15) が Kolmogorov の 5/3 乗則

$$E(k)=K_0\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \tag{20}$$

と適合することを指摘した．さらに，Kolmogorov 定数 K_0 を 1.5 として，C_S の理論値は約 0.2 であるとした．

脚注） 気象学では advection（移流）項とするのが慣例のようだが，ここでは，流体物理学の慣例にならい，convection（対流）項とした．

ところで，局所平衡が，多くの流れ場のかなりの部分で成立することは先述したが，次節で見るようにこの平衡がくずれる場合もある．そこで，より普遍性をもたせられるのが，(16) を直接解く方法である．このためには，SGS diffusion 項をモデル化しなければならないが，通常は，勾配拡散型のモデルを用い，

$$\frac{1}{2}\overline{u_j' u_i' u_i'}+\overline{p' u_j'}\sim C_{KK}\Delta K_G^{1/2}\frac{\partial}{\partial x_j}K_G \qquad (21)$$

と近似されている．(Lilly, (1967), Schumann (1975))

1方程式モデルの特徴は K_G の輸送および拡散の効果を導入できる点と，圧力の取り扱かいにある．Smagorinsky モデルを用いた場合には，(14) 式右辺第1項は，(11) 中では圧力と総和されて pressure head $\bar{p}+2K_G/3$ として計算される．厳密な圧力値を K_G と分離して算出するには，(19) を用いて K_G の値を計算しなくてはならない．しかし，(19) は Smagorinsky 定数 C_S 以外にもう一つの定数を含み，この定数の普遍性は定かでないため，不定性が生じる．これにたいし，1方程式モデルでは，K_G の値を厳密に評価できる．ところで，RANS で広く用いられている k-ε 型2方程式モデルと異なり，LES では K_G にたいする方程式のみを立てるので，多少奇異に思われる読者の方もいらっしゃるかもしれない．その理由は，k-ε モデルでは長さのスケールを k と ε を用いて定義するのにたいし，LES では長さスケールが格子間隔 Δ により決まってしまうことによる．

次に，(13) 中のクロス項にたいするモデルについて述べる．

現在，最も広く用いられているのは，Bardina モデル (Bardina (1980)) で，これは，いわゆる scale similarity 仮説に基づいている．GS 速度 $\bar{u}_i$ の全成分のうち，GS と SGS の境界の波数 π/Δ(以下 cutoff 波数) の近辺の波数成分は，2回フィルターを施したより緩やかに変動する成分 $\bar{\bar{u}}_i$ と $\bar{u}_i$ との差 $\bar{u}_i-\bar{\bar{u}}_i$ により抽出することができる．これにたいし SGS 成分 u_i' のうち，cutoff 波数に最も近い成分は，u_i' にフィルターを施した $\overline{u_i'}=\bar{u}_i-\bar{\bar{u}}_i$ で与えられる．すなわち，GS 成分のうち最も cutoff 波数に近い成分と，SGS 成分のうち同波数に最も近い成分とは同一であり，両者が相似であることがわかる．この scale similarity 仮説をもとに，cutoff 波数に近い成分のみに着目して，

$$\overline{u_i'\bar{u}_j}\sim(\bar{u}_i-\bar{\bar{u}}_i)\,\bar{\bar{u}}_j \qquad (22.\text{a})$$

$$\overline{\bar{u}_i u_j'}\sim\bar{\bar{u}}_i\,(\bar{u}_j-\bar{\bar{u}}_j) \qquad (22.\text{b})$$

$$\overline{u_i' u_j'}\sim(\bar{u}_i-\bar{\bar{u}}_i)\,(\bar{u}_j-\bar{\bar{u}}_j) \qquad (22.\text{c})$$

したがって，

$$\overline{u_i'\bar{u}_j+\bar{u}_i u_j'}+\overline{u_i' u_j'}\sim\bar{u}_i\bar{u}_j-\bar{\bar{u}}_i\bar{\bar{u}}_j \qquad (23)$$

と近似するのが，Bardina モデルである．ここで，L_{ij} および C_{ij} を Taylor 展開を用いて評価してみる．(3) 式より，G として Gaussian 関数を用いた場合，

$$\bar{f}=f+\frac{\Delta^2}{24}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}f+\mathrm{O}(\Delta^4)$$

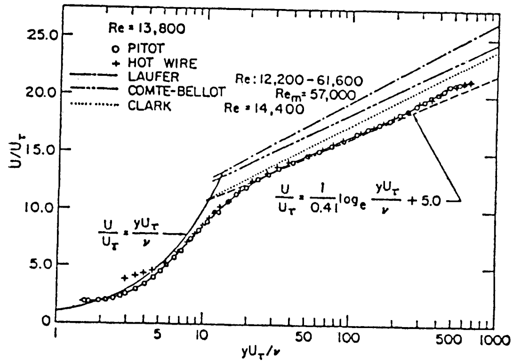
と展開できる．(2次のモーメントの係数までは，Top-hat フィルターも同一である) したがって，

$$u_j'=-\frac{\Delta^2}{24}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}u_j+0(\Delta^4) \qquad (25)$$

$$L_{ij}=\left(\frac{\Delta^2}{24}\bar{u}_i\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\bar{u}_j+\frac{\Delta^2}{24}\bar{u}_j\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\bar{u}_i\right)+\frac{\Delta^2}{24}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_k}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_k}+0(\Delta^4) \qquad (26.\text{a})$$

$$C_{ij}=-\left(\frac{\Delta^2}{24}\bar{u}_i\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\bar{u}_j+\frac{\Delta^2}{24}\bar{u}_j\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\bar{u}_i\right)+0(\Delta^4) \qquad (26.\text{b})$$

と展開される (Clark *et al.* (1977))，SGS 成分のような空間的に激しく変動し，その解析性が明らかでない成分に Taylor 展開を用いることは適切でないかもしれない．ここでは cutoff 波数に近い最もゆるやかに変動する成分のみを対象としているので，ある程度信頼できる展開になっていると考えられる．Bardina モデルも，2次の展開までは C_{ij} と同一の展開を与え，この展開に見る限り，Bardina モデルはC_{ij} の良い近似になっていると考えられる．ここで，L_{ij} 中には，速度そのものに比例する項があるため，この項のみを残した場合，ガリレイ不変性を破るが，これらの項は，C_{ij} と総和すると消去される点に留意されたい．すなわち，Bardina モデルを用いた C_{ij} の近似を導入した場合のみ，ガリレイ不変性を回復する．(ここでは，ガリレイ不変性の回復を Taylor 展開により示したが，より直接的な証明は Speziale (1985) を参照されたい．) もちろん，ガリレイ不変性がそれほど厳しく要請されない流れ場もあるが，本解説で取り上げる十分に発達した Plane Poiseuille 流では，下流および横断方向に流れは一様 (homogeneous) であるので，この方向では不変性が満足されなくてはならない．過去の多くの LES 計算 (Deardorff (1970), Schumann (1975), Moin and Kim (1982), Horiuti (1987)) は，L_{ij} は計算しているが，C_{ij} のモデルは導入しておらず，この点で精度に欠ける．ところで，(26.a) と (26.b) の総和



第1図　平均速度分布 (Hussain *et al.* (1975)).

$$L_{ij}+C_{ij}=\frac{\Delta^2}{24}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}+0(\Delta^4) \qquad (27)$$

は，いわゆるレイノルズ応力の非等方表現 (Speziale (1987), Yoshizawa (1984)) に相当することに留意されたい．

以上，現在 LES で主に用いられているモデルとして，SGS Reynolds 応力にたいする Smagorinsky モデルと，クロス項にたいする Bardina モデルを紹介した．以下，これらのモデルの精度を DNS データ・ベースを用いて検証していきたいが，その前に，次節では LES の歴史的背景と，数値解析にふれたい．

