気象談話室

カオスとロレンツさん*

小 倉 義 光**

1. ロレンツさんの京都賞受賞

あれは1年半ほど前のことだったろうか．長年の友人の松本誠一さんと雑談をしているとき，彼が「1991年度の京都賞受賞の候補者を推薦することになっているのだけれど，誰がいい？」と私に尋ねた．京都賞といえば，ノーベル賞に匹敵しようという意気込みで設けられた基礎科学全般を含む大きな賞である．私は即座に，それはもうロレンツさんが一番いいと答え，松本さんもそれはいい考えだと賛成した．偶然にも受賞選考委員会の中にも，同じ考えの方々が多かったらしく，めでたくロレンツさんの受賞となった．

気象を学ぶ人にとっては，ロレンツさんの名はおなじみである．1967年の大気大循環の本はバイブルのように愛読されたし，有効位置エネルギー（available potential energy）という，大気の運動のエネルギー論では最も基本的な概念を導入している．そして今回の受賞の対象となったのが決定論的カオスの研究である．選考理由書によれば，それは「アイザック・ニュートン卿以来，人類の自然観を最も劇的に変えた原理の一つ」である．そのきっかけは1963年に気象学の雑誌に掲載された，僅か12ページの論文だった(註1)．その論文の意味するところは誠に大きく深く，たちまち気象学の枠を越え，「基礎科学の広い領域に抜本的な影響」を与えた．私の個人的な感触でも，ロレンツさんほど他の科学の分野の人から尊敬されている気象学者はいない．

ロレンツさんは1917年米国のコネチカット州で生れ，ハーバード大学で数学の修士号，MIT で気象学の修士号を受けた．戦時中米国陸軍で天気予報官を務めたこともあって，さらに気象学を専攻，1948年に MIT の博士号を受けた．以後 MIT にとどまり，現在はそこの名誉教授である．

2. 決定論とカオス

何がそんな凄い発見だったのか．17世紀ニュートンは力学の三原則を確立した．かつてケプラーなどが経験的に観測で決めた火星など惑星の運動が，ニュートンの力学の法則で簡単に説明できた話は有名である．

ニュートン力学の重要な点は，それが決定論の模範だということである．一般的に，ある時刻の情報（初期値）から，次の時刻の情報が決定されることを，決定論的であるという．たとえば物体に加わる力が万有引力のように定められており，初期値がわかっていれば，その物体の挙動は未来永遠まで知ることができる．これが決定論である．

ニュートン後約100年，ラプラスはさらに押し進めた自然観をたてている．“宇宙の現在の状態は過去の状態の結果であり，未来の状態の原因である．もし自然の中のすべての力を理解し，自然を構成するすべての物体のある瞬間における状況を完全に知り，これを数学的に処理する巨大な知性が存在すれば，この知性にとって何も不確かなものはない．未来は過去と同様に明白である．”

だから身の囲りの現象が不規則で予測し難いのは，多くの事柄が複雑に関係しているからだろうと思われていた．しかしロレンツさんが教えてくれたことは，そうではないのだ，簡単な法則に従っても，複雑で不規則な現象が起こるのだということである．これを逆にいえば，混沌とみられる中にも秩序があるということである．

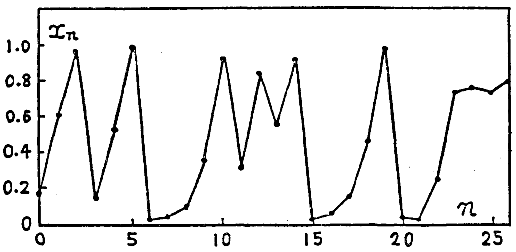
例をあげた方が判り易い．人口問題を考えよう．簡単のため人口の増し方は人口自身に比例するとする．平成 n 年の人口を y_n とし，次の年の人口を y_{n+1} とすると，y_{n+1} は

$$y_{n+1}=ay_n$$

（註1） Lorenz, E.N., 1963: Deterministic non-periodic flow. J. Atmos Sci., **20**, 130-141.

