基本帯状流の方向へ伸びたモドンの線形安定性*

金　久　博　忠**

要　旨

渦位方程式の孤立波動解であるモドンは，大気ブロッキング現象との形態的類似の故に，それのモデルとしての是非が議論されている．数学的簡単さの為に普通には円形モドンが考えられているが，大気ブロッキングの多様性を考えれば円形以外のモドンも扱える事が望ましい．ここではβ平面上で基本帯状流の方向へ伸びたモドンの流線関数と渦位の関数関係を解析的に考察し，Boyd and Ma (1990) の f 平面上での楕円形モドンの数値計算と定性的に一致する結果を得た．更に得られた関数関係を使ってこのモドンが線形安定である事が分かった．

1．序

Larichev and Reznik (1976) は，β平面上の浅水渦位方程式（等価順圧渦位方程式）の解析解（厳密解）として，円形の定常（或は並進）孤立波動（以下，円形モドンと言う）を構成した．この円形モドンは，第1図に示す様に西風の基本帯状流中に在る時，北の高気圧と南の低気圧から成る双極構造を持つ．

一方，典型的な大気ブロッキングも第2図に示す様に偏西風中に在って，北の高気圧と南の低気圧から成る双極構造を持ち，第1図の円形モドンと大変良く似ている．

現実の大気ではモドンの孤立化条件が満たされ難い事が指摘されているが（例えば McWilliams 1980），一方，この形態的類似の故に円形モドンを大気ブロッキングのモデルの一つと考える事の是非が多くの研究者によって議論されている．（例えば Pierrehumbert and Malguzzi 1984；Haines and Marshall 1987；Butchart *et al.* 1989；Haines 1989）．

円形モドンを大気ブロッキングのモデルの一つと考え得る為には相空間に於けるこの解の安定多様体の次元が不安定多様体の次元よりも遙かに大きい事が必要となるが，β平面上の西風中の円形モドンの安定性に就いては Laedke and Spatschek (1986) の線形安定性の証明が良く知られている．

大気ブロッキング現象の多様性を考えれば円形以外のモドンも扱える事が望まれるが，（著者の知る限り）現在迄の所，円形以外の境界を持つモドンの解析解（厳密解）は知られていない．円形以外のモドンの数値的研究は Tanveer (1986) 或は Eydeland and Turkington (1988) などによって為されているが Boyd and Ma (1990) は f 平面上で，第3図に示す様な基本帯状流の方向へ伸びた楕円形モドンの流線関数と渦位の関係を数値的に計算した．

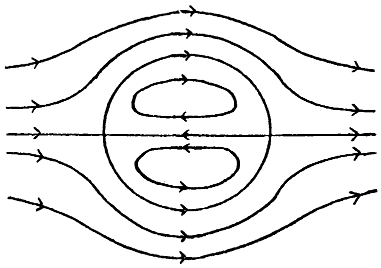
モドンは定常解であるから渦位は流線関数の関数となる．モドン境界の外側では，無限遠での境界条件（無限遠で基本帯状流に近づく）より渦位は流線関数の線形関数となる．円形モドンでは，モドン境界の内側でも渦位は流線関数の線形関数となるが，Boyd and Ma (1990) の数値計算によると，楕円形モドンでは，第4図に示す様にモドン境界の内側で線形関係からずれる．詳しく言うと，流線関数の絶対値が小さい時は円形の場合よりも小さな傾きでほぼ線形関係にあるが，流線関数の絶対値が大きくなると渦位の絶対値は指数関数的に減少する．

ここではβ平面上で基本帯状流の方向へ伸びたモドンを考える．円形からのずれを表す変数をεとして，εの一次のずれが$\varepsilon \cos 2\theta$となるものを考える．但し，θは基本帯状流の風下から測った方位角である．このモドンの渦位と流線関数の関係を解析的に考察

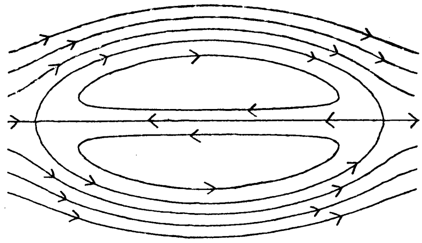
* On the linear stability of elongated modons.