3. LES の数値解析

3.1 LES の歴史的背景

SGS レイノルズ応力にたいする Smagorinsky モデルが1963年に提案されたことは，既に述べたが，このモデルを用いた本格的な LES は，Deardorff (1970) の先駆的な仕事に始まる．これは，本解説で主に取り上げる Plane Poiseuille 流を対象としたものであった．これ以後，この流れ場は，LES，あるいは広く数値シミュレーションの一つの重要なテスト・ケースとなる．これは，平行な平板間に平均圧力勾配をかけて流体を流すもので，剪断乱流のもつ多くの特徴を備え，かつ飛行機の翼面上の流れといった実用的価値も高い．以下，座標系をチャンネルの下流方向を x，平板に垂直な方向を y，横軸方向を z とする（このラベルのつけ方は，一般に機械工学系で用いられ，気象系のつけ方と，y と z が入れ替わっているので注意されたい）．層流では，平均速度分布が放物線になることは，良く知られているが，十分発達した乱流状態では，第1図のような平均速度分布 U になる．これは実験値 (Hussain *et al.* (1975)) の図であるが，横軸は，壁からの距離 y を wall unit u_τ/ν（ここに u_τ は壁面摩擦速度＝壁面摩擦応力の平方根を示す．また，以下，$y_+=yu_\tau/\nu$ とする）の対数目盛りで示してある．平均速度分布は大まかに3つの層に分けることができる．$y_+\sim50$ からチャンネル中央部にかけては，ほぼ

$$U/u_\tau=\frac{1}{0.4}\log y_+ +5.0 \qquad (28)$$

という対数則にしたがう logarithmic layer，壁のごく近くでは，

$$U/u_\tau=y_+ \qquad (29)$$

にしたがう viscous sublayer，ならびに，この2つの層をつなぐ buffer layer から成る，チャンネル流のシミュレーション結果の成否判断の一つの基準は，この平均速度分布が再現できているかどうかである．ところで，第1図に見る通り，viscous sublayer は，$y_+\sim5$ 以下に分布するのにたいし，チャンネル中心部で y_+ は約600である．これは，この実験が，u_τ とチャンネル幅 δ にもとづいたレイノルズ数（以下 Re_τ）を1280としたことによる．このとき，チャンネル中央部での平均速度によるレイノルズ数 (Re) は約25,000となる．したがって，もしも，数値シミュレーションで，sublayer に十分格子点を入れ，かつ，中心部まで一様に格子点を配置しようとすると，1,000のオーダーの格子点が必要になり，現在でも容易ではない．そこで，Deardorff (1970) は，壁での厳密な粘着 (no-slip) の境界条件を課すことをやめ，対数則 (28) に適合する近似境界条件を設定した．計算には，NCAR (National Center for Turbulence Research) の CDC6600 を用い，当時としては，おそらく最大級の総計 6,720 (24×20×14) の格子点を配した3次元シミュレーションを行なった．この計算は，平均速度，乱流強度等をある程度の精度で再現し，乱流の3次元シミュレーションが十分手の届く圏内に入ってきたことを世界に印象づけた．この仕事は，後に Schumann (1975) より，より精密な近似境界条件と前述の1方程式モデルを用い，同じく NCAR の IBM370/165 により，最大65536格子点を配して受け継がれた．計算結果の実験値との一致は Deardoff (1970) よりも一層改善された．（ところで，Schumann (1975) は，Plane Poiseuille 流の他に同軸管内流の LES も行なったが，同軸管内流の場合，格子の異方性が強くなる．Schumann の用いた体積平均法は，この異方性を効果的に取り入れることができる利点がある．）以上の2つは，壁で近似

境界条件を用いたが，厳密に粘着境界条件を課す計算には，前述のチャンネル流のもつ stiffness のため，数値計算上陰解法を用いなくてはならない等の理由から，一世代上のコンピュータの登場が必要であった．これは，64台の並列プロセッサーから成る並列計算機 ILLIAC Ⅳ を用い，Moin and Kim (1982) により，$64\times63\times128$ という大格子点数のもと実現された．平均速度，乱流強度からより高次の統計量も実験値とよく一致しており，数値シミュレーションが風洞実験と同等の評価をされるようになる一つの契機となった．ところで，この流れ場では，x-z 方向に一様と考えられることは前に述べたが，このため，全ての変数をこの方向には離散 Fourier 展開することができる．粘性項に陰解法を用い，他の項を陽解法で解いた場合，連立の三次元偏微分方程式を，x-z 方向の波数のペアにたいする連立の一次元連立常微分方程式群に置換することができる．これらは，異なるペア同士は互いに独立であるので，特に並列計算機に有効な問題である．当時，筆者も，近似・粘着両境界条件による計算結果の比較に興味があり，Deardorff (1970) の計算を綿密に行なうのと同時に，粘着境界条件のLES も行なっていた (Horiuti (1982))．後者については，圧力解法に煩雑な解法を用いたため，HITAC M200H で $16\times22\times16$ 程度の計算であった．しかしながら，この過程で，Navier-Stokes 方程式の非線型項 (convective 項) の差分近似法により，計算結果に大きな誤差が生じることが明らかになった．

3.2　非線型項の近似法

Navier-Stokes 方程式は非粘性の下で，運動量・運動エネルギー等を保存する．数値計算の安定化を図るためにも，離散化近似した差分方程式が，こうした保存則を満足することが必要であることは，Phillips (1959) 以来，良く知られている．こうした保存性の高い convective 項の近似法の代表例は，Rotational form

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{u}_i\bar{u}_j)\sim\bar{u}_j\left(\frac{\delta\bar{u}_i}{\delta x_j}-\frac{\delta\bar{u}_j}{\delta x_i}\right)+\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta x_i}(\bar{u}_j\bar{u}_j)\qquad(30)$$

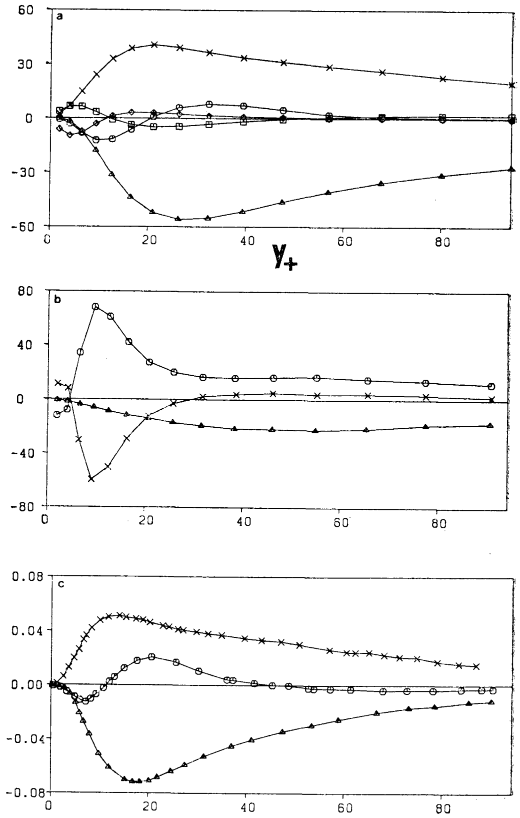
である．ここに，$\delta/\delta x_j$ は，差分あるいは離散化オペレータを表わす．これは，Orszag (1971) により提案され，当時広く用いられており，Moin and Kim (1982) でも採用された．もう一つの保存性の高い近似法は，Arakawa (1966) による convective form と divergence form の混合による Arakawa form

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{u}_i\bar{u}_j)\sim\frac{1}{2}\bar{u}_j\frac{\delta}{\delta x_j}\bar{u}_i+\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta x_j}(\bar{u}_i\bar{u}_j)\qquad(31)$$

