球面モドンの線形安定性*

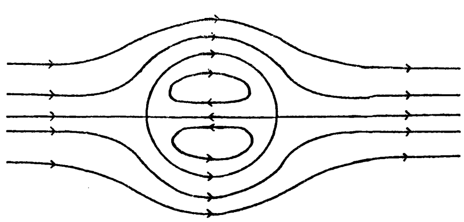
金　久　博　忠**

要　旨

大気ブロッキング現象のモデルの一つとして，Tribbia (1984) と Verkley (1984) によって独立に提出された球面上のモドンの内，基底状態の西進モドンの線形安定性を，Laedke & Spatschek (1986) が β 平面上の基底状態の西進モドンの線形安定性を証明した方法を適用する事によって示す．β 平面上のモドンと同様に球面上のモドンの場合も，Arnol'd 不変量が証明の鍵となる．β 平面上のモドンの証明には更に，擾乱の一次の保存量が用いられた．球面上のモドンに対しては，これに対応する擾乱の一次の保存量は存在しないが，此の場合でも，Laedke & Spatschek (1986) の方法は有効であり，安定性を示す事が出来る．

1. 序

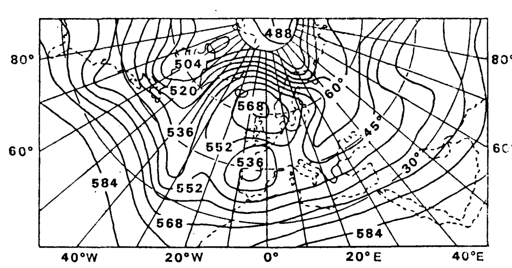
Larichev & Reznik (1976) による β 平面上の渦位保存式の並進孤立波動解（以下 β 平面モドンと言う）は，第1図に示す様に南北反対称の孤立双極渦によって特徴づけられるが，



第1図　β 平面上のモドンの例

其の形が大気ブロッキング現象（第2図参照）と似ている為，β 平面モドンを大気ブロッキング現象のモデルの一つと考える事の是非が，多くの研究者によって議論されている．

例えば，McWilliams (1980) は，モドンと実際のブロッキングを比較し，モドンの外部領域における波動が無限遠に向かって逓減して行く為の孤立化条件が，現実には満たされ難い事を指摘した．Pierrehumbert & Malguzzi (1984) は，非強制非散逸系に於て，モドンの様



第2図　大気ブロッキングの例 (after Haines, K. and J.C. Marshall, 1987)

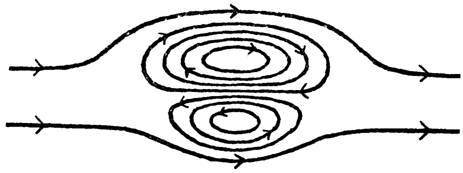
に閉じた流線を持つ定常解が存在すれば，弱強制弱散逸系に於てもこの解に良く似た定常解が存在し得ることを証明した．Haines & Marshall (1987) は，孤立化条件を満たさず外部領域に波動を伴うモドンの生成・発達・減衰の数値実験を行い，ほぼ孤立した顕著な双極渦が，実際のブロッキングの時間規模で持続することを示した．孤立化条件を満たすと満たさないとに関わらず，一般にモドン解とは，$Q=F(\Psi)$ の関数形が，モドン内領域とモドン外領域で異なり（Qは渦位，Ψ は流線関数），かつ $dQ/d\Psi$ のモドン内領域の値がモドン外領域の値よりも小さいと言う特徴を持つが，Butchart *et al* (1989) は，現実のブロッキング領域における $dQ/d\Psi$ の値が，ブロッキング外領域における $dQ/d\Psi$ の値よりも小さいという観測事実のあることを指摘した．

不安定な解が実現されることはほとんど不可能であるから，モドンが一つの有意な解であるためには安定でな

* linear stability of modons on a sphere.

** Hirotada Kanehisa，気象研究所予報研究部．

——1990年11月1日受領——
——1992年4月3日受理——



第3図　球面上のモドンの例（北半球中緯度に在る場合）

ければならないが，孤立化条件を満たすβ平面上の西進モドンの線形安定性については，Laedke & Spatschek (1986) の証明が良く知られている．

β平面近似は，考えている現象の南北規模が地球半径に比べて十分小さいと言う条件の下で成立するが，大気ブロッキングのような大きな規模の現象に対しては良い近似とは言えない．したがって，大気ブロッキング現象をモドンによって捉えようとするならば，球面上のモドン解を考えることが望ましいが，Tribbia (1984) と Verkley (1984) は，モドンが球面上の渦位保存式の並進孤立波動解（以下，球面モドンと言う）としても存在することを示した．β平面モドンが南北反対称な双極渦を持つのに対して，球面モドンは，流線関数の二階微分係数までのモドン境界における連続性と言う条件の下で，単極成分と双極成分の重ね合わせとして表現され，その結果，第3区に示すように北の高気圧が南の低気圧よりも強くなり，β平面モドンと比較して，実際の大気ブロッキング現象により良く似たものとなっている．