** Hirotada Kanehisa, 気象研究所.

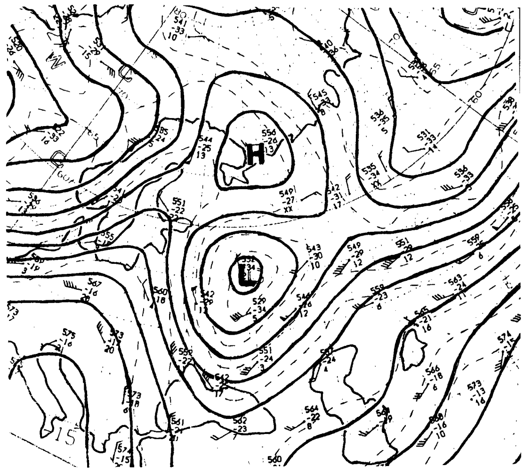
――1992年7月8日受領――
――1993年3月31日受理――



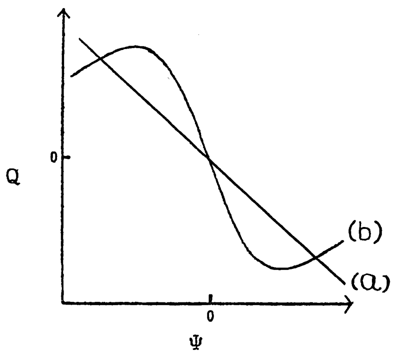
第1図　円形モドンの例



第3図　楕円形モドンの例



第2図　大気ブロッキングの例 500 hPa の等高線



第4図　渦位と流線関数の関係
(a)は円形モドン，
(b)は楕円形モドン

し，f平面上での Boyd and Ma (1990) の楕円形モドンの数値計算と定性的に一致する結果が得られる事を示す．更に，この渦位と流線関数との関係と Arnol'd 不変量を使って基本帯状流の方向へ伸びたモドンの線形安定性を示す．

第2節では円形モドンを簡単に復習し，第3節では基本帯状流の方向へ伸びたモドンの渦位と流線関数の関係を解析的に考察する．第4節では線形安定性の証明の鍵となる Arnol'd 不変量の導出を簡単に復習し，第5節では上に求めた渦位と流線関数の関係と Arnol'd 不変量を使って，このモドンの線形安定性を示す．

2．円形モドン

この節では β 平面上で静止流体中を西進（或は西風中に定常状態として存在）する円形モドンを簡単に復習する．基本方程式は β 平面上の等価順圧方程式である．

$\partial Q/\partial t+J(\psi,Q)=0,$

但し　$Q=(\Delta-\lambda)\psi+\beta y.$　　(2-1)

ここで，Δ はラプラシアン，$J(,)$ はヤコビアン，$\lambda^{1/2}$ はロスビイ変形半径の逆数，β はコリオリ因子の北向き勾配であり，ψ は流線関数，Q は渦位である．

静止流体中を速度Uで西進する孤立波動を考える．この孤立波動と共に動く座標系に移れば，定常状態となるから運動方程式（2-1）は次式となる．

$J(\Psi,Q)=0,$

但し　$\Psi=\psi-Uy,$

$Q=(\Delta-\lambda)\Psi+(\beta-\lambda U)y.$　　(2-2)

式(2-2)は渦位Qが流線関数 Ψ の関数である事を意味する．

$Q=F[\Psi]$.　　(2-3)

座標原点を中心とする半径 a の円が一つの流線となる孤立波動を考え，円の内側と外側で式(2-3)の関数形が次式で与えられるものを考える．

$Q=-(\lambda+k^2)\Psi,\quad r<a;$

$Q=-(\lambda-p^2)\Psi,\quad r>a.$　　(2-4)

ここで，k及びpは後に定められる定数である．式(2-4)は Ψ の2階偏微分方程式であるが，$r=a$ に於て Ψ が一定値(＝0)，Ψ の1階微分係数及びQが連続

と言う境界条件の下で解は次式で与えられる．

$$\Psi = R(r)\sin\theta, \tag{2-5}$$

但し，$r=(x^2+y^2)^{1/2}$, $\theta=\tan^{-1}(y/x)$,

$$R(r)=(p^2/k^2)\{\beta/(\lambda-p^2)\}\{r-aJ_1(kr)/J_1(ka)\},\ r<a,$$

$$R(r)=-\{\beta/(\lambda-p^2)\}\{r-aK_1(pr)/K_1(pa)\},\ r>a.$$

ここで，$p^2=\lambda-(\beta/U)$ であり，$J_n(z)$ 及び $K_n(z)$ はベッセル関数及び変形ベッセル関数である．定数 k は次式の根で与えられる．

$$\{1/(ka)\}\,J_2(ka)/J_1(ka)=-\{1/(pa)\}\,K_2(pa)/K_1(pa). \tag{2-6}$$

3．基本帯状流の方向へ伸びたモドン

この節では β 平面上で基本帯状流の方向へ伸びたモドンの渦位と流線関数の関係を考察する．先ずモドン境界の外側を考える．Q は Ψ の関数であるから

$$(\Delta-\lambda)\Psi_{ex}+(\beta-\lambda U)y=Q_{ex}=F_{ex}[\Psi_{ex}] \tag{3-1}$$

と書けるが，無限遠に於て流れが基本帯状流に近づく事より

$$F_{ex}[-Uy]=(\Delta-\lambda)(-Uy)+(\beta-\lambda U)y=\beta y$$

となり，従ってモドン境界の外側では $Q=F[\Psi]$ の関数形はモドン境界の形に関わらず次式で与えられる．

$$Q_{ex}=-(\beta/U)\Psi_{ex}=-(\lambda-p^2)\Psi_{ex}, \tag{3-2}$$

次にモドン境界の内側を考える．天下り的ではあるが $Q=F[\Psi]$ の関数形が次式で与えられるものを考える．

$$Q_{in}=-(\lambda+k^2+\varepsilon\alpha)\Psi_{in}\cdot\exp[-\varepsilon\{\gamma/(\lambda+k^2)\}\Psi^2_{in}]. \tag{3-3}$$