である．Horiuti (1982) はこちらを採用した．詳しい解析は Horiuti (1987) を参照されたい．第2図は，GS shear stress $\langle\bar{u}''\bar{v}\rangle$ のバランス

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\bar{u}''\bar{v}\rangle=-\langle\bar{v}^2\rangle\frac{\partial\langle\bar{u}\rangle}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\langle\bar{u}''\bar{v}^2\rangle$$
$$-2\left\langle\left(\nu_e+\nu\right)\frac{\partial\bar{u}''}{\partial x_j}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_j}\right\rangle\qquad(32)$$
$$-\left\langle\bar{u}''\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}+\bar{v}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}\right\rangle+\frac{\partial}{\partial y}\left\langle(\nu_e+\nu)\frac{\partial(\bar{u}''\bar{v})}{\partial y}\right\rangle$$

を示す．ここに，$\bar{u}''=\bar{u}-\langle\bar{u}\rangle$，$\langle\cdot\rangle$ は x-z 面内および時間平均であり，右辺の各項は，順に GS production, convection, dissipation, velocity-pressure gradient, diffusion 項と呼ばれる．第2図aは Arakawa form を用いた場合の分布で，第2図bは Rotational form を用いた Moin and Kim (1982) のデータであるが，両者に



第2図　GS shear stress のバランス：△, production; ○, convection; ×, velocity-pressure gradient; ◇, diffusion; □, dissipation. (a) Arakawa form の場合, (b) Moin and Kim (1982) の LES データ, (c) Moser and Moin (1987) の DNS データ.

は顕著な差異が生じている．他のデータとの比較のため，第2図cにMoser and Moin (1987) のわずかに曲率のあるチャンネル流のDNSのデータを載せた．第2図aとcは定性的によく一致しており，production項とvelocity-pressure gradient 項が釣り合っているが，第2図bでは，壁から離れたところでは production 項と convection 項が釣り合い，壁の近くでは velocity-pressure gradient 項と convection 項が卓越してバランスしている．Moin and Kim (1982) および Horiuti (1987) は，(30)，(31) のオペレータ $\delta/\delta x_j$ のうち，下流・横断方向には pseudospectral 法を，y 方向には不等間隔の格子配置による1次精度の中心差分を用いた．誤差解析により，Rotational form の場合，$i=2$ 成分から，$(\Delta\xi)^2 Re_\tau^2$ という非常に大きな打切り誤差が壁のごく近くで生じることがわかった．(ここに，$\Delta\xi$ は，不等間隔の格子を写像した空間における格子間隔である．) このため，圧力分布に大きな誤差が生じ，前述の GS shear stress バランスの差異となって現われた．同時に，この誤差のため，乱流状態を維持できず，減衰して層流化してしまうことがわかった．この減衰を防ぐため，Moin and Kim (1982) は，Smagorinsky モデルを2つの部分に分け，$\overline{u_i'u_j'}$ を

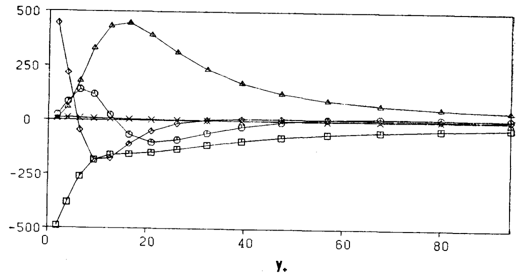
$$\overline{u_i'u_j'}=-\nu_e(e_{ij}-\langle e_{ij}\rangle)-\nu_e^*\langle e_{ij}\rangle$$

$$e_{ij}=\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\nu_e=(C_S\Delta)^2\sqrt{\frac{1}{2}(e_{ij}-\langle e_{ij}\rangle)^2}$$

$$\nu_e^*=C(D\Delta_3)^2\sqrt{\langle e_{ij}\rangle\langle e_{ij}\rangle} \qquad (33)$$

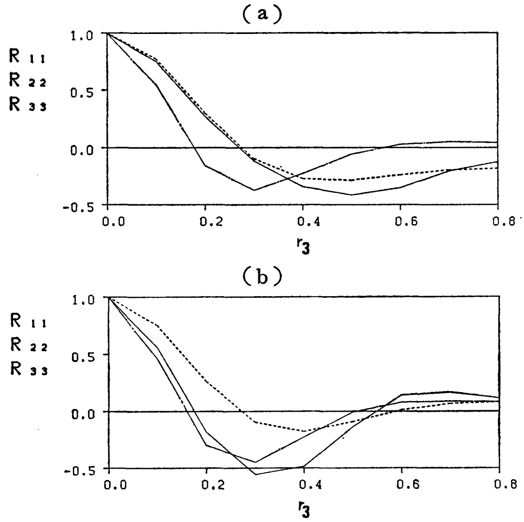
と近似した．これは，Two-part モデルと呼ばれ，Schumann (1975) でも採用された．しかしながら，SGS レイノルズ応力は，本来 local な物理量であり，その評価に面平均 $\langle e_{ij}\rangle$ といった global な量が直接入ってくることは，不自然のように筆者には思われる．筆者の計算では，このモデルは利用されていない．ところで，上述の大きな誤差は，低次精度の差分法を用いたことにより生じた誤差であり，精度を上げていくにしたがって，消えていく．しかしながら，最近の研究では，Rotational form を Spectral 法といった高次精度の方法と組み合わせた場合，Arakawa form と比べ，より大きな Aliasing error が生じることがわかっている (Zang (1989))．こうした一連の研究から，最近では，Aliasing error を完全に消去する場合を除いては，Rotational form は，ほとんど利用されていないようである．ところで，読者の



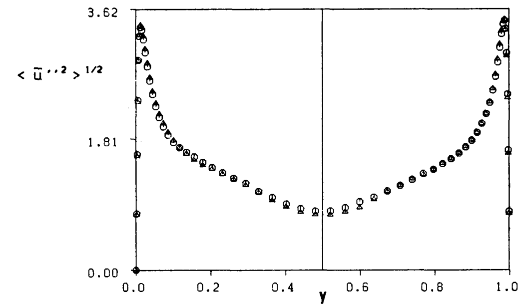
第3図 Total GS エネルギーのバランス (第2図の説明を参照).

中には御存知の方もいらっしゃるかもしれないが，Arakawa form は，現在 University of California Los Angeles の A. Arakawa 氏が NCAR 在籍当時開発された方法である．第2図のような相違は，GS shear stress と y 成分の GS エネルギー・バランス中で顕著であるが，総 GS エネルギーのバランスでは，あまり生じていない．第3図は，トータルの GS エネルギー・バランス (式は略す) であるが，特徴的なことは，前節で述べたように，チャンネルのほとんどの領域で production 項と dissipation 項が釣り合っているが，壁近くでは diffusion 項と dissipation 項がバランスしており，convection 項も無視できない大きさである点である．もしも，格子の解像度が十分でない場合，このバランスは SGS エネルギーのバランスにも反映されている可能性がある．そこで，1方程式モデルを用いることにより，diffusion 項および convection 項を取り込み，その影響を探ってみる．

ここで，Plane Poiseuille 流の LES を行なうための格子点の解像度に言及しておく，こうした剪断乱流の特徴の一つは，Streak と呼ばれる，いわゆる秩序構造 (Kim *et al.* (1971)) が存在することである．これは，流れ場に水素気胞を注入して可視化すると，壁の近く ($y_+\lesssim 50$) の細長い筋の列として観察され，平均値で約 100 wall units の間隔で，横断方向に概周期的に並ぶ，この構造が，単にパターンがきれいなだけならば，芸術的価値以外に何の意味ももたない．しかし，実はこうした構造が壁近傍から次第に lift up していき，break up する過程で，大きな乱流エネルギーの生成が起きることがわかっていた．この構造の正確な補捉は，正確な LES には必要であるが，その周期間隔は，ときとして，10 wall units といった小さなものも観測される．一方，横断および下流方向の計算領域全体の大きさは，2点相関関数が十分減衰する長さをとるが，こちらは，チャンネル幅



第4図 16×22×16 の y_+～30 における横断方向2点速度相関関数 R_{ii} (r_3).
——, R_{11}; ———, R_{22}; -----, R_{33}.
(a) Smagorinsky モデル, (b) 1方程式モデル.