Tribbia (1984) と Verkley (1984) の球面モドンは孤立波動解であるが，このモドン解以外にも，外部領域に波動を伴う球面上のモドン解が Verkly (1987, 1990) によって提出されている．

これらの球面モドンを大気ブロッキング現象のモデルと考えるためには，もちろん，その安定性が示されねばならないが，ここでは Tribbia(1984) と Verkley(1984) の球面モドンの内，基底状態の西進モドンの線形安定性を Laedke & Spatschek (1986) が基底状態のβ平面西進モドンの線形安定性を証明した方法を適用することによって示す．彼らの証明は，Arnol'd 不変量と呼ばれる擾乱の二次の保存量と，擾乱の一次の保存量に基づいている．球面上でも，Arnol'd 不変量は存在するが，β平面モドンに対して存在した擾乱の一次の保存量は球面モドンに対しては存在しない．しかし，この場合でも，Laedke & Spatschek (1986) の方法を適用することによって基底状態の西進球面モドンの線形安定性が証明されることを示す．

Andrews (1984) は，考えている領域がある対称性を持つ場合，Arnol'd の方法によって安定性の証明される定常解は，考えている領域と同じ対称性を持たねばならないということを示した．この Andrews の定理によれば，東西一様なβ平面上のモドンも，軸対称な球面上のモドンも，Arnol'd の方法ではその安定性が証明されないように思われるが，一方，Carnvale & Shepherd (1990) や Chern & Marsden (1990) は，対称性が存在する場合の安定性は，対称性に関連したモードを除去して考えるべきであることを指摘し，対称性を破る安定な定常解が実際に存在することを示した．β平面モドンの場合には，モドンが形を変えずに東西方向に移動しても，モドンが潰れる訳ではないので，Laedke & Spatschek (1986) のβ平面モドンの安定性証明では，モドンを東西方向にずらすような並進モード擾乱は，安定性議論から除去された．球面モドンでも事情は同じであることが示される．

第2節で球面モドンを簡単に説明し，第3節で基底状態という言葉の意味を説明し，第4節で Arnol'd 不変量の導出される過程を説明し，第5節ないし第9節で基底状態の西進球面モドンの線形安定性を示す．第10節を結語とする．

2. 球面モドン

球面モドンとは球面上の渦位保存式

$$\partial Q/\partial t+J(\psi,\ Q)=0,\quad Q=\Delta\psi-\Lambda^2+2\Omega\mu \qquad (1)$$

の経度方向へ角速度ωで進む並進孤立波動解である．ただしここでψ流線関数，Qは渦位であり，

$$\Lambda^2=f_0{}^2/gH,$$

$$J(A,\ B)=(1/R^2)\{(\partial A/\partial\lambda)\ (\partial B/\partial\mu) -(\partial A/\partial\mu)\ (\partial B/\partial\lambda)\},$$

$$\Delta=(1/R^2)\{(\partial/\partial\mu)\ (1-\mu^2)\ (\partial/\lambda\mu) +(1/1-\mu^2)\ (\partial^2/\partial\lambda^2)\}$$

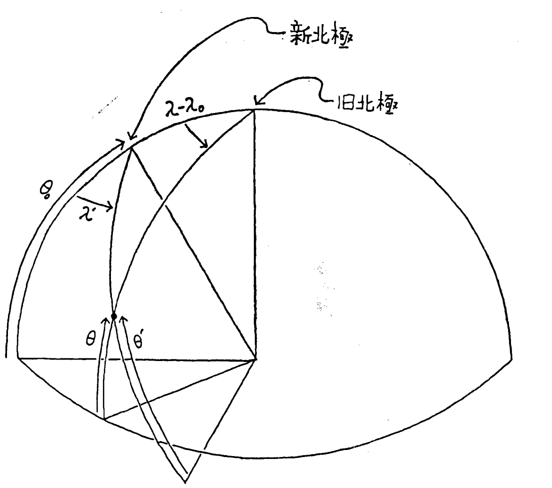
であり，Rは地球半径，λは経度，$\mu=\sin\theta$でθは緯度，tは時間，$f_0{}^2$はコリオリ因子の二乗平均，Hは等価深度，gは重力加速度，Ωは地球自転角速度である．経度方向へ角速度ωで並進する座標系に移り新座標を$\underline{\lambda}$, $\underline{\mu}$, $\underline{t}$とすれば

$$\underline{\lambda}=\lambda-\omega t,\quad \underline{\mu}=\mu,\quad \underline{t}=t$$

であるから

$$\partial/\partial t=\partial/\partial\underline{t}-\omega\partial/\partial\underline{\lambda},\quad \partial/\partial\lambda=\partial/\partial\underline{\lambda},\quad \partial/\partial\mu=\partial/\partial\underline{\mu}$$