但し，α 及び γ は後に定められる定数である．$\varepsilon>0$ は円形からのずれを表すパラメタであり，$\varepsilon=0$ の時には式 (3-3) は円形モドンの式 (2-4) に一致し従ってモドン境界は円形となる．

$\gamma>0$ の時，式 (3-2) 及び式 (3-3) で指定された解が(モドン境界がどの様な形になるかは分からないが)実際に存在する事は付録に示される．

式 (3-2) 及び式 (3-3) で指定された解が，どの様なモドン境界を持つのかを見るために ε が微小の場合を考えると式 (3-3) は ε の1次迄の近似で次式となる．

$$Q_{in}=-(\lambda+k^2)\Psi_{in}-\varepsilon\alpha\Psi_{in}+\varepsilon\gamma\Psi_{in}{}^3+O(\varepsilon^2). \tag{3-4}$$

これも天下り的であるが，モドン境界が次式で与えられるものを考える．

$$r=a+\varepsilon(b+\cos2\theta)+O(\varepsilon^2)$$

但し $b>-a/\varepsilon$ は定数． (3-5)

以下に，実際に，ε の1次迄の近似で，式 (3-2) 及び式 (3-4) で指定された関数形を持つ解は，式 (3-5) で与えられる境界を持つ事（即ち，この境界に於て流線関数が1階微係数まで連続と言う条件を満足する事）が示される．

ε が微小であるので，流線関数を ε で次式の様に展開する．

$$\Psi=\Psi^{(0)}+\varepsilon\Psi^{(1)}+O(\varepsilon^2). \tag{3-6}$$

式 (3-6) を式 (3-2) 及び式 (3-4) に代入して，ε の零次の式を採ると，容易に分かる様に，$\Psi^{(0)}$ は第2節で求めた円形モドン解，式 (2-5) となる．ε の一次の式を採り，式 (2-5) を使うと，$\Psi^{(1)}$ に対する次の式が得られる．

$$(\Delta+k^2)\Psi_{in}{}^{(1)}=-\alpha\Psi^{(0)}+\gamma\Psi^{(0)3}$$
$$=-\{\alpha R(r)-(3/4)\gamma R(r)^3\}\sin\theta-(1/4)\gamma R(r)^3\sin3\theta, \tag{3-7}$$

$$(\Delta-p^2)\Psi_{ex}{}^{(1)}=0. \tag{3-8}$$

無限遠で $\Psi_{ex}{}^{(1)}$ が零となる事及び原点で $\Psi_{in}{}^{(1)}$ が有限値を採る事より，式 (3-7) 及び式 (3-8) の解は次式で与えられる．

$$\Psi_{in}{}^{(1)}=\Sigma_n\{A^n{}_{in}\cos n\theta+B^n{}_{in}\sin n\theta\}J_n(kr)+f(r)\sin\theta+g(r)\sin3\theta, \tag{3-9}$$

$$\Psi_{ex}{}^{(1)}=\Sigma_n\{A^n{}_{ex}\cos n\theta+B^n{}_{ex}\sin n\theta\}K_n(pr). \tag{3-10}$$

但し，f(r) 及び g(r) は次式の解である．

$$(\Delta+k^2)\{f(r)\sin\theta\}=-\{\alpha R(r)-(3/4)\gamma R(r)^3\}\sin\theta, \tag{3-11}$$

$$(\Delta+k^2)\{g(r)\sin3\theta\}=-(1/4)\gamma R(r)^3\sin3\theta. \tag{3-12}$$

モドン境界式 (3-5) に於て Ψ が一定値（＝0），Ψ の1階微分係数が連続と言う事より ε の1次迄の近似で，$\sin\theta$ 及び $\sin3\theta$ 以外の項は消えて，式 (3-9) 及び式 (3-10) は次式となる．

$$\Psi_{in}{}^{(1)}=\{B^1{}_{in}J_1(kr)+f(r)\}\sin\theta+\{B^3{}_{in}J_3(kr)+g(r)\}\sin3\theta, \tag{3-13}$$

$$\Psi_{ex}{}^{(1)}=B^1{}_{ex}K_1(pr)\sin\theta+B^3{}_{ex}K_3(pr)\sin3\theta. \tag{3-14}$$

$\Psi^{(0)}=R(r)\sin\theta$ の1階微分までの連続性に注意し，式 (3-13) 及び式 (3-14) に対して，モドン境界に於ける Ψ＝一定値＝0 の条件を，ε の1次迄の近似で書き下すと次式となる．

$\{b-(1/2)\}\ R'(a)+B^1{}_{in}J_1(ka)+f(a)=0,$

$\{b-(1/2)\}\ R'(a)+B^1{}_{ex}K_1(pa)=0,$ (3-15)

$(1/2)R'(a)+B^3{}_{in}J_3(ka)+g(a)=0,$

$(1/2)R'(a)+B^3{}_{ex}K_3(pa)=0.$ (3-16)

但し，' は1階微分を表す．一方，$Q^{(0)}$（従って $R(r)$ の2階微分）の連続性に注意すれば，Ψ の1階微分係数の連続性は，ε の1次迄の近似で次式となる．