第5図 64×62×64の下流方向成分の GS 乱流エネルギー. ○, Smagorinsky モデル; △, 1方程式モデル.

δ の数倍程度が必要であるので, 各方向に $R_{e\tau}$ のオーダーの格子点が必要となる. y 方向には, 引き延ばされた座標系を用いるものの, 最初の格子点は, y_+～1に置かれなくてはならない. さらに, チャンネル中央付近でも, 乱流混合のおきる長さ(Prandfl の mixing length 約0.05 δ (Tennekes *et al.* (1972)) を超える格子間隔はとれないので, y の方向にも, $R_{e\tau}/10$ から $R_{e\tau}$ のオーダーの格子点数が必要となる. したがって, 総計 $R_{e\tau}{}^3$ のオーダーの格子点数となるが, 第1図の実験では, $R_{e\tau}$ は1280であり, このレイノルズ数で, Streak を完全に解像するのは, かなり困難である. ところで, たとえば, Moser and Moin (1987) の DNS の dissipation のスペクトルを見ると, そのピークは, streak の間隔に対応する位置にあり, dissipation の9割近くは, 波数0からこの波数まででなされている. LES でも, もしも streak を完全に補促できるだけの格子点数を配した場合, エネルギー散逸は, GS で十分でき, SGS モデルの影響は, ほとんどなくなってしまい, モデルの公平な評価になるのかという疑問は残る. ともあれ, 上述のオーダーに近い格子点数は, 正確な LES には必要であろう.

3.3 1方程式モデル

本節では, Smagorinsky モデルと1方程式モデルの比較をおこなう. $R_{e\tau}=1280$ とし (16), (18), (21) 式中の定数は, $C_\nu=0.05$, $C_\varepsilon=1.0$, $C_{\kappa\kappa}=0.1$ と設定し (Horiuti (1985)), $C_s=0.1$ とした. 第4図は, 16×22×16の格子点を用いた場合の, 横断方向の2点速度相関関数

$$R_{ii}(y, r_3)=\frac{\langle \bar{u}_i''(x, y, z)\bar{u}_i''(x, y, z+r_3)\rangle}{\langle \bar{u}_i''^2(x, y, z)\rangle} \quad (34)$$

であるが, 前節の Streak の間隔の半値のところに, 相関関数の最初の負のピークが現れる. Streak の間隔を算出すると, Smagorinsky モデルの場合約800, 1方程式モデルの場合約480となり, 改善が見られる. しかし, こうした改善も, 格子の解像度を上げていくにつれ次第になくなり, 第5図の64×62×64の場合の GS 乱流エネルギーの分布に見る通り, その差異は小さくなる (Horiuti (1986)). ちなみに, この場合の Streak の間隔は, 約250であり, 横断方向に Moin and Kim (1982) の半数の格子点しか配していないにもかかわらず, streak の間隔は同じ値となっている. 第3図で, GS エネルギー・バランスでは, 壁近傍で diffusion 項の影響が大きいことを見たが, この事自体は, 1方程式モデルにも実際反映されており, その符号も, 壁近くで正値から, 壁から離れるにしたがって負値に変わるが, その大きさは production, dissipation 項にくらべ小さく影響は小さいようである. 同様な結論は, Schumann (1975) および, 乱流混合層の LES (Hamba (1987)) でも得られており, SGS の局所平衡を仮定することは, ほとんど問題がないようである.

そこで, 以下は, Smagorinsky モデルの適用に話を限るが, このモデルの Plane Poiseuille 流への直接的な適用は, 不正確な結果を生じる. それは,

a) Smagorinsky 定数 C_s の修正
b) 壁近傍での減衰関数の導入

の2つを施さないと，渦粘性係数の値が大きくなりすぎるからである．

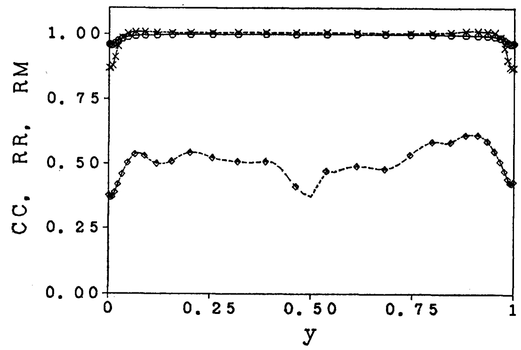
a) 2節で述べたように，Kolmogorov 則に基づいた C_s の理論的見積りは約0.2である．一様等方性乱流の LES (Clark *et al.* (1977)) では，たしかに，この値で実験と良く一致する結果が得られたが，乱流混合層 (Mansour (1978))，チャンネル流では大きすぎ，各々，約0.15, 0.1が最適値のようである．このことは，C_s の普遍性に疑問を呈するが第5節で再び論じることにする．

b) 壁で粘着条件を課す場合，壁面上で $\overline{u_i'u_j'}=0$，すなわち $\nu_e=0$ を満足しなければならない．このためには，Δ が壁に近づくにつれ急激に0に漸近するか，または，K_G が壁面上で0にならなければならない．しかし，前者は，指数関数的な座標の引き延ばしを必要とし，チャンネル中央部で格子間隔が粗になりすぎるため実用的でない．後者の K_G についても，壁面上での値を評価してみると，$C_s{}^4\Delta^2\cdot(Re_\tau)^2/C_v{}^2$ となり，零とならない．このため，通常は，Δ に Van Driest 型減衰関数 $(1-\exp(-y_+/26))$ (Van Driest (1956)) を乗じている．この関数は，RANS モデルで古くから用いられてきたものではあるが，経験的に導出されたものであり，その理論的根拠は乏しい．また，壁から一定の距離 y_+ を離れた x-z 平面上では，一様な減衰を与え，LES で重要な局所性がない．また，$\langle u_1' u_2'\rangle$ は壁で漸近的に y^3 と振舞うため，ν_e も漸近的に y^3 とならなくとはならないが，この漸近挙動も満足しないことも付記しておく．実は，この減衰関数の導入は，a) と密接に関連していることを第5節で論じる．

4. DNS データ・ベースを用いた LES 乱流モデルの直接的検証

本節では，Plane Poiseuille 流の DNS により生成されたデータ・ベースを用いた LES モデルの直接的検証を紹介する．この DNS データ・ベースの生成には，x-z 方向には Fourier 展開，y 方向には Chebyshev 多項式展開を用いた Spectral 法を使用した．(Horiuti (1989 a)) したがって，この DNS は，truncation error を全く含まない厳密な DNS である．Re_τ は 360，チャンネル中央部の速度と δ にもとづいた Re は約7000，用いた格子点数は128×129×128である．