となる．新座標を改めてλ, μ, tと書くと渦位保存式



第4図　球面上の座標変換の説明図

(1) は

$\partial Q/\partial t + J(\psi + R^2\omega\mu,\ Q) = 0$

となるが旧座標系での並進孤立波動は新座標系では定常孤立波動となり，したがって，渦位保存式は

$J(\Psi,\ Q) = 0,\ \Psi = \psi + R^2\omega\mu$

となる．これより渦位 Q は流線関数 Ψ だけの関数となる．

$Q = \Delta\psi - \Lambda^2\psi + 2\Omega\mu = F(\Psi) = F(\psi + R^2\omega\mu).$ （2）

ここで第4図に示すような，緯度 θ_0，経度 λ_0（孤立波動の中心）を北極とする新座標系に移る．

この時，旧座標θ，λ と新座標 θ'，λ'，は次の関係式で結ばれる，

$\sin\theta' = \sin\theta\ \sin\theta_0 + \cos\theta\ \cos\theta_0\ \cos(\lambda - \lambda_0),$ （3）

$\sin\theta = \sin\theta'\ \sin\theta_0 - \cos\theta'\ \cos\theta_0\ \cos\lambda',$ （4）

$\cos\theta'\ \sin\lambda' = \cos\theta\ \sin(\lambda - \lambda_0).$ （5）

この変換は単に原点の移動であり，ラプラシアン Δ 及びヤコビアン J（，）は形を変えない．以下，新座標 λ'，θ' を改めて λ，θ と書くことにする．モドン解とは (2) 式の関数 F (Ψ) として

$Q_{in} = C_{in} - (\Lambda^2 + k^2)\Psi_{in} \qquad \pi/2 \geqq \theta > \Theta,$ （6）

$Q_{ex} = C_{ex} - (\Lambda^2 - p^2)\Psi_{ex} \qquad \Theta \geqq \theta > -\pi/2$ （7）

となるものを採り，緯度 $\theta = \Theta$ の内側 ($\pi/2 \geqq \theta > \Theta$) と外側 ($\Theta > \theta \geqq -\pi/2$) を $\theta = \Theta$ において Ψ が一定，grad Ψ および Q が連続となるように繋合わせたものである．ただしここで，添え字 in と ex は内側と外側を意味し，C_{in}，C_{ex} は定数，k^2，p^2 は正定数であり，解は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}
\Psi_{in}(\theta,\ \lambda) &= C_{in}/k^2 \\
&+ A\sin\theta_0\{p^2R^2+2)/(k^2R^2-2)\}\ \{\{\sin\theta/\cos\Theta \\
&+ P_a{}^0(\sin\theta)/P_a{}^1(\sin\Theta)\} \\
&- A\cos\theta_0\{(p^2R^2+2)/(k^2R^2-2)\}\ \{\cos\theta/\cos\Theta \\
&- P_a{}^1(\sin\theta)/P_a{}^1(\sin\Theta)\}\cos\lambda \\
&= \Psi_{in}{}^M(\theta) + \Psi_{in}{}^D(\theta)\cos\lambda, \qquad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{ex}(\theta,\ \lambda) &= \\
&- A\sin\theta_0\{\sin\theta/\cos\Theta - P_b{}^0(-\sin\theta)/P_b{}^1(-\sin\Theta)\} \\
&+ A\cos\theta_0\{\cos\theta/\cos\Theta \\
&- P_b{}^1(-\sin\theta)/P_b{}^1(-\sin\Theta)\}\cos\lambda \\
&= \Psi_{ex}{}^M(\theta) + \Psi_{ex}{}^D(\theta)\cos\lambda. \qquad (9)
\end{aligned}$$

$A = 2\Omega\cos\Theta/(\Lambda^2 - p^2).$

ただし，$C_{ex} = 0$ となるように流線関数の値を決めてあり，C_{in} の値はもちろん，境界条件から決まる．ここで，添え字MとDは単極成分と双極成分を意味し，$P_n{}^m$ (x) はルジャンドル同伴関数であり，

$P_n{}^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}d^mP_n(x)/dx^m,$

$m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$

と定義され，ルジャンドル関数 $P_n(x)$ は

$P_n(1) = 1$

と規格化されているものとする．（ルジャンドル同伴関数については，Verkley (1984) を参照すればよい.）正定数 p^2 は

$p^2 = \Lambda^2 + (2\Omega/R^2\omega)$ (10)

で与えられる．a と b は

$a(a+1) = R^2k^2 \quad (a \geqq 0), \qquad b(b+1) = -R^2p^2$ (11)

によって，k^2 と p^2 で決まる．k^2 と p^2 と Θ は

$\{1/(k^2R^2-2)\}P_a{}^2(\sin\Theta)/P_a{}^1(\sin\Theta)$

$= \{1/(p^2R^2+2)\}P_b{}^2(-\sin\Theta)/P_b{}^1(-\sin\Theta)$ (12)

を満足しなければならない．与えられた p^2 と Θ に対して，k^2 はこの代数方程式 (12) の根で与えられる．

3. 基底状態

与えられた p^2 と Θ に対して k^2 は，代数方程式(12)の根であるが

$P_b{}^m(-\sin) > 0, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$

であるから (12) 式の右辺は正（有限）であり，したがって左辺も正（有限）でなければならない．したがってもちろん，$k^2R^2 = 2$ ではあり得ない．もし $k^2R^2 < 2$ ならば，$a < 1$ であり，この時，$m \geqq 1$ に対して