$B^1{}_{in}kJ_1'(ka)+f'(a)=B^1{}_{ex}pK_1'(pa),$ (3-17)

$B^3{}_{in}kJ_3'(ka)+g'(a)=B^3{}_{ex}pK_3'(pa).$ (3-18)

式(3-15)，(3-16)，(3-17)及び(3-18)より $B^1{}_{in}$, $B^1{}_{ex}$, $B^3{}_{in}$ 及び $B^3{}_{ex}$ を消去すれば次式となる．

$$\{b-(1/2)\}\ R'(a)\ \{kJ_1'(ka)K_1(pa)-pK_1'(pa)J_1(ka)\}/K_1(pa)+\{f(a)kJ_1'(ka)-J_1(ka)f'(a)\}=0,$$

$$(1/2)R'(a)\ \{kJ_3'(ka)K_3(pa)-pK_3'(pa)J_3(ka)\}/K_3(pa)+\{g(a)kJ_3'(ka)-J_3(ka)g'(a)\}=0. \quad (3\text{-}19)$$

一方，式(3-11)及び式(3-12)に，各々，$J_1(kr)\sin\theta$ 及び $J_3(kr)\sin3\theta$ を掛けて $r<a$ で積分する事により，次式を得る．

$$a\{f(a)kJ_1'(ka)-J_1(ka)f'(a)\}=\int_{r<a}dr\ \{\alpha R(r)-(3\gamma/4)R(r)^3\}\ J_1(kr),$$

$$a\{g(a)kJ_3'(ka)-J_3(ka)g'(a)\}=\int_{r<a}dr(\gamma/4)R(r)^3J_3(kr). \quad (3\text{-}20)$$

式（3-19）及び式（3-20）より $f(r)$ と $g(r)$ を消去し，ベッセル関数及び変形ベッセル関数の漸化式，更に式（2-6）を使って次式を得る．

$$\{b-(1/2)\}\ (a/k)(k^2+p^2)J_2(ka)R'(a)+\int_{r<a}dr\ \{\alpha R(r)-(3\gamma/4)R(r)^3\}\ J_1(kr)=0,$$

$$(1/2)R'(a)\ \{kaJ_2(ka)K_3(pa)+paK_2(pa)J_3(ka)\}/K_3(pa)+\int_{r<a}dr(\gamma/4)R(r)^3J_3(kr)=0, \quad (3\text{-}21)$$

式（3-21）より定数 α 及び γ は次式で定められる．

$$\alpha\int_{r<a}drR(r)J_1(kr)=\{b-(1/2)\}\ R'(a)(a/k)(k^2+p^2)J_2(ka)+\gamma(3/4)\int_{r<a}drR(r)^3J_1(kr),$$

$$\gamma\int_{r<a}drR(r)^3J_3(kr)=-2R'(a)\ \{kaJ_2(ka)K_3(pa)+paK_2(pa)J_3(ka)\}/K_3(pk). \quad (3\text{-}22)$$

$r<a$ で $R(r)>0$ であり，$R'(a)<0$ であり，ka が $J_1(z)$ の最初の零点と $J_2(z)$ の最初の零点の間に在る事に注意すれば式（3-22）より次の事が分かる．

$$\gamma>0. \quad (3\text{-}23)$$

更に，定数 b を $\alpha>0$ となる様に選べば，第4図に示した Boyd and Ma (1990) の楕円形モドンの数値計算の結果と定性的に一致する．ε の1次迄の近似で，式（3-2）及び式（3-3）で指定された解が，式（3-5）のモドン境界に於て1階微分係数まで連続と言う境界条件を満たす為には定数 α と γ は式（3-22）を満足しなくてはならない．逆に定数 α と γ が式（3-22）で与えられるならば式（3-2）及び式（3-3）で指定された解は，式（3-5）のモドン境界を持つ．

式（3-3）及び式（3-5）は天下り的に与えたが，上の議論から分かる様に，式（3-3）の関数形に対して，モドン境界は（ε の一次迄の近似で）一意に式（3-5）に決まる．即ち，式（3-5）に他の項 $\sin\theta, \sin2\theta,\cdots\cdots$, $\cos\theta$, $\cos3\theta,\cdots\cdots$ が加われば境界条件を満足する事はできない．逆に，式(3-5)のモドン境界に対して，内部領域の関数形は（ε の一次迄の近似で）一意に式（3-3）に決まる．

付録に示されている様に，$\gamma>0$ の時，式（3-2）及び式（3-3）で指定された解は存在するが，モドン境界がどの様な形になるかは分からない．しかし，上に述べた様に，微小な ε に対しては，モドン境界は $\varepsilon\cos2\theta$ で基本帯状流の方向へ伸びた形となる．従って，モドン境界が基本帯状流の方向へ伸びた形になる ε の範囲が存在する事になる．言い換えると，ε が適当に小さければ，モドン境界は基本帯状流の方向へ伸びた形となる．