* Chaos and Ed. Lorenz.

** Yoshimitsu Ogura，イリノイ大学名誉教授．



第1図　カオスの例．横軸は時間，縦軸は変数 x_n の値．（戸田，1991）

と表わされる．比例定数 a が人口増加率である．

しかし，人口が増え過ぎると，いろいろの原因で増加率が低下するかも知れない．いま人口の増加率 a が人口 y の一次関数で減少するとして，その係数を b とすれば，a は $a(1-by)$ で置き換えなければならない．それで上式は

$$y_{n+1}=ay_n(1-by_n)$$

となる．この両辺に b をかけ，by_n を x_n と書くと，平成 n 年の人口 x_n と次の年の人口 x_{n+1} の関係は

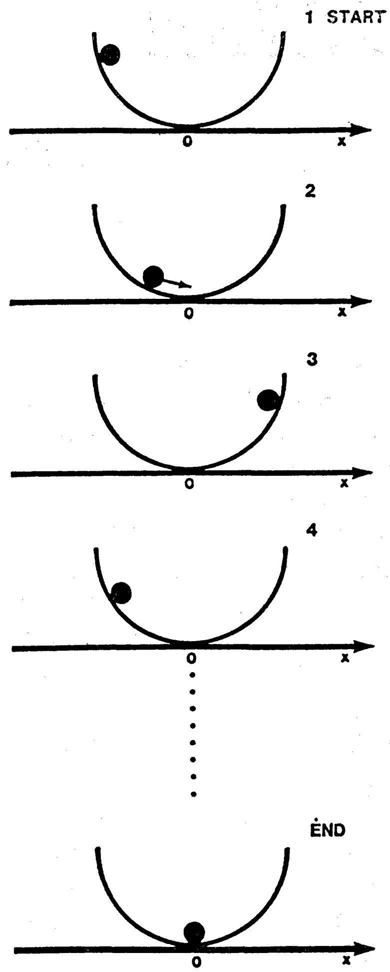
$$x_{n+1}=ax_n(1-x_n) \qquad (1)$$

と書ける．これが人口の動態を決める法則を数式で表わしたものである．この式の重要な点は，それが非線型方程式であることだが，それはともかく，ある年の人口 x_0 を与えれば，与えられた a について，翌年，翌々年と順次に計算して永遠の未来までの人口が計算される．

それで $a=4$ ととり，初期値として $x_0=0.1837720$ として，パソコンで計算した結果が第1図である．人口は年々なんと不思議に変動していることか．一定の数に落ち着くことがないのはもちろん，ある周期で規則正しく繰り返すということもない．もし，この図だけ示してこれが人口の年々変化だといえば，なるほど人口というものは多くの要素が，たとえば食糧問題から女性の社会進出問題までが，複雑にからみ合っているから，不規則な予測し難い変動をするのだな，と思ってしまう．ところが実は簡単な式（1）の法則に従っていたのである．このように，決定論に従うが，不規則で乱雑な挙動を示す場合，これを決定論的カオスという．カオスはギリシャ語で混沌という意味だそうである．