$P_a{}^m(\sin\theta) < 0,\ -\pi/2 < \theta < \pi/2 \qquad (a < 1,\ m \geqq 1)$

となるので，式 (12) の左辺は負となってしまう．即ち

$k^2R^2<2$ ではあり得ず，結局，式 (12) の根は $k^2R^2-2>0$ の範囲にしか存在しない．$P_a{}^m(\sin\theta)$ の $-\pi/2<\theta<\pi/2$ における最大の零点を $\theta_a{}^m$ とすると，

$$\theta_a{}^{m+1}<\theta_a{}^m$$

であり，$P_a{}^m(\sin\theta)$ の二番目の零点は $\theta_a{}^{m+1}$ よりも小さく，かつ

$$\mathrm{sign}\{P_a{}^m(\sin\theta)\}=(-1)^m,\quad \theta_a{}^m<\theta<\pi/2$$

であるから式 (12) の左辺の関数は $\theta_a{}^2\leqq\theta\leqq\theta_a{}^1$ において零から正無限大までの値を採る．即ち，

$$f(\theta)=\{1/(k^2R^2-2)\}P_a{}^2(\sin\theta)/P_a{}^1(\sin\theta),$$

$\theta\to\theta_a{}^2$ の時 $f(\theta)\to0$,

$\theta\to\theta_a{}^1$ の時 $f(\theta)\to\infty$,

$\theta_a{}^2<\theta<\theta_a{}^1$ の時 $f(\theta)>0$,

したがって，$\theta_a{}^2<\Theta<\theta_a{}^1$ を満たす a の領域（即ちこの不等式を満たす k^2 の領域）に必ず根が存在する．これが最小根であり，この最小根に対する解を基底状態のモドンという．k^2 が大きくなる（即ち a が大きくなる）と $P_a{}^m(\sin\theta)$ の零点は $\pi/2$ へ近づいて行くから，Θ が $P_a{}^2(\sin\theta)$ の二番目の零点と $P_a{}^1(\sin\theta)$ の二番目の零点の間に来るような k^2 の領域が存在する．そしてこの領域にも根が存在し，これが二番目に小さい根となる．以下同様に考えて，代数方程式 (12) は，与えられた p^2 と Θ に対して可算無限個の根を持つことが分かる．以下において，基底状態の西進モドンを考えるが，上に述べたように基底状態に対しては，

$$\theta_a{}^2<\Theta<\theta_a{}^1 \tag{13}$$

であり，西進モドン ($\omega<0$) に対しては，式 (10) より，

$$\Lambda^2-p^2>0 \tag{14}$$

となる．

4. Arnol'd 不変量 L[ϕ]

モドン解 Ψ に加わった擾乱を ϕ とすると，渦位方程式（1）は

$$(\partial/\partial t)\ (Q+q)+J(\Psi+\phi,\ Q+q)=0,$$

$$q=\Delta\phi-\Lambda^2\phi$$

となるが，Ψ が定常解であることを考慮し，かつ線形化すれば

$$\partial q/\partial t+J(\Psi,\ q)+J(\phi,\ Q)=0$$

となる．Ψ が Q の関数であることを考えると

$$J(\Psi,\ q)=(d\Psi/dQ)J(Q,q)=J(Q,(d\Psi/dQ)q)$$
$$=-J((d\Psi/dq)q,\ Q)$$

となるから，擾乱 ϕ の運動方程式は

$$\partial q/\partial t+J(\phi-(q\Psi/dQ)q,\ Q)=0 \tag{15}$$

となる．ただしここで式（6）及び式（7）より

$$d\Psi/dQ=-(\Lambda^2+k^2)\qquad \pi/2\geqq\theta>\Theta, \tag{16}$$

$$d\Psi/dQ=-1/(\Lambda^2-p^2)\qquad \Theta>\theta\geqq-\pi/2 \tag{17}$$

である．式 (15) に$\phi-(d\Psi/dQ)q$ を掛けて全領域で積分すると

$$\textstyle\iint d\lambda\ d\sin\theta(\phi-(d\Psi/dQ)q)\partial q/\partial t$$
$$\textstyle+\iint d\lambda\ d\sin\theta(1/2)J(\{\phi-(d\Psi/dQ)q\}^2,\ Q)=0$$

となる．ここで $\phi-(d\Psi/dQ)q$ は $\theta=\Theta$ において不連続であるが，$\theta=\Theta$ が Q の等値線であることよりこの式の第二項は零となり，結局，上式より次の保存則を得ることができる．

$$dL[\phi]/dt=0,$$

$$\textstyle L[\phi]=\iint d\lambda\, d\sin\theta(d\Psi/dQ)\ (q^2/2)$$
$$\textstyle+\iint d\lambda d\sin\theta(-\phi q/2). \tag{18}$$