4．Arnol'd 不変量 $L[\phi]$

この節では安定性議論の鍵となる Arnol'd 不変量 $L[\phi]$ の導出される過程を簡単に復習する．モドン解 Ψ に加わった擾乱を ϕ とすると渦位方程式(2-1)は次式となる．

$$(\partial/\partial t)(Q+q)+J(\Psi+\phi,Q+q)=0,$$

$$但し\ q=\Delta\phi-\lambda\phi. \quad (4\text{-}1)$$

Ψ が定常解である事を考慮し，且つ線形化すれば式（4-1）は次式となる．

$$\partial q/\partial t+J(\Psi,q)+J(\phi,Q)=0. \quad (4\text{-}2)$$

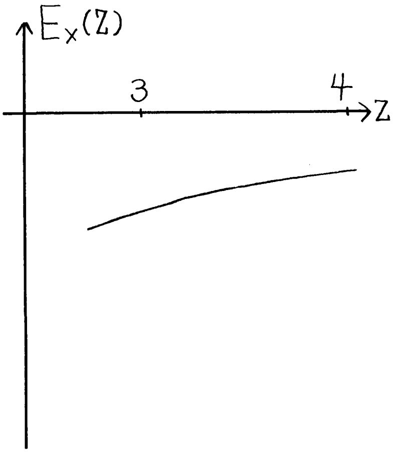
Ψ が Q の関数である事を考えると

$$J(\Psi,q)=(d\Psi/dQ)J(Q,q)=J(Q,(d\Psi/dQ)q)=-J((d\Psi/dq)q,Q)$$

となるから，擾乱 ϕ の運動方程式(4-2)は次の様に書き直せる．

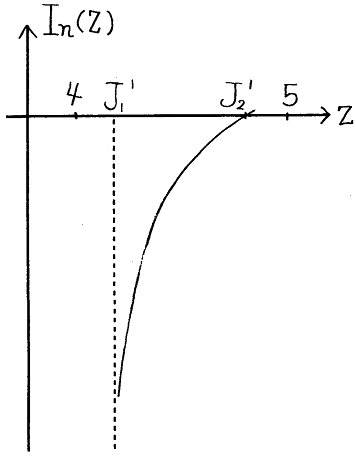
$$\partial q/\partial t+J(\phi-(d\Psi/dQ)q,Q)=0 \quad (4\text{-}3)$$

式（4-3）に $\phi-(d\Psi/dQ)q$ を掛けて全領域で積分して次式を得る．



第５図　$Ex(z)=-(1/z)K_2(z)/K_1(z)$ のグラフ

Z5-6



第６図　$In(z)=(1/z)J_2(z)/J_1(z)$ のグラフ

$$\iint dxdy(\phi-(d\Psi/dQ)q)\,\partial q/\partial t + \iint dxdy(1/2)J(\{\phi-(d\Psi/dQ)q\}^2, Q)=0. \quad (4\text{-}4)$$

ここで $\phi-(d\Psi/dQ)q$ はモドン境界に於て不連続であるがモドン境界がQの等値線である事よりこの式の第２項は零となり，結局，上式より次の保存則を得る事ができる．

$$dL[\phi]/dt=0,$$
$$L[\phi]=\iint dxdy(d\Psi/dQ)(q^2/2) + \iint dxdy(-\phi q/2). \quad (4\text{-}5)$$

式（4-5）の第２項を $E[\phi]$ と置くと

$$E[\phi]=\iint dxdy(-\phi q/2)>0$$

であり，これは擾乱 ϕ のエネルギーである．式(4-5)の $L[\phi]$ が以下の議論の鍵となる Arnol'd 不変量である．良く知られている様に（例えば Benzi *et al.*, 1982）$L[\phi]$ が定符号ならば，基本状態 Ψ は安定となる．

５．基本帯状流の方向へ伸びたモドンの線形安定性

この節では第３節で考察したモドンの線形安定性を示す．式（3-2）及び式（3-3）より $d\Psi/dQ$ は次式で与えられる．

$$d\Psi_{in}/dQ_{in} = -(\lambda+k^2+\varepsilon\alpha)^{-1}[1-\{2\varepsilon\gamma\Psi_{in}{}^2/(\lambda+k^2)\}]^{-1} \times\exp\{\varepsilon\gamma\Psi_{in}{}^2/(\lambda+k^2)\},$$
$$d\Psi_{ex}/dQ_{ex}=-(\lambda-p^2)^{-1}. \quad (5\text{-}1)$$

ε が適当に小さければ，第４節で考察した微小 ε の場合と解の様子は大きくは異ならない．即ちモドン内部は有界領域であり，Ψ_{in} は有界であるから

$$\varepsilon<\{(\lambda+k^2)/2\gamma M\},$$

但しMは $\Psi_{in}{}^2$ の最大値　(5-2)

であれば $1-\{2\varepsilon\gamma/(\lambda+k^2)\}\Psi_{in}{}^2>0$ となる．以下で，式(5-2)を満たす ε を，適当に小さな ε と呼ぶ．この時，式（5-1）を式（4-5）に代入して次の不等式を得る事ができる．

$$L[\phi]<-(\lambda+k^2+\varepsilon\alpha)^{-1}\iint_{in}dxdy(q^2/2) -(\lambda-p^2)^{-1}\iint_{ex}dxdy(q^2/2)+E[\phi]$$
$$<-\{\lambda+(k^2+\varepsilon\alpha)\}^{-1}\iint_{r<c}dxdy(q^2/2) -(\lambda-p^2)^{-1}\iint_{r>c}dxdy(q^2/2)+E[\phi]. \quad (5\text{-}3)$$