3. 変なアトラクター

上の例で示したように，ある規則に従って，既知の初期の状態から出発して，時間と共に変化していく系を力学系ということにする．一般的には，その規則は数式で

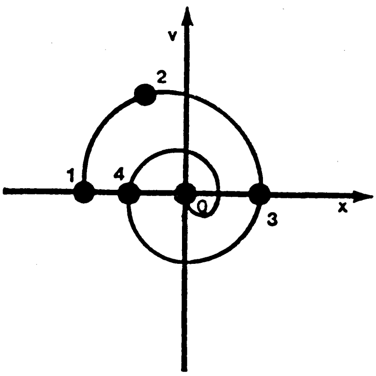


第2図　曲面に沿ってころがる球の挙動．

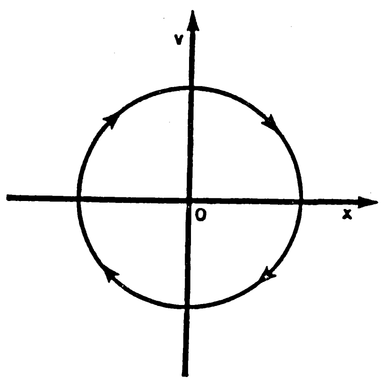
表わされる．上に述べた（1）式がそうであるし，ときには微分方程式で表現されることもある．

簡単な力学系の例が第2図に示してある．水平な板の上に置かれた曲面に球をおいて，時刻0で手を放す．球は曲面に沿って往復運動を繰り返すが，やがて球と曲面の間の摩擦のため，点0で静止してしまう．

この過程における球の状態は，球の位置（x）と球の速度（v）という二つの変数で完全に記述される．それで第3図に示したように，横軸に x，縦軸に v をとり，初期の状態から始まって，時間を追って球の状態を表わす点をプロットする．その点を結んだのが状態空間（あるいは相空間）における軌道である．軌道を辿っていけば，球の全生涯の状態がわかる．今の場合，軌道はらせ



第3図　物理空間における第2図の球の挙動に対応する状態空間内の軌道.



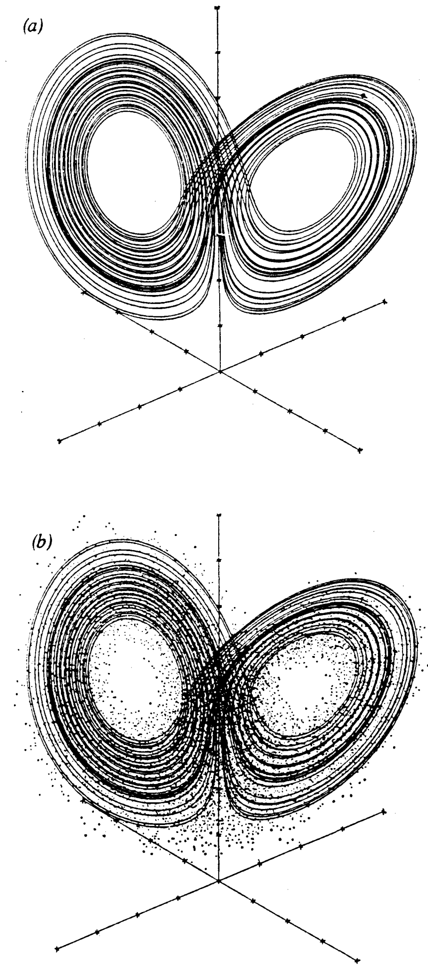
第4図　アトラクターの一つであるリミット・サイクル.

ん状を描いて原点0に接近していく.

ここで重要なことは，今考えている力学系では第2図の実空間で曲面のどの点から球を放しても，やがては0点に落ち着くこと，すなわち第3図の状態空間内のどの点から出発しても，結局は軌道は0点に限りなく近く引きつけられていくということである．その意味で，この状態空間の中の0点のことをアトラクター（attractor）という.

力学系のアトラクターとしては，これ以外にもいろいろある．上記の次に簡単なのはリミット・サイクルといわれているものである．理想的な振子時計の振子の運動のように，ある周期で規則正しく繰り返す変動である．その運動を状態空間内で描いた軌道が第4図である．振子をどう動かし始めても，軌道はやがては，この円に乗るようになる.

ロレンツさんが発見したことは，ある力学系は第3図



第5図　(a) ロレンツ・モデルの変なアトラクター．(b) 変なアトラクターを持つ力学系は初期値に敏感であることを示す図 (Tsonis, 1989).