この式 (18) の第二項を E[ϕ] と置くと

$$\textstyle E[\phi]=\iint d\lambda\ d\sin\theta(-\phi q/2)>0$$

であり，これは擾乱 ϕ のエネルギーである．式 (18) の L[ϕ] が以下の議論の鍵となる Arnol'd 不変量である．良く知られているように（例えば，Benzi *et al.*, 1982), L[ϕ] が定符号ならば，基本状態 Ψ は安定となる．

5. 束縛 E[$\phi(\tau)$]=1 の下での L[ϕ] の最大値

西進モドンを考えているのだから，式 (14) 及び式 (16), (17) より，

$$d\Psi/dQ<0\qquad \pi/2\geqq\theta\geqq-\pi/2$$

であり，かつ，擾乱の空間的規模は球の大円の円周の長さを越えることはできないが，小さな規模に関しては限りがないから，

$$E[\phi(\tau)]=1,\ \phi(\tau)\ \text{はある時刻}\ t=\tau\ \text{での}\ \phi\ \text{の値} \tag{19}$$

という規格化条件の下で L[ϕ]=L[$\phi(\tau)$] は上有界となり最大値を持つ．条件 E[$\phi(\tau)$]=1 の下で L[$\phi(\tau)$] を最大にする問題は，この条件 (19) なしに

$$L[\phi(\tau)]+K\{E[\phi(\tau)]-1\},\qquad K\ \text{はラグランジ未定定数} \tag{20}$$

を最大にする問題に等価である．したがって，L[$\phi(\tau)$] を最大にする ϕ を Φ とすると任意の擾乱 η に対して

$$(d/de)\ [L[\Phi(\tau)+e\eta(\tau)]+\{KE[\Phi(\tau)+e\eta(\tau)]$$
$$-1\}]_{e=0}=0 \tag{21}$$

であるが，式 (18) 及びこの式より

$$\Delta\Phi(\tau)-\Lambda^2\Phi(\tau)-(1-K)\ (dQ/d\Psi)\Phi(\tau)=0 \tag{22}$$

となる．式 (22) は K を固有値とする固有値方程式である．この時 L[ϕ] の最大値 L[$\Phi(\tau)$] は，式 (18) 及び式 (22) より

$$\textstyle L[\Phi(\tau)]=K\iint d\lambda\ d\sin\theta\{-\Phi(\Delta-\Lambda^2)\Phi/2\}$$
$$=KE[\Phi]=K \tag{23}$$

となるが，擾乱 ϕ は $E[\phi(\Delta(\tau)]=1$ という条件の他に，もちろん，運動方程式も満たさねばならないから，

$K \geqq$ 真の最大値 $\geqq L[\phi]$

となる．したがって，もし方程式 (22) の固有値Kが負であれば $L[\phi]$ は負定符号となり，モドン解 Ψ は安定となる．今，Ψ が不安定であると仮定する．この時，方程式 (22) は非負の固有値を持たねばならず，$\Phi(\tau)$ は非負固有値Kに対する固有関数となる．

6. Φ の存在可能モード

方程式 (22) を書き直すと

$$\Delta\Phi_{in}+\underline{k}^2\Phi_{in}=0 \qquad \pi/2\geqq\theta>\Theta \qquad (24)$$

$$\Delta\Phi_{ex}-\underline{p}^2\Phi_{ex}=0 \qquad \Theta>\theta\geqq-\pi/2 \qquad (25)$$

となる．ただし

$$\underline{k}^2=k^2-K(\Lambda^2+k^2), \quad \underline{p}^2=p^2+K(\Lambda^2-p^2) \qquad (26)$$

である．Kは非負と仮定されているから，式 (14) より $\underline{p}^2$ は正となる．$\theta=\Theta$ において $\Phi(\tau)$ は滑らかに繋がらねばならないから，この時，$\underline{k}^2$ も正となる．

$$k^2\geqq\underline{k}^2>0, \quad \underline{p}^2\geqq p^2>0. \qquad (27)$$

$\Phi(\tau)$ は方程式 (22) の，固有値Kに対する固有関数であるが，Φ は $\pm\pi/2$ において有限であることを考えると式 (24) 及び式 (25) より

$$\Phi_{in}(\tau)=\Sigma_m(A^m{}_{in}\cos m\lambda+B^m{}_{in}\sin m\lambda)P_{\underline{a}}{}^m(\sin\theta) \qquad (28)$$

$$\Phi_{ex}(\tau)=\Sigma_m(A^m{}_{ex}\cos m\lambda+B^m{}_{ex}\sin m\lambda)P_{\underline{b}}{}^m(-\sin\theta) \qquad (29)$$

となる．ただしここで，$\underline{a}$ 及び $\underline{b}$ は

$$\underline{a}(\underline{a}+1)=\underline{k}^2R^2, \quad \underline{b}(\underline{b}+1)=-p^2R^2 \qquad (30)$$

で与えられる．ここで $\Phi(\tau)$ の $\theta=\Theta$ における一階微分までの連続性より次の境界条件が満足されなければならない．

$$\{1/P_{\underline{a}}{}^m(\sin\Theta)\}dP_{\underline{a}}{}^m(\sin\Theta)/d\theta =\{1/P_{\underline{b}}{}^m(-\sin\Theta)\}dP_{\underline{b}}{}^m(-\sin\Theta)/d\theta. \qquad (31)$$