但し $c=a+\varepsilon(b+1)$ はモドン境界の外接円の半径である．ここで定数bを円形モドンの境界条件式（2-6）を満足する様に選ぶ．

$$\{1/(\kappa c)\}J_2(\kappa c)/J_1(\kappa c) = -\{1/(pc)\}K_2(pc)/K_1(pc), \quad (5\text{-}4)$$

但し　$\kappa=(k^2+\varepsilon\alpha)^{1/2}$.

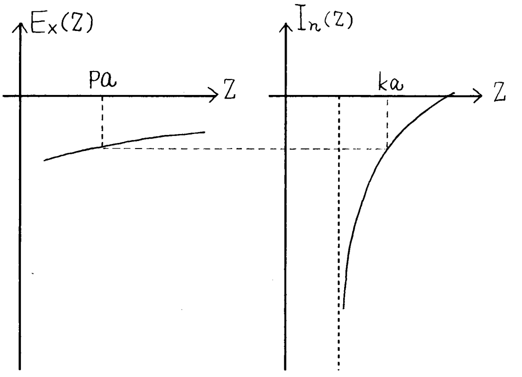
適当に小さな任意の ε に対して式(5-4)を成立させるbが実際に存在する事を以下に示す．先ず，

$Ex(z)=-(1/z)K_2(z)/K_1(z)$ 及び

$In(z)=(1/z)J_2(z)/J_1(z)$ と置く．$Ex(z)$ は第５図に示す様にzがよほど小さくない限り緩やかに増加する負の増加関数である．

一方，ka は $J_1(z)$ の最初の零点 $J_1{}^1<4$ と $J_2(z)$ の最初の零点 $J_2{}^1>5$ の間に在るがこの区間で $In(z)$ は第６図に示す様に比較的急激に増加する非正の単調関数である．

$\varepsilon=0$ に対しては $\kappa=k$ 及び $c=a$ であるから式（5-4）



第7図 $\mathrm{In(ka)=Ex(pa)}$ の説明図

は第7図に示す様に勿論成立する．

式（3-22）より，

$$\alpha=\alpha(\mathrm{b})=\mathrm{A}-\mathrm{Bb},\ \mathrm{A}及び\mathrm{B}は正定数 \tag{5-5}$$

となる．これより，適当に小さな任意の ε に対して

$$(\varkappa\mathrm{c})^2=(\mathrm{k}^2+\varepsilon\alpha)(\mathrm{a}+\varepsilon+\varepsilon\mathrm{b})^2$$
$$=-\mathrm{B}(\varepsilon\mathrm{b})^3+\{(\mathrm{k}^2+\varepsilon\mathrm{A})-2\mathrm{B}(\mathrm{a}+\varepsilon)\}(\varepsilon\mathrm{b})^2$$
$$+\{2(\mathrm{k}^2+\varepsilon\mathrm{A})-\mathrm{B}(\mathrm{a}+\varepsilon)\}(\mathrm{a}+\varepsilon)(\varepsilon\mathrm{b})$$
$$+(\mathrm{k}^2+\varepsilon\mathrm{A})(\mathrm{a}+\varepsilon)^2$$

即ち

$$(\varkappa\mathrm{c})^2-(\mathrm{ka})^2=-\mathrm{B}(\varepsilon\mathrm{b})^3$$
$$+\{(\mathrm{k}^2+\varepsilon\mathrm{A})-2\mathrm{B}(\mathrm{a}+\varepsilon)\}(\varepsilon\mathrm{b})^2$$
$$+\{2(\mathrm{k}^2+\varepsilon\mathrm{A})-\mathrm{B}(\mathrm{a}+\varepsilon)\}(\mathrm{a}+\varepsilon)(\varepsilon\mathrm{b})$$
$$+\{(\mathrm{k}^2+\varepsilon\mathrm{A})(\mathrm{a}+\varepsilon)^2-(\mathrm{ka})^2\} \tag{5-6}$$

となる．一方，

$$\mathrm{pc}-\mathrm{pa}=\mathrm{p}(\mathrm{a}+\varepsilon+\varepsilon\mathrm{b})-\mathrm{pa}=\mathrm{p}\varepsilon+\mathrm{p}(\varepsilon\mathrm{b}) \tag{5-7}$$

となる．式（5-6）及び式（5-7）より，特に $\mathrm{b}=0$ の時

$$\varkappa\mathrm{c}-\mathrm{ka}>\mathrm{k}\varepsilon,\quad \mathrm{pc}-\mathrm{pa}=\mathrm{p}\varepsilon \tag{5-8}$$