この DNS データに，フィルターを施こすことにより，u_i を GS 成分 $\bar{u}_i$ と SGS 成分 u_i' に分離して算出



第6図 $C_{12}{}^B$ と $C_{12}{}^E$ の $C.C.$ (—○—)，$R.R.$ (--×--)，$R.M.$ (--◇--)．

された C_{ij} と R_{ij} の厳密値を，モデルによる値と比較するのが，本節における検証であり，いわば，厳密値との忠実度を図る "A priori" test (Clark *et al.* (1977)) である．フィルターとしては，x, z 方向方向には Guassian フィルターを，y 方向には Top-hat フィルターを用い，32×65×32 の LES データを生成した．これは，SGS モデルの検証に足る十分な大きさの SGS エネルギーを与える格子点数である．本節の詳細は，Horiuti (1989 b) を参照されたい．

4.1 クロス項にたいするモデルの検証

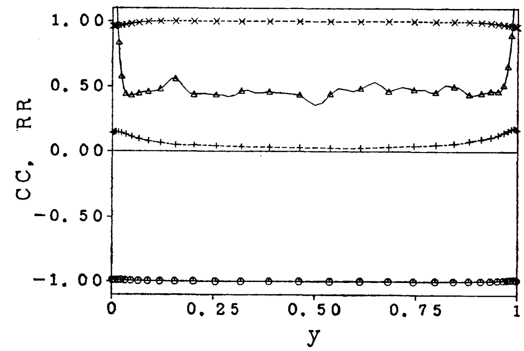
第2節 (26) 式の Taylor 展開の評価から，Bardina モデルは C_{ij} を2次のオーダーまで正確に近似していることを示した．これを，C_{ij} の厳密値と Bardina モデルによるモデル値の相関係数 ($C.C.$)，x-z 平面内平均値の比 ($R.M.$)，root mean square values の比 ($R.R.$)

$$C.C.(f,g)=\frac{\langle f''g''\rangle}{\langle f''^2\rangle^{1/2}\langle g''^2\rangle^{1/2}} \tag{35.a}$$

$$R.M.(f,g)=\langle f\rangle/\langle g\rangle \tag{35.b}$$

$$R.R.(f,g)=\langle f''^2\rangle^{1/2}/\langle g''^2\rangle^{1/2} \tag{35.c}$$

により検証する．本解説では，チャンネル流では最も重要な $i=1$, $j=2$ 成分の検証のみをおこなう．以下，C_{ij} の厳密値，Bardina モデルによるモデル値を，各々，$C_{ij}{}^E$, $C_{ij}{}^B$，とし，R_{ij} の厳密値，Smagorinsky モデルによるモデル値，Bardina モデルによるモデル値を，各々 $R_{ij}{}^E$, $R_{ij}{}^S$, $R_{ij}{}^B$ とする．第6図は，$C_{12}{}^E$ と $C_{12}{}^B$ の $C.C.$, $R.M.$, $R.R.$ を示すが，$C.C.$ と $R.R.$ がきわめて1に近いことから，Bardina モデルがクロス項の良いモデルになっていることが確認された．$R.M.$ が約0.5であるが，もともと，$\langle C_{12}\rangle$ の値は小さいので大きな誤

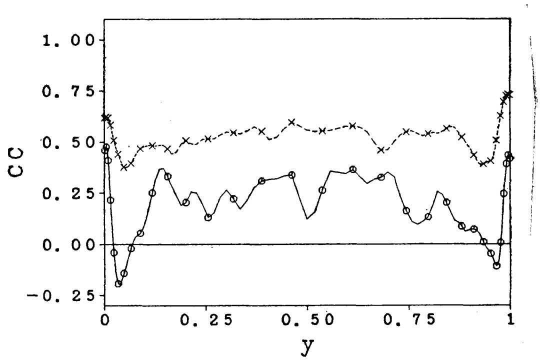


第7図　$C_{12}{}^B$ と L_{12} の C.C. (—○—)，R.R. (−−×−−)；−−+−−，$L_{12}+C_{12}{}^B$ と L_{12} の R.R.；—△—，$R_{12}{}^B+R_{12}{}^S$ と $L_{12}+C_{12}{}^B$ の R.R..

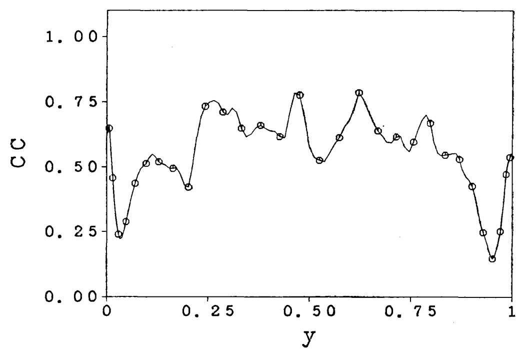
差ではない．(26. a) と (26. b) の右辺第1項は，全く同じ形で異符号になっているので，L_{12} と C_{12} は負の相関をもつことが予想されるが，これは，第7図の $C_{12}{}^B$ と L_{12} の C.C.，R.R. からも確認される．図中の C.C.，R.R. は，ほぼチャンネル内の全領域にわたって，各々，−1.0，および1.0である．$L_{12}+C_{12}{}^B$ の残りの項 (27) の大きさを見るために，図中に $L_{12}+C_{12}{}^B$ と L_{12} の R.R. および $R_{12}{}^B+R_{12}{}^S$ と $L_{12}+C_{12}{}^B$ の R.R. も含めたが，これらのグラフから，(27) が L_{12} や R_{12} に比べ無視できない大きさをもっていることがわかり，この項が計算結果に影響を与えることも示唆する．

4.2 SGS レイノルズ応力項のモデルの検証

第8図は，$R_{12}{}^E$ と $R_{12}{}^S$，$R_{12}{}^B$ の C.C. であるが，図から明らかなとおり，Smagorinsky モデルによる R_{12} のモデル値の相関はかなり低く，負値を示す部分もある．したがって，レイノルズ応力のレベルでは，Smagorinsky モデルの精度は低いと言わざるを得ない．しかし，dissipation のレベルでの検証，すなわち，dissipation の厳密値 $\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}$ と，$R_{12}{}^S$ によるモデル値 $R_{ij}{}^S\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$ との C.C. は，第9図に見るとおり，第8図の C.C. よりかなり改善されている．Smagorinsky モデルは，乱流エネルギーの散逸としては，かなり良いモデルとなっていることがわかる (Clark *et al.* (1977))．ところで，第8図中には，$R_{12}{}^B$ と $R_{12}{}^E$ の C.C. も含めたが，両者の相関はかなり高く，こうしたモデルがかなり有望なことを示唆する．しかし，後述するように，Bardina モデルは，必ずしも，乱流エネルギーの散逸として機能せず，実際の計算上は，散逸機構として，Smagorinsky モデルを併用する必要がある (Bardina (1980)，Horiuti (1989 b))．



第8図　$R_{12}{}^S$ と $R_{12}{}^E$ の C.C. (—○—)，$R_{12}{}^B$ と $R_{12}{}^E$ の C.C. (−−×−−).



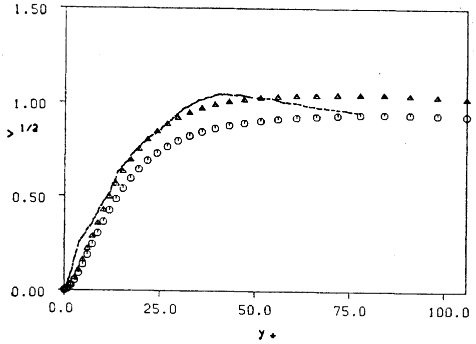
第9図　Dissipation の厳密値と Smagorinsky モデルによるモデル値の C.C..