ルジャンドル同伴関数の漸化式

$$dP_n{}^m(\pm\sin\theta)/d\theta=m\tan\theta\,P_n{}^m(\pm\sin\theta) \pm\{n(n+1)-m(m-1)\}\ P_n{}^{m-1}(\pm\sin\theta)$$

を使うと境界条件式 (31) は

$$\{\underline{a}(\underline{a}+1)-m(m-1)\}P_{\underline{a}}{}^{m-1}(\sin\Theta)/P_{\underline{a}}{}^m(\sin\Theta) =-\{\underline{b}(\underline{b}+1)-m(m-1)\} P_{\underline{b}}{}^{m-1}(-\sin\Theta)/P_{\underline{b}}{}^m(-\sin\Theta)$$

あるいは

$$\{\underline{k}^2R^2-m(m-1)\}P_{\underline{a}}{}^{m-1}(\sin\Theta)/P_{\underline{a}}{}^m(\sin\Theta) =\{\underline{p}^2R^2+m(m-1)\}P_{\underline{b}}{}^{m-1}(-\sin\Theta)/P_{\underline{b}}{}^m(-\sin\Theta) \qquad (32)$$

となる．一方，

$P_{\underline{b}}{}^m(-\sin\Theta)>0, \quad dP_{\underline{b}}{}^m(-\sin\Theta)/d\theta>0$

かつ，$\underline{a}(\underline{a}+1)<m(m-1)$ に対して

$|P_a{}^m(\sin\Theta)|>0, \quad d|P_a{}^m(\sin\Theta)|/d\theta<0$

であるから，$\underline{a}(\underline{a}+1)<m(m-1)$ となる m のモードは $\theta=\Theta$ において滑らかに繋がることができない．また，式 (32) の右辺が正であることを考えれば結局 $\underline{a}(\underline{a}+1)>m(m-1)$ の場合しか有り得ないことになる．この時，式 (32) より

$$P_{\underline{a}}{}^{m-1}(\sin\Theta)/P_{\underline{a}}{}^m(\sin\Theta)>0 \qquad (33)$$

となる．ところで，式 (11)，式 (27) 及び式 (30) より

$\underline{a}(\underline{a}+1)=R^2\underline{k}^2\leqq R^2k^2=a(a+1)$

であるから，$-\pi/2<\theta<\pi/2$ における $P_n{}^m(\sin\theta)$ の最大の零点を $\theta_n{}^m$ とすると

$\theta_{\underline{a}}{}^m\leqq\theta_a{}^m$

となる．今，基底状態のモドンを考えているのだから式 (13) より $\theta_a{}^2<\Theta<\theta_a{}^1$ であるが $\theta_{\underline{a}}{}^{m+1}<\theta_{\underline{a}}{}^m$ であることを考え合わせると

$\cdots<\theta_{\underline{a}}{}^4<\theta_{\underline{a}}{}^3<\theta_{\underline{a}}{}^2\leqq\theta_a{}^2<\Theta<\theta_a{}^1$

となる．一方，

$\mathrm{sign}\{P_{\underline{a}}{}^m(\sin\theta)\}=(-1)^m, \quad \theta_{\underline{a}}{}^m<\theta<\pi/2$

であるから

$P_{\underline{a}}{}^{m-1}(\sin\Theta)/P_{\underline{a}}{}^m(\sin\Theta)<0, \quad m\geqq3$

となり，故に境界条件式 (32) を満足するのは m=0, 1, 2 のモードだけとなる．

7. m=2 のモード

$\Phi(\tau)$ のモードで許されるのは m=0, 1, 2 のみであった．境界条件式 (32) はm=2 のモードに対しては

$$\{\underline{k}^2R^2-2\}P_{\underline{a}}{}^1(\sin\Theta)/P_{\underline{a}}{}^2(\sin\Theta) =\{\underline{p}^2R^2+2\}P_{\underline{b}}{}^1(-\sin\Theta)/P_{\underline{b}}{}^2(-\sin\theta) \qquad (34)$$

となり，一方，Ψ に対する境界条件式 (12) は

$$\{k^2R^2-2\}P_{\underline{a}}{}^1(\sin\Theta)/P_{\underline{a}}{}^2(\sin\Theta) =\{p^2R^2+2\}P_{\underline{b}}{}^1(-\sin\Theta)/P_{\underline{b}}{}^2(-\sin\Theta)$$

となる．したがって，式 (26)，式 (27) 及び式 (30) より m=2 に対して $K\geqq0$ の範囲においては，$\underline{a}=a$, $\underline{b}=b$ となり，K=0 が唯一の固有値となる．

もし m=2 ならば K=0 即ち $\underline{a}=a$, $\underline{b}=b$ ($\underline{k}=k$, $\underline{p}=p$). (35)

この時，式 (35) より $\Phi(\tau)$ の方程式 (22) は

$\underline{q}(\tau)=(dQ/d\Psi)\Phi(\tau)$

ただし $q(\tau)=\Delta\Phi(\tau)-\Lambda^2\Phi(\tau)$ (36)