や第4図とは全く違うアトラクターを持つということだった．彼は簡単な流体の力学系として，二次元のベナール・レイリー対流系をとった．この対流は温度と流線関数で規定される．それをフーリエ級数で展開し，流体力学と熱力学の方程式に代入した後，思いきって三つの項（成分）だけを残す．つまり対流の状態を三つの変数だけで表わす．一つの変数は温度の状態，他の二つの変数は流れの状態を表わす．時間と共に三つの変数の値がどう変化していくかという規則は，元の方程式できちんと与えられている．すなわち決定論に従う系である.

今度は変数が三つなので，第5図aのように，それぞ

れの変数の値を表わす三次元の座標軸をとる．どの時刻でも，対流の状態はこの三次元の状態空間の一点で表現できる．その点が状態空間の中を動き回って描く軌道が，対流の状態の時間変化に対応する．

第5図aが軌道の一例である．二枚のチョウチョの羽根かLPのレコードを，ななめに向い合わせたように見える部分を，対流の状態を表わす点は，あちらに行ったり，こちらに来たりする．一方の羽根を何回まわったら他方に移るという規則性はなく，いかにも気まぐれに不意に他方へ飛び移る．しかも元の軌道には戻らない．このように軌道が何度も近くに戻ってくる場合，これを変な(strange)アトラクターという，第5図の場合には，二つの変なアトラクターがある．

対流の状態を記述する変数は，微分方程式に従って時間変化をしていた．ところが，その挙動がいかにも不規則に見えることは，第1図の場合と同じである．ロレンツさんがこの研究結果をまとめて発表した1963年の論文の題名は「決定論的な非周期的な流れ」である．後に続く決定論的カオスの理論の本質を表わすものだった．第1図に示したカオスは，ロレンツ・モデルよりもっと簡単なカオス系を求めて，1974年にメイという数学者が発表したものである．

4. カオスと天気予報

変なアトラクターを持つ力学系の重要な特性は，初期の状態に敏感なことである．同じ力学系について，初期値をほんの少し変えて二つの実験を行ってみる．すると，時間が経つにつれて二つの実験結果はどんどん違ってきて，やがては全く似た所がない結果（状態）になってしまうことをいう．

このことを前節で述べたロレンツ・モデルについて示そう(註2)．第5図aをよく見ると，小さな黒丸が書いてある．これは実は，ほんの少し初期値が違う10,000個の初期の状態を表わしている．相互の差があまり小さいので，10,000個の点がひとかたまりになってしまった丸である．青梅マラソンやニューヨーク・マラソンで10,000人の参加者があり，ヘリコプターで見たら出発点で黒々とかたまっているようなものだ．号砲一発ランナーは一斉に三次元状態空間の中を動きだす．ある時間経った時，すべてのランナーの位置をスナップ・ショットしたのが第5図bである．初期値がちょっと違っただけで，これだけ状態が違ってしまったのである．

ロレンツさんはこの重大な事実を偶然発見した．彼は自分のモデルに，ある初期値を与えて，その時間的変化を計算した．それから検算のために〝同じ〟初期値を入力して計算を繰り返したところ，前と全く違う結果がでた．前の計算では流れは上を向き温度は高いという時刻に，今度は流れは下を向き温度は低いという具合だった．初めはコンピューターが壊われたのかと思ったが，そうではなかった．同じと思った初期値が実は違っていたのである．つまり最初の計算では0.506127という初期値であったのが，検算のときには0.506という初期値を入力していた．有効数字4桁目くらいの僅かな差は問題でないと思ったからである．ところが変なアトラクターを持つ力学系では，大きな違いを起こしたのである(註3)．

この研究にロレンツさんが使ったコンピューターは，今日でいえばパソコンのような小型だった．実は当時ロレンツさんのオフィスと廊下をへだてて私が，速度はガウス分布に従うという仮定の下では，等方性乱れのエネルギー・スペクトラムが負になるという意外な結果に悪戦苦闘していた．乱流理論のクロージャアの問題である．MITの計算センターには当時の最大最速のコンピューターの一つがあり，私はそれを使っていたが，それでもまだメモリーが足りない，計算速度がおそいなどとぼやいていたものだった．その数歩離れた所でロレンツさんが静かに革命的な仕事をしていたのである．