4.3 "A posteriori" test

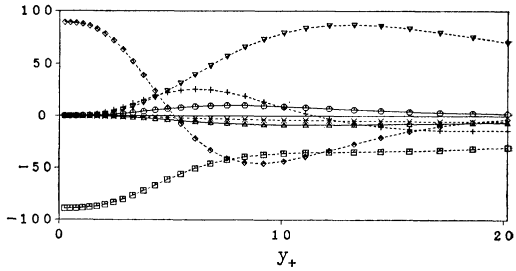
4.1，4.2節のテストは，ある瞬間の厳密値とモデル値の相関を見たものであるが，いかなるモデルも実際の LES 計算に導入して，乱流統計量といったレベルでその有効性を検証する必要がある．それは，"A priori" test で相関の高い忠実なモデルが，"A posterior" なテストで良い結果を生み出す保障は，必ずしもないからである．また，4.1，4.2のテストは，比較的低レイノルズ数の DNS データに基づいたものであることも留意しなくてはならない．

そこで，本節では，より高レイノルズ数 ($Re_\tau=1280$) の LES 計算に，Bardina モデルを導入し，その影響を調べた．用いた格子点数は，128×129×128である．

第10図は，Bardina モデルを導入した場合と導入しない場合の y 方向成分の乱流強度の比較である．ピーク位置，強度とも，実験値とくらべ，Bardina モデルを導



第10図　垂直成分の乱流強度の壁近傍の分布．○，Leonard 項のみの場合；△，Leonard 項と Bardina モデルを入れた場合；----，実験データ (Hussian *et al.* (1975))．



第11図　下流成分の GS 乱流エネルギー・バランス．—△—，Leonard 項による散逸；—○—，Bardinaモデルによる生成；--▽--，production；--+--，convection；--×--，velocity–pressure gradient；--◇--，diffusion；--□--，dissipipation.

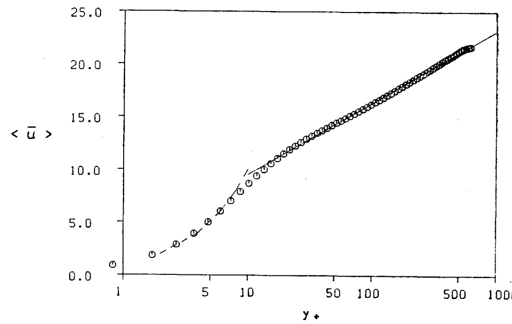
入した場合の方が改善されている．

この差異が何に起因するかを調べるために，第11図では，エネルギー・バランス中での Leonard 項と Bardina モデルの役割を調べてみた．図中，production 項と dissipation 項が主要項であることは前出の通りであるが，Leonard 項，Bardina モデルによる貢献も無視できない大きさをもっており，Leonard 項が散逸として機能している (Leonard (1974), Moin and Kim (1982)) のにたいし，Bardina モデルは，エネルギーの生成として機能している．これらの総和，すなわち，(27) 式による項は，壁の近くでは正の寄与をしており，SGS エネルギーの GS への逆カスケードの役割をしていることがわかる．ところで，(27) 式は，エネルギー・バランス中では，いわゆる derivative skewness と関連づけることができ，渦の stretching と密接に関係している項である (Horiuti (1989 a))．

第12図は，Bardina モデルを入れた場合の，平均速度プロファイル $\langle\bar{u}\rangle$ である．第1図の実験値を良く再現しており，対数則の係数および定数も良く一致している．以上と同様な検証は，Piomelli *et al.* (1988) でも行なわれているので参照されたい．同論文では，第3節でふれた近似境界条件の DNS データ・ベースを用いた検証も行なっているので参考にされたい．

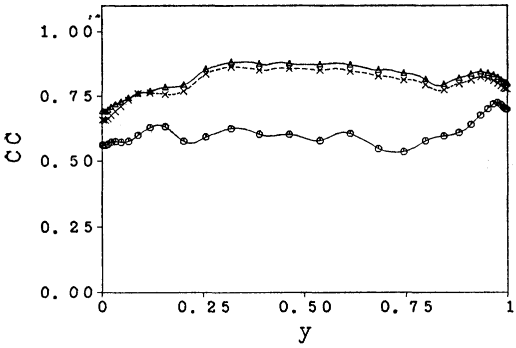
4.4　"Dynamic" test

たとえば，LES を天気予報に適用するには，予測可能性のより高いモデルを用いることが当然望ましい．一方，カオス理論では，初期条件の僅かな違いが指数関数的に拡大されていくことはよく知られている事実である．LES では，そもそも高波数成分の粗視化を行なっ

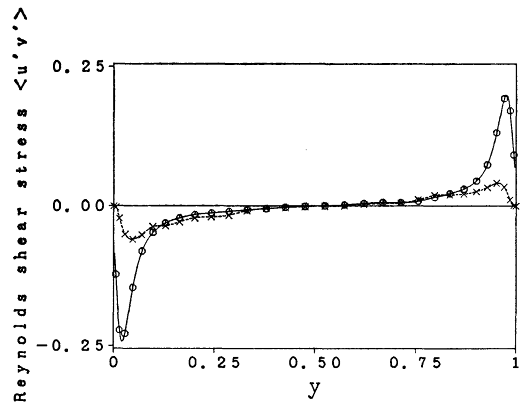


第12図　平均速度分布 $<\bar{u}>$．——，$<\bar{u}>=\frac{1}{0.4}\log y_{+}+5.0$，---，$<\bar{u}>=y_{+}$.

ており，本質的に統計操作を要する，こうした小さなスケールのモデリングに，極度な高精度を期待できるかの判断は，難かしいところである．ここでは，cutoff 波数近傍のより高精度のモデル化を，Bardian モデルの導入により行なうことで，どの程度の予測可能性の改善が図れるかを調べてみる．このために，DNS と LES の並行計算を行なった．まず，DNS のデータにフィルターを施こして，LES の初期データを生成する．これらを初期データとして，DNS と LES を並行に行ない，ある時間経過した時点で，再び DNS データにフィルターを施こした LES データを作り，並行計算された LES データとの相関係数を計算する．この2つの LES データの相関が高ければ，その LES モデルは，高い予測可能性をもつことになる．第13図は，このテストの結果であるが，Leonard 項のみを導入した場合の *C.C.* はかなり低いのにたいし，Leonard 項と Bardina モデルの双方を導



第13図　Dynamic test: LESデータとフィルターをかけたDNSデータの $\bar{u}_1''$ の相関係数．—○—，Leonard 項のみの場合，—△—，Leonard 項と Bardina モデルの双方を入れた場合；--×--，双方とも入れない場合．



第14図　(36)式で，$E=K_G$ とした場合の $<\overline{u_1'u_2'}>$ のモデル値 (—○—) と DNS データ (--×--) の分布．

入した場合はかなり改善されている．双方とも導入しなかった場合の *C.C.* は，双方とも導入した場合よりもわずかに低いが，これは，(27) 式に対応する項が存在しないためである．尚，このテストは，u_τ と δ で無次元化した時間で 0.225 経過した後，あるいは，チャンネル中央部の流体が，計算領域のほぼ1周期分を通過した後に行なった (Horiuti (1989 b))．

以上の "A priori", "A posteriori" の双方のテストより，Leonard 項のみの導入は，精度を落とすことが明らかになった．ここで，通常の2次精度中心差分法を用いた場合は，Leonard 項のみを導入した場合に対応していることを付記しておく，Bardina モデルの差分法計算への導入については，Horiuti (1989 a) を参照されたい．

5. 最近の展開

前節で，少なくとも SGS レイノルズ応力のレベルでは，Smagorinsky モデルと DNS の厳密値との相関は低いことを示した．また，第3節で，Smagorinsky モデルの実際の適用には，a) C_s の修正，b) 減衰関数の導入が必要であることを述べた．これらをより普遍的・統一的に取り入れられるモデルを開発しないと，より広範な LES の応用は難かしい．第1節でふれた米国フロリダにおけるワーク・ショップでも，こうしたモデルが焦点になっており，2つのモデルが提案された．1つは，Stanford 大学のグループによる Dynamic scale model であり，もう1つは，筆者による SGS 渦粘性係数中のエネルギー・スケールの適切な選択によるモデルである．紙面の都合で，ここでは主に後者をとりあげる (Horiuti (1990 a))．