となり，時刻 $t=\tau$ での Φ の線形化された運動方程式は

$0=\partial \underline{q}(\tau)/\partial t+J(\Psi, \underline{q}(\tau))+J(\Phi(\tau), Q)$
$=\partial \underline{q}(\tau)/\partial t+J(\Psi, (dQ/d\Psi)\Phi(\tau))$
$+(dQ/d\Psi)J(\Phi(\tau), \Psi)$
$=\partial \underline{q}(\tau)/\partial t+J(\Psi, (dQ/d\Psi)\Phi(\tau))$
$+J((dQ/d\Psi)\Phi(\tau), \Psi)$
$=\partial \underline{q}(\tau)/\partial t$

となる．式 (37) は $\Psi+\Phi$ が定常状態であることを意味し，したがってこの擾乱は安定性の議論から除外できる．ゆえに，不安定擾乱は m=0, 1 のモードのみを含み，固有値Kは正となる．

8. m=0 のモード

擾乱 ϕ の線形化された運動方程式 (15) を積分することにより

$(d/dt)\iint d\lambda\, d\sin\theta\, \phi=0$

となるが，成長する擾乱に対しては

$$\iint d\lambda\, d\sin\theta\, \phi=0 \tag{38}$$

となる． m=0 のモードからなる擾乱 $\Phi(\tau)$ を式 (38) に代入し，式 (24) 及び式 (25) を使えば

$0=\iint_{r<a} d\lambda\, d\sin \Phi_{in}(\tau)+\iint_{r>a} d\lambda\, d\sin\theta\Phi_{ex}(\tau)$
$=-(1/\underline{k}^2)\iint_{r<a} d\lambda\, d\sin\theta\Delta\Phi_{in}(\tau)$
$+(1/\underline{p}^2)\iint_{r>a} d\lambda\, d\sin\theta\Delta\Phi_{ex}(\tau)$
$=-(1/\underline{k}^2)A^0{}_{in}\iint_{r<a} d\lambda\, d\sin\theta\, \Delta P_{\underline{a}}{}^0(\sin\theta)$
$+(1/\underline{p}^2)A^0{}_{ex}\iint_{r>a} d\lambda\, d\sin\theta\, \Delta P_{\underline{b}}{}^0(-\sin\theta)$
$=\{(1/\underline{k}^2)+(1/\underline{p}^2)\}2\pi(1/\cos^2\Theta)A^0{}_{ex}dP_{\underline{b}}{}^0(-\sin\Theta)/d\theta$

となるが，この式は $A^0{}_{in}=A^0{}_{ex}=0$ であることを意味し，ゆえに，m=0 のモードは存在しないことになる．

9. m=1 のモード

最後に m=1 のモードからなる擾乱

$\Phi_{in}(\tau)=(A^1{}_{in}\cos\lambda+B^1{}_{in}\sin\lambda)P_{\underline{a}}{}^1(\sin\theta)$

$\Phi_{ex}(\tau)=(A^1{}_{ex}\cos\lambda+B^1{}_{ex}\sin\lambda)P_{\underline{b}}{}^1(-\sin\theta)$

あるいは簡単に

$$\Phi(\tau)=(A^1\cos\lambda+B^1\sin\lambda)P^1 \tag{39}$$

を考える．式 (22) を使うと，時刻 $t=\tau$ での，Φ の線形化された運動方程式は

$0=\partial q(\tau)/\partial t+J(\Psi, \underline{q}(\tau))+J(\Phi(\tau), Q)$
$=\partial q(\tau)/\partial t+(1-K)J(\Psi, (dQ/d\Psi)\Phi(\tau))$
$+(dQ/d\Psi)J(\Phi(\tau), \Psi)$
$$=\partial q(\tau)/\partial t-K(dQ/d\Psi)J(\Psi, \Phi(\tau)) \tag{40}$$

となる．式 (39) を式 (40) に代入して，式 (8) 及び式 (9) を使うと，時刻 $t=\tau$ での q の時間微分は

$\partial q(\tau)/\partial t=-(K/R^2)B^1(d\Psi^M/d\sin\theta)P^1\cos\lambda$
$+(K/R^2)A^1(d\Psi^M/d\sin\theta)P^1\sin\lambda$
$+\{\cos 2\lambda, \sin 2\lambda$ に比例する項$\}$
$+\{\lambda$ に依存しない項$\}$ (41)

で与えられる．式 (41) に $A^1\cos\lambda+B^1\sin\lambda$ を掛けて λ について積分すれば

時刻 $t=\tau$ において

$$(\partial/\partial t)\iint d\lambda(A^1\cos\lambda+B^1\sin\lambda)q=0 \tag{42}$$