全くロレンツさんは静かな，ひかえ目な人である．でしゃばりとか，目立ちたがりとか，いばるとか，はったりとかの正反対の人である．委員会とか学会とかの役員にもならない．こう書くと孤高の哲人ということになるが，毎日顔を合わせているとそうでもない．こちらがトンチンカンなことをいうと，奥深く澄んだ瞳が，いたずらっぽい表情をする．ただ声が小さいのに早口で，しかも冗慢な多弁でなく表現が簡潔なので，初めは会話は楽でなかった．

ある力学系は初期値に敏感であるということは，天気予報にとって重大な意味を持つ．現在一週間くらい先までの天気予報に使われている数値予報モデルは，上記の対流についてのロレンツ・モデルより遙かに複雑だが，基本的には同じ非線型の流体力学方程式である．だから変なアトラクターを持っても不思議でない．気象あるいは気候現象のアトラクターについては，Nature や J.

（註2） 第2—5図は Tsonis, A.A., 1989: Chaos and unpredictability of weather. Weather, **44**, 258-263からの引用．

（註3） 第1図に示したケースも初期値に敏感であることを，パソコンを持っている方は自分で確かめて下さい．

Atmos. Sci. などに多くの論文が載っている．

ところで気象の観測には（実際問題として，どんな観測でも）誤差がつきまとう．数値予報モデルが変なアトラクターを持っているなら，〝真の〃値から少し違った観測データを入力すれば，将来全く違った大気の状態を予測してしまうことになる．

しかし，大気はカオスだ，だから天気予報はあたらないのだ，と短絡してしまうのは，半分くらいしか正しくない．ロレンツ・モデルでも初期値の有効数字4桁目の値の違いが，最初の桁の値に影響を及ぼすのには時間がかかる．数値予報モデルでも初期値の誤差が次第により大きい空間スケールを持つ運動を汚染していき，シノプティック・スケールの予測が意味のなくなる限界は，理論的に10日から14日くらい先までといわれている．しかしまだその限界には達していないから，数値予報モデル改善の余地は大いにある．

なお，カオスについては最近よい一般向け解説書が出版されている．たとえば戸田盛和著「カオス―混沌のなかの法則」(岩波書店，1991)，竹山協三著「カオス―自然の乱れ方」(裳華房，1991) など．第1図は戸田からの引用である．

情報 File

第25回国際水理学会会議開催案内／演題募集

主　催：第25回国際水理学会会議　国内組織委員会
土木学会

開催日：1993年8月30日（月）～9月3日（金）

会　場：京王プラザホテル（東京）
東京都新宿区西新宿 2-2-1
TEL 03-3344-0111（代表）

講　演：一般講演500題（予定）特別講演，セミナー等

論文投稿締切：1993年1月末

論文募集テーマ：

A．洪水と渇水

B．土石流と地滑り

C．高潮，津波および高波

D．環境汚染と安全管理

セミナー：「つくばセミナー；自然災害の軽減に向けて」

日　時：1993年9月6日（月）～7日（火）

会　場：研究交流センター（科学技術庁）
茨城県つくば市竹園 2-20-3

目　的：第25回国際水理学会会議が，「水理学を通して如何に“国際防災の10年”に貢献するか」を旗印として開催されるのを機に，防災工学の現状と課題について実務者向けのセミナーを開催する．発展途上国の若い技術者及び日本の防災担当者に総合的な知識を短期間で得る機会を提供して，生涯教育の一環として機能することを目的とする．

連絡先：第25回国際水理学会会議　事務局
〒160 東京都新宿区四谷一丁目無番地
㈳土木学会　気付
TEL 03-5814-5800　FAX 03-5814-5823