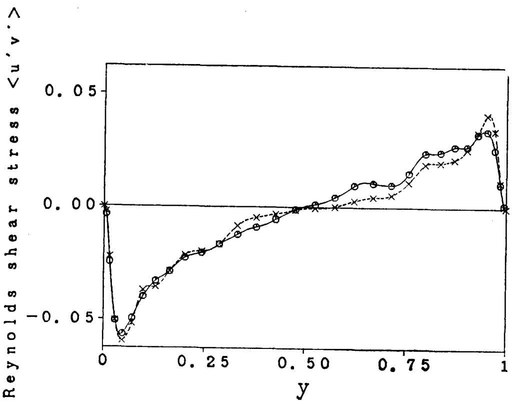
このモデルの導出は，基本的には，第2節の最後に言及したレイノルズ応力の非等方表現の高次展開項の導入による．詳細は，Horiuti (1990 b) を参照されたいが，そこでの主要な結論は，渦粘性係数を

$$\nu_e=C_\nu C_\varepsilon \tau E \tag{36}$$

と，時間スケール τ と，エネルギー・スケール E で書き表わしたとき，E としては，normal shear stress $\overline{u_2'u_2'}$ がより適切であるということである．このことを，4節と同様に DNS データ・ベースを用いて検証してみる．LES では，時間スケール τ は，

$$\tau=\frac{k}{\varepsilon}=\frac{1}{C_\varepsilon}\cdot\frac{\Delta}{K_G^{1/2}} \tag{37}$$

となる，いま，τ 中の $K_G=\overline{u_i'u_i'}/2$ として，DNS データ・ベースより算出した厳密値を用い，適切な E をさがしてみる　第14図は，E として K_G を採用した場合の SGS レイノルズ応力 $\langle\overline{u_1'u_2'}\rangle$ の x-z 平面内平均値の y 分布であるが，DNS の厳密値にくらべモデル値はかなり大きい．通常は，Van Driest 型減衰関数を併用して，第14図の大きなピークを減小させているわけである．第15図は，E として normal shear stress $\overline{u_2'u_2'}$ の DNS データを採用した場合の平均値分布であるが，ここでは何ら減衰関数を導入していないにもかかわらず，平均値はかなり良く DNS データと一致している．したがって，Horiuti (1990 b) の RANS モデルにたいする結論は，LES でも確認された．なお，図は省くが，このモデルで



第15図 (36)式で，$E=\overline{u_2'u_2'}$ とした場合の$<\overline{u_1'u_2'}>$のモデル値(—○—)とDNSデータ(--×--)の分布.

は，DNS データとの *C.C.* もかなり改善されている．さて，実際の LES 計算にこうしたモデルを導入するには，K_G および $\overline{u_2'u_2'}$ を GS 変数により表現しなくてはならない．以下，$\overline{u_2'u_2'}$ には，Bardina 型モデル

$$\overline{u_2'u_2'}=(\bar{u}_2-\bar{\bar{u}}_2)^2 \qquad (38)$$

を用いることにする．K_G の近似には 2 通りの方法があり，1 つは (38) と同様な Bardina 型モデル

$$K_G=\sum_{i=1}^{3}(\bar{u}_i-\bar{\bar{u}}_i)^2 \qquad (39)$$

であり，もう 1 つは，Smagorinsky モデル (19) 式を用いて近似する方法である．(39) 式を (36)・(37)・(38) 式と組み合わせたモデルは，前出の局所平衡の仮定と全く無縁である．このモデルを実際の LES 計算に用いたところ，格子解像度が高い 128×129×128 の場合，良い結果が得られたが，低い64×62×64の場合，平均速度分布すら前述の対数則を再現できず，実用に適さないことがわかった．この logarithmic layer は，第 3 図に見る通り，GS の局所平衡がよく成立している領域であり，SGS の適切なモデリングには，何らかの形でこの平衡仮説を導入しないと，不正確な結果を生じるようである．したがって，(37) 中の K_G としては (19) 式を用いることにするが，幾つかのモデルの比較検討の結果，モデル

$$\nu_e=(C_A\varDelta)^2\left[\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}\right]^{1/2}\cdot\frac{3(\bar{u}_2-\bar{\bar{u}}_2)^2}{\sum_{i=1}^{3}(\bar{u}_i-\bar{\bar{u}}_i)^2} \qquad (40)$$

が最も良い結果を与えることがわかった．(40) の右辺の最後の項（以下 f_d）が一種の damping factor として入り，$\varDelta$ に他の減衰関数を乗じる必要はない．同様な factor は，Yakhot *et al.* (1989) でも使われているが理論的な根拠は示されておらず，また，ここで用いた SGS 成分の比で与えるかわりに，GS 成分の強度比で与えられているため，格子間隔を小さくしていっても，この factor が消えない欠点がある．また，エネルギー・スケールを normal shear stress とすることにより，減衰関数の代用にすることは，Launder (1990) によっても提案されているが，$\overline{u_2'u_2'}$ の近似には RANS の応力モデルを用いているため，精度が低く，十分な damping が成されていない．ここでは，LES の利点，すなわち，ある程度の精度の情報をもった GS 成分が実際にすでに解かれ，与えられていることを有効に活用して，一種の SGS への外挿を行なったが，こうしたアプローチは今後かなり有望と思われる．ただし，(40) の f_d を一般化するには，チャンネルよりもより複雑な形状での normal shear stress の正確な評価が必要になるが，この点は今後の課題である．(40) 中の C_A をチャンネル流で最適化したところ，約 0.15 となり，Smagorinsky モデルの C_s=0.1 よりも大きめになった．C_A を 0.15 としたとき，実効的な C_S の平均値は，チャンネル中央部で約0.1 となり，壁の近くでは，Van Driest 減衰関数とほぼ一致する分布を示し，減衰が効果的に成されていることがわかった．しかも，(40) では，C_S が空間的に変動し，局所性をとり入れることができる．ところで，乱流強度の非等方性は，一様等方性乱流，乱流混合層，チャンネル流の順に強くなり，従来，Smagorinsky 定数も，この順に小さく選択されてきた．C_A の最適値 0.15 は，一様等方性乱流の0.2よりは小さめではあるが，(40) の f_d によって，上記の事実を説明でき，(40) はより普遍性の高い SGS モデルになりうると考えられる．また，Mason *et al.* (1986) は，格子解像度を十分にとるとチャンネル流でも C_S は0.2程度が最適値になると指適しているが，この事も定性的には説明できる (Horiuti (1990 b))．

ところで，(40) は，ν_e が壁で満たさなくてはならない漸近挙動 ($\sim y^3$) は，Van Driest 関数と同様に，残念ながら満足しない（実用上は，このことが大きな誤差を生むことはあまり無いようではある）．本節の最切にふれた Dynamic scale モデルは，(40) と同様に，a) C_S の普遍性が高く，b) "経験的な" 減衰関数が不要なモデルである．このモデルは，漸近挙動を満たし，かつ

乱流エネルギーの散逸ばかりでなく，渦粘性係数が負値をとることによって，GS への back-scatter も行なえるため，通常の Smagorinsky モデルでは扱かえない乱流への遷移過程(Horiuti (1986 b)，Piomelli *et al.* (1990))も再現できると報告されている．この Dynamic scale モデルは，より大きな特性長さをもったフィルター（test filter）をかけ，元のフィルター変数との併用により，GS から SGS への外挿の精度を上げたものである．詳細は，Germano *et al.* (1991) を参照されたい．