となる．時刻 $t=\tau$ を，成長するモードは十分に成長し，減衰するモードは十分に減衰している時刻に選べば，式 (42) は

$$\iint d\lambda(A^1\cos\lambda+B^1\sin\lambda)\underline{q}(\tau)=0 \tag{43}$$

を意味する．式 (22) 及び式 (39) を使うと式 (43) は

$$0=(1-K)\pi\{(A^1)^2+(B^1)^2\}(dQ/d\Psi)P^1 \tag{44}$$

となる．式 (26) 及び式 (27) より $1-K>0$ であるから，式 (44) は $A^1=B^1=0$ であることを意味する．ゆえに，m=1 のモードも存在せず，モドン解 Ψ は線形安定となる．

10. 結　語

モドンによって大気ブロッキング現象を考えようとすることの第一の理由は，モドンとブロッキングとの形態的類似である．モドンが非強制非散逸系の解であることや，現実の大気では孤立化条件が満たされにくいことなどを考えると，モドンを直接的に大気ブロッキング現象のモデルと考えることには難点があるが，一つの足がかりとしての有効性はあるように見える．運動方程式の解は安定であって初めて解としての意味を持つのだから，兎に角モドンを使うのであれば，先ずその安定性が示されねばならないが，β 平面上の基底状態の西進モドンの線形安定性については Laedke & Spatschek (1986) の証明が良く知られている．

ここでは Laedke & Spatschek (1986) の方法を適用することにより Tribbia (1984) と Verkley (1984) によって提出された球面上のモドンの内，基底状態の西進モドンの線形安定性を示した．西進モドンに対しては $d\Psi/dQ<0$ であるから $E[\phi]=1$ と言う条件の下に式 (18) の $L[\phi]$ は上有界となり，このことより $L[\phi]$ が負定符号であることが導かれ安定性が示された．β 平面上においてと同様に，球面上においても，ここでの証明は西進モドンに対してのみ有効である．なぜならば，東進モドンに対しては $d\Psi/dQ$ の符号がモドン内領域と外領域で異なるため，$L[\phi]$ の上有界性も下有界性も主張できなくなるからである．球面上のモドンには上記のものの他に Verkley (1987) や Verkley (1990) によって

提出されたものもあるが，これらの安定性も近い将来に同じような方法で示されるのではないかと思う．

参考文献

Andrews, D., 1984 On the existence of nonzonal flows satisfying sufficient conditions for stability. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., 28, 243-256.

Benzi, R., S. Stefano, A. Vulpiani and E. Salusti, 1982: On nonlinear hydrodynamic stability of planetary vortices. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 20, 293-306.

Butchart, N., K. Haines and J.C. Marshall, 1989: A theoretical and diagnostic study of solitary waves and atmospheric blocking. J. Atmos. Sci., 46, 2063-2078.

Carnevale, G.F. and T.G. Shepherd, 1990: On the interpretation of Andrews' theorem. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., 51, 1-17.

Chern, S. and J.E. Marsden, 1990: A note on symmetry and stability for fluid flows. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., 51, 19-26.

Haines, K. and J.C. Marshall, 1987: Eddy forced coherent structures as a prototype of atmospheric blocking. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 113, 681-704.

Laedke, E.W. and K.H. Spatschek, 1986: Two dimensional drift vortices and their stability. Phys. Fluids, 29, 133-142.

Larichev, V.D. and G.M. Reznik, 1976: Two dimensional Rossby soliton: An exact solution. Rep. USSR Acad. Sci., 231, 1007-1079.

McWilliams, J.C., 1984: An application of equivalent modons to atmospheric blocking. Dyn. Atmos. Oceans, 5, 43-66.

Pierrehumbert, R.T. and P. Malguzzi, 1984: Forced cohernt structures and local multiple equilibria in a barotropic atmosphere. J. Atmos. Sci., 41, 246-257.

Tribbia, J.J., 1984: Modons in spherical geometry. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., 30, 133-168.

Verkley, W.T.M., 1984: The construction of barotropic modons on a sphere. J. Atmos. Sci., 41, 2492-2504.

Verkley, W.T.M., 1987: Stationary barotropic modons in westerly background flows. J. Atmos. Sci., 44, 2383-2398.

———, 1990: Modons with uniform absolute vorticity. J. Atmos. Sci. 47, 727-745.

国際学術研究集会1992年度後期への出席補助金受領候補者の募集のお知らせ

国際学術交流事業（天気32巻5号参照）の一環として，国際学術研究集会への出席の旅費もしくは滞在費の補助を下記により行いますので，希望者は期日までに応募願います．

記

1. **対象の集会**

   1992年12月1日～1993年5月31日

   の期間外国で開かれる国際学術研究集会

2. **応募資格**

   日本気象学会会員で国際学術研究集会に出席し論文の発表もしくは議事の進行に携わる予定のもの．

3. **募集人員**

   若干名

4. **補助金額**

   アメリカ・ヨーロッパ地域　15万円

   その他の地域　10万円

5. **応募手続**

   所定の申請書類（日本気象会学事務局備付）を期日までに国際学術交流委員会（〒100 東京都千代田区大手町 1-3-4　気象庁内日本気象学会気付）に提出する．大学院生は指導教官の推薦状を併せて提出する．

   期日：1992年8月31日

6. **補助金受領者の選考・義務**

   当該集会終了後30日以内に委員会に報告書を提出する．