となるが，通常は$\mathrm{k}>\mathrm{p}$即ち $\mathrm{k}\varepsilon>\mathrm{p}\varepsilon$ である事（例えば Haines and Marshall 1987）に注意すれば第7図より

$$\mathrm{b}=0\ の時\ \mathrm{In}(\varkappa\mathrm{c})>\mathrm{Ex}(\mathrm{pc}) \tag{5-9}$$

である事が分かる．式(3-5)より b の変域は $\mathrm{b}>-\mathrm{a}/\varepsilon$ であるが，式（5-6）より，$\varkappa\mathrm{c}=\mathrm{ka}$ となる $\mathrm{b}>0$ が存在する．一方，式（5-7）より，$\mathrm{b}>0$ に対して $\mathrm{pc}>\mathrm{pa}$ であるから，この $\mathrm{b}>0$ に対して

$$\mathrm{In}(\varkappa\mathrm{c})=\mathrm{In}(\mathrm{ka})=\mathrm{Ex}(\mathrm{pa})<\mathrm{Ex}(\mathrm{pc}) \tag{5-10}$$

となる．故に，式（5-9）及び式（5-10）より，適当に小さな任意の ε に対して式（5-4）を成立させる b が $\mathrm{b}>-\mathrm{a}/\varepsilon$ 範囲に存在する事になる．

式（5-4）が成立している時，式（5-3）の最右辺はパラメタ $\varkappa$ と p を持つ半径 c の円形モドンの Arnol'd 不変量と見なせ，Laedke and Spatschek (1986) の円形モドンの線形安定性の証明により，非正となる．従って $\mathrm{L}[\phi]<0$ となり，故に基本帯状流の方向へ伸びたモドンは線形安定となる．

6．結語

モドンを大気ブロッキングのモデルの一つと考える第1の理由は，それらの間の形態的類似（第1図及び第2図）にある．色々な難点も指摘されており，直接的にモデルとする事には問題が在るが（例えば McWilliams 1980），あっさり捨てるには余りにも似すぎている．何等かの意味で，大気ブロッキングを捉える足掛り（例えば Butchart *et al.* 1989）であり続けるのではないかと思う．数学的簡単さの故に普通には円形モドンが考えられているが，大気ブロッキングの多様性を考えれば円形以外のモドンも扱える事が望まれる．ここでは基本帯状流の方向へ伸びたモドンの渦位と流線関数の関係に就いて考察し，その線形安定性を示したが，ここでの考察はより一般的な非円形のモドンに対しても拡張できるのではないかと思う．

付録

ここでは次式(但し $\gamma>0$)で指定された解に就いて考察する．

$$(\Delta-\lambda)\Psi_{\mathrm{in}}+(\beta-\lambda\mathrm{U})\mathrm{y}$$
$$=-(\lambda+\mathrm{k}^2+\varepsilon\alpha)\Psi_{\mathrm{in}}$$
$$\times\exp[-\varepsilon\{\gamma/(\lambda+\mathrm{k}^2)\}\Psi_{\mathrm{in}}{}^2],$$
$$(\Delta-\lambda)\Psi_{\mathrm{ex}}+(\beta-\lambda\mathrm{U})\mathrm{y}=-(\lambda-\mathrm{p}^2)\Psi_{\mathrm{ex}},$$

境界条件は

$\mathrm{r}\to\infty$ で $\Psi_{\mathrm{ex}}\to-\mathrm{Uy}$,

モドン境界で $\Psi_{\mathrm{in}}=\Psi_{\mathrm{ex}}=0$

且つ $\nabla\Psi_{\mathrm{in}}=\nabla\Psi_{\mathrm{ex}}.$ (a-1)

問題（a-1）の解の内 y に関して反対称なものを考える．

$$\Psi(\mathrm{x},-\mathrm{y})=-\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}). \tag{a-2}$$

此の時，$\mathrm{y}\geqq 0$ の領域だけを考えれば十分である．初めに次の様な有界領域を考え，後でX，Yを無限大へ持って行く．

$$\{(\mathrm{x},\mathrm{y}):0\leqq\mathrm{y}\leqq\mathrm{Y},\ -\mathrm{X}\leqq\mathrm{x}\leqq\mathrm{X},\ \mathrm{x}\ に就いては周期的\} \tag{a-3}$$

此処で問題を次の形に書き直す．

$0<\mathrm{y}<\mathrm{Y}$ に於て $\mathrm{L}[\Psi]=\Delta\Psi-\mathrm{A}\Psi=\mathrm{F}[\Psi]-\mathrm{By}$,

$\mathrm{y}=0,\mathrm{Y}$ に於て $\Psi=-\mathrm{Uy}$, (a-4)

但し，$\mathrm{B}=\beta-\lambda\mathrm{U}$ であり，

$\Psi \geqq 0$ に対して $A=\lambda$,

$$F[\Psi]=-(\lambda+k^2+\varepsilon\alpha)\Psi \cdot \exp\left[-\varepsilon\{\gamma/(\lambda+k^2)\}\Psi^2\right],$$