ところで，壁のごく近傍，あるいは，乱流混合層の外縁付近では，動粘性係数 ν の影響が無視できない．本節でとりあげた2つのモデルは，いずれも，ν の効果が直接入っていない．それにもかかわらず成功を収めているのは，レイノルズ応力の減衰は，圧力と連動した $\overline{u_2'}$ の減衰と関係しており，ほとんど非粘性な現象であるためと考えられる．ν の効果をとり入れたモデルとして，Yakhot and Orszag (1986) の Renormalization Group 法によるアプローチがあることを付記しておく．

6. おわりに

以上，ラージ・エディ・シミュレーションについての歴史的背景から最近の進展まで紹介してきた．紙面の都合上，主に筆者の研究の紹介に限ったため，独善に満ちたものになってしまったかもしれない．第1節で挙げた他のレビューも，是非，併読されることをお薦めする．また，内容が streak，あるいは，減衰関数といった細かい点に片寄りすぎ，気象に必要なもっとマクロなスケールの LES (J. Ferziger（私信）によれば Very Large Eddy Simulation）のモデリングについての話題が欠けてしまい，読者の方に果たして興味をもって読んでいただけたのか不安であるが，この点も御容赦願いたい．

最後に，気象学には門外漢である筆者に，本誌解説欄への執筆の機会を与えて下さった気象研究所・新野宏氏に感謝の意を表します．なお，本解説の研究に関しては，文部省科学研究費 Nos. 01613002, 02302043，東京大学・日立製作所共同研究の援助を受けましたことを付記し，謝意を表します．

参考文献

Arakawa, A., 1966: J. Comput. Phys. 1, 341.
Bardina, J., J.H. Ferziger and W.C. Reynolds, 1980: AIAA Paper 80-1357.
Clark, R.A., J.H. Ferziger and W.C. Reynolds, 1977: Report TF-9, Dept. Mech. Eng., Stanford Univ.
Deardorff, J.W. 1970: J. Fluid Mech. 41, 453-480.
Fox, D.G., D.K. Lilly, 1972: Rev. Geophys. Space Phys. 10, 51-72.
Germano, M., U. Piomelli, P. Moin and W.H. Cabot, 1991: Phys. Fluids A3, 1760-1765.
Hamba, F.: 1987: J. Phys. Soc. Japan 56, 2721-2732.
Horiuti, K., 1982: Theor. Appl. Mech. 31, 407-427.
———, 1985: J. Phys. Soc. Japan 54, 2855-2865.
———, 1986a: Notes on Numerical Fluid Mech. 15, 119-134.
———, 1986b: J. Phys. Soc. Japan, 55, 1528-1541.
———, 1987: J. Comp. Physics, 71, 343-370.
———, 1989a: Proc. Int. Symp. Comp. Fluid Dynamics, Nagoya, 233-238.
———, 1989b: Phys. Fluids A 1, 462-464.
———, 1990a: Phys. Fluids A 2, 1708-1710.
———, 1990b: Proc. Int. Workshop "Large Eddy Simulation...Where Do We Stand ?, St. Petersburg, Florida, 57-67.
Hussain, A.K.M.F. and W.C. Reynolds, 1975: J. Fluid Engineering Dec., 568-580.
Kim, H.T., S.J. Kline and W.C. Reynolds, 1971: J. Fluid Mech. 50, 133-160.
Kim, J., P. Moin and R.D. Moser, 1987: J. Fluid Mech. 177, 133-166.
Launder, B.E. and D.P. Tselepidakis, 1990: Near-Wall Turbulence, ed. by S.J. Kline and N.H. Afgan Hemispher Publ. Co., 818-833.
Leonard, A., 1974: Adv. Geophys. 18A. 237-248.
Lilly, D.K., 1966: NCAR Manuscript. 123.
Mansour, N.N., J.H. Ferziger and W.C. Reynods, 1978: Report TF-11, Dept. Mech. Eng. Stanford Univ.
Mason, P.J. and N.S. Callen, 1986: J. Fluid Mech. 162, 439-462.
Moin, P. and J. Kim, 1982: J. Fluid Mech. 118, 341-377.
Moser, R.D., and P. Moin, 1987: J. Fluid Mech. 175, 479-510.
Orszag, S.A., 1971: J. Fluid Mech. 49, 75-112.
Phillips, N.A., 1959: The atmosphere and Sea in Motion, ed. B. Bolin, Rockefeller Inst. Press, 501-504.
Piomelli, U., P. Moin and J.H. Ferziger, 1988: Phys. Fluids, 31, 1884-1891.
———, T.A. Zang, C.G. Speziale and M.Y. Hussaini, 1990: Phys. Fluids A2, 257-265.
Reynolds, W.C., 1976: Ann. Rev. Fluid Mech. 8, 183-208.

Richardson, L.F., 1922: Weather Prediction by Numerical Process, Dover Edition (1966).
Rogallo, R.S. and P. Moin, 1984: Ann. Rev. Fluid Mech. 16, 99-137.
Schumann, U., 1975: J. Comput. Phys. 18, 376-404.
Smagorinsky, J., 1963: Mon. Weather Rev. 91, 99-164.
Speziale, C.G., 1985: J. Fluid Mech. 156, 55-62.
————, 1987: J. Fluid Mech. 178, 459-475.
Tennekes, H. and J.L. Lumley, 1972: A First Course in Turbulence. MIT Press, Cambridge.
Van Driest, E.R., 1956: J. Aeronaut. Sci. 23, 1007-1011.
Yakhot, V. and S.A. Orszag, 1986: J. Sci. Comput. 1, 3-51.
Yakhot, A., S.A. Orszag, V. Yakhot and M. Israeli, 1989: J. Sci. Comput. 4, 139-158.
Yoshizawa, A., 1984: Pnys. Fluids, 27, 1377-1387.
Zang, T.A., 1989: Submitted to Appl. Num. Math.

情報 File

日本大気電気学会第46回研究発表会のお知らせと参加募集

主　催　日本大気電気学会
共　催（予定）電波科学研究連絡委員会E分科会
協　賛（予定）日本気象学会，大気汚染学会
地球電磁気・地球惑星圏学会
日本保健物理学会，静電気学会
エアロゾル研究協議会
電気学会高電圧研究会

第46回研究発表会を下記により開催することになりました．今回は，電気通信大学の御世話で，環境の良い調布市で開催いたします．大気中での諸現象に係わる研究者，技術者の有意義な研究交流・情報交換の場にしたいと考えておりますので，多数の御参加をお願いいたします．尚今回は，「地震，火山噴火に伴う大気電気現象」に関するシンポジウムを予定しています．

記

開催日時：1992年1月9日（木），10日（金）
会　　場：電気通信大学（京王線調布駅より徒歩10分）
〒182 東京都調布市調布ケ丘 1-5-1
講演募集分野：放射能・イオン・エアロゾル・雷・晴天電気・電磁波等に関する研究分野の他，地球規模の大気環境現象を含みます．
今回は，シンポジウム「地震，火山噴火に伴う大気電気現象」を開催することを予定しています．

尚，電波科学研究連絡委員会E分科会の共催を計画中です．

ご講演を申し込まれる方は，11月20日（水）までに講演題目，氏名（講演者に○印），所属を下記までお送り下さい．尚，今回は予稿はございませんが，講演終了後（2月中旬）要旨（A4，1ページ）を「大気電気研究」に投稿していただきます．

〒182 東京都調布市調布ケ丘 1-5-1
電気通信大学　菅平宇宙電波観測所
早　川　正　士
TEL. 0424-83-2161 内線 3354
FAX. 0424-89-5861

また，参加費は無料となっております．多くの方のご参加をお待ちしております．