$\Psi \leqq 0$ に対して $A=p^2$,

$$F[\Psi]=0. \tag{a-5}$$

式（a-5）より，式（a-4）の $F(\Psi)$ は有界な Ψ の連続関数であり，$A\Psi$ も Ψ の連続関数である．$F[\Psi]$ が有界であるから $\max\{F[\Psi]-By\}$ が存在する．これを使って次の関数を定義する．

$$\Phi=Uy+\max\{F[\Psi]-By\}\times\{\exp(Y)-\exp(y)\}\geqq Uy. \tag{a-6}$$

$\Psi+\Phi$ に対しては次の不等式が成立する．

$0<y<Y$ に於て $L[\Psi+\Phi]=L[\Psi]+L[\Phi]$

$$=F[\Psi]-By-\max\{F[\Psi]-By\}\exp(y)-AUy-A\max\{F[\Psi]-By\}\{\exp(Y)-\exp(y)\}$$
$$\leqq F[\Psi]-By-\max\{F[\Psi]-By\}\exp(y)\leqq 0,$$

$y=0,Y$ に於て $\Psi+\Phi\geqq -Uy+Uy\geqq 0.$ (a-7)

Aが正である事に注意すれば，式（a-7）より次の不等式を得る．

$0\leqq y\leqq Y$ に於て $\Psi+\Phi\geqq 0$, 即ち $-\Phi\leqq\Psi$. (a-8)

一方 $\Psi-\Phi$ に対しては次の不等式が成立する．

$0<y<Y$ に於て $L[\Psi-\Phi]=L[\Psi]-L[\Phi]$

$$=F[\Psi]-By+\max\{F[\Psi]-By\}\exp(y)+AUy+A\max\{F[\Psi]-By\}\{\exp(Y)-\exp(y)\}$$
$$\geqq F[\Psi]-By+\max\{F[\Psi]-By\}\exp(y)\geqq 0,$$

$y=0,Y$ に於て $\Psi-\Phi\leqq -Uy-Uy\leqq 0.$ (a-9)

Aが正である事に注意すれば，式（a-9）より次の不等式を得る．

$0\leqq y\leqq Y$ に於て $\Psi-\Phi\leqq 0$, 即ち $\Psi\leqq\Phi$. (a-10)

式（a-8）及び式（a-10）より Ψ は有界となる．

$$|\Psi|\leqq UY+\max\{F[\Psi]-By\}\times\{\exp(Y)-\exp(y)\}=M. \tag{a-11}$$

ここで次の様な単調増加関数 $\Pi[\Psi]$ を考える．

$|\Pi[\Psi]|\leqq 2M$ であり且つ

$|\Psi|\leqq M$ に対して $\Pi[\Psi]=\Psi$. (a-12)

この関数 $\Pi[\Psi]$ を使って次の問題を定義する．

$0<y<Y$ に於て

$$\Delta\Psi=-By+F[\Pi[\Psi]]+A\Pi[\Psi]=f[y,\Psi],$$

$y=0,Y$ に於て

$$\Psi=-Uy. \tag{a-13}$$

$f[y,\Psi]$ は Ψ の連続関数であり，且つ，式（a-11）及び式（a-12）より有界であるから問題（a-13）の解が存在する．$|\Psi|\leqq M$ に対しては $\Pi[\Psi]=\Psi$ であるからこの解は同時に問題（a-4）の解である．一方，式（a-11）より問題（a-4）に対しては $|\Psi|\leqq M$ であるから，結局，問題（a-4）の解がが存在する事になる．

参考文献

Benzi, R., S. Stefano, A. Vulpiani and E. Salusti, 1982 : On nonlinear hydrodynamic stability of planetary vortices, Geophys Astrophys. Fluid Dyn., **20**, 293-306.

Boyd, J. P. and H. Ma, 1990 : Numerical study of elliptical modons using a spectral method. J, Fluid Mech., **221**, 597-611.

Butchart,N., K. Haines and J. C. Marshall, 1989 : A theoretical and diagnostic study of solitary waves and atmospheric blocking, J. Atmos. Sci., **46**, 2063-2078.

Eydeland, A. and B. Turkington, 1988 : A computational method of solving free boundary problems in vortex dynamics, J. Comp. Phys., **78**, 194-214.

Haines, K., 1989 : Baroclinic modons as prototypes for atmospheric blocking, J. Atmos. Sci., **46**, 3202-3218.

Haines, K. and J. C. Marshall, 1987 : Eddy forced coherent structures as a prototype of atmospheric blocking. Quart. J. Roy.Meteor. Soc., **113**, 681-704.

Laedke, E. W. and K. H. Spatschek, 1986 : Two dimensional drift vortices and their stability, Phys. Fluids, **29**, 133-142.

Larichev, V. D. and G. M. Reznik, 1976 : Two dimensional Rossby soliton : An exact solution, Rep. USSR Acad. Sci., **231**, 1077-1079.

McWilliams, J. C., 1980 : An application of equivalent modons to atmospheric blocking, Dyn. Atmos. Oceans, **5**, 43-66.

Pierrehumbert, R. T. and P. Malguzzi, 1984 : Forced coherent structures and local multiple equilibria in a barotropic atmosphere, J. Atmos. Sci., **41**, 246-257.

Tanveer, S., 1986 : A steadily translating pair of equal and opposite vortices with vortex sheets on their boundaries, Stud. Appl. Maths., **74**, 139-154.