

## SVD (Singular Value Decomposition : 特異値分解) 解析

多くの観測点にて、または数値モデルにおける多数の格子点で得られた物理量の時系列群から、その場において最も卓越し、かつ意味のあるモード(空間パターン)を抽出することは、自然界あるいはモデルにおける現象の背後にあるプロセスを理解する上で重要なポイントであろう。これまで、ある1つの場において、卓越するモードを取り出す手法としては、EOF解析(Empirical Orthogonal Function analysis : 経験直交関数解析)、またはその派生型が広く使われてきた。それに対してSVD解析は、異なる2つの物理量の場を表す時系列群から相互関係の強いモードをそれぞれの変数について同時に抽出する解析手法である。

EOF解析では、ある1つの場を表す格子点データから得られる共分散行列(または相関係数行列)を固有値展開する過程が、解析全体の根幹をなしている。この場合、固有値の総和は各格子点の分散の総和に等しい。一方、異なる2つの場の間の共分散行列(または相関係数行列)を求める場合、一般にはそれぞれの場の格子点数は違うであろうから、その行列は必ずしも正方行列にはならない。そこで、特異値分解を用いて、この行列をモード展開をすることがこの解析手法の根幹となる(モード展開のプログラムルーチンにはMATLAB等の市販の数値計算パッケージを使用する。また、Numerical Recipes等の数値計算の解説書を参考にして自らプログラムを組むことも可能である)。この場合、特異値の二乗の総和は2つの場の共分散の二乗和に等しくなる。

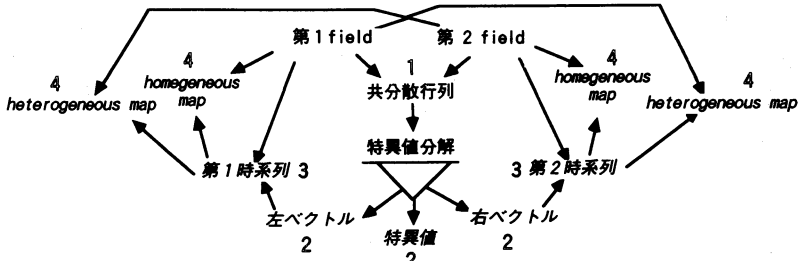
EOF解析において、モード展開の後に第1モードを取り出す(つまり最大固有値のモードを選ぶ)という事は、最も変動量(つまり全格子点上の分散の総和)が大きいモードを取り出すことに相当する。これに対しSVD解析においては、2つの場の共分散の二乗和が最大になる組み合わせを抽出する(つまり、特異値の「二乗」和が最大のモードを選ぶ)ことに相当し、第1モードがそれぞれの場の変動において最も卓越するかどうかは問わない。つまりSVD解析では2つの

場の相互関係のみに注目するわけだから、共分散行列はある場の格子点ともう一方の場の格子点との共分散から構成され、同じ場の共分散は入らないのである。

これまで、相互関係を抽出しようとしたときに用いられてきた結合(combined)EOF解析という方法では、同じ場の共分散と相手側の場との共分散を含んだ行列を固有値展開しなければならなかったので、相互関係に関する統計量だけを扱うことができなかった。例えば、それぞれの場において卓越する変動がありながら実際には相互関係が殆どないという極端な場合を想定したとき、combined EOF解析の結果では第1モードに相互関係のないながらもそれぞれの場でのみ卓越するモードが抽出されてしまうのに対し、SVD解析の結果では第1モードでも大きな変動量をもつものは得られない。この点がSVD解析の優れた特性といえるだろう。

EOF解析の場合には、それぞれの固有値に対応する規格化された固有ベクトルが求められる。さらに固有ベクトルを元の場と照らし合わせて、各モードごとに時係数が求められる。SVD解析でも同じように処理され、モード展開時に特異値とそれに対応するベクトルが求められる。ただし、この場合、場は2つあるので、それぞれに対応する2つのベクトルが求められる。共分散行列の「行」にあたる側を左ベクトル、「列」にあたる側を右ベクトルと呼ぶ。時係数も左右両ベクトルとそれに対応する自己の場と照らし合わせて、左右別々なものが求められる。

この時点で主要モードにおける2つのベクトル(つまりそれぞれの場で卓越する空間パターン)とそれに対応する2つの時係数を図化することにより、解析結果を示すことができる。この時、2つの場の相互関係が明瞭に表されるよう図化することが一般的である。すなわち、ある主要モードの2つの時係数から自己の場と相手側の場との間の線形回帰係数(または相関係数)の分布図をそれぞれ作成する。前者はhomogeneous regression(またはcorrelation)map、後者はheterogeneous regression(またはcorrelation)mapと呼ばれる。これら2種類の相関図がどの程度類似す



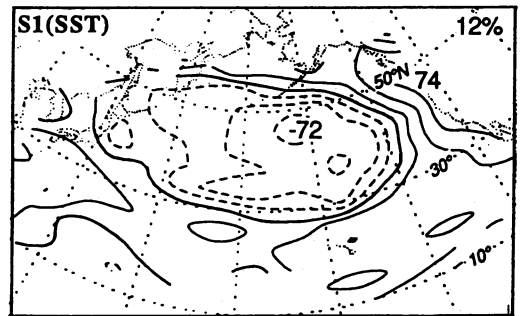
第1図 SVD 解析の概念図. 第1 field, 第2 field が対象となる時系列群である. 白抜き数字は求められる手順を示す. 斜体の部分はモードに展開されている.

るかは、そのモードの相互関係がどれだけ強いかの指標となる。ここまでの処理過程の概念図を第1図に示す。

具体例を基にした方が、理解しやすいと思われるので、ここでは Bretherton *et al.* (1992) と Wallace *et al.* (1992) の結果を引用して、この方法の特徴を記すことにする。Wallace らは北太平洋157格子点上の規格化された海面水温 (SST) 偏差場と125格子点上の 500 hPa 高度偏差場から共分散行列を計算し、それを SVD 解析した。第2図はその第1モードの heterogeneous correlation map である。大気循環場には有名な PNA (Pacific/North American) テレコネクション・パターンが、また SST にもよく知られたパターンが現われている (例えば, Iwasaka *et al.*, 1987 ; Tanimoto *et al.*, 1993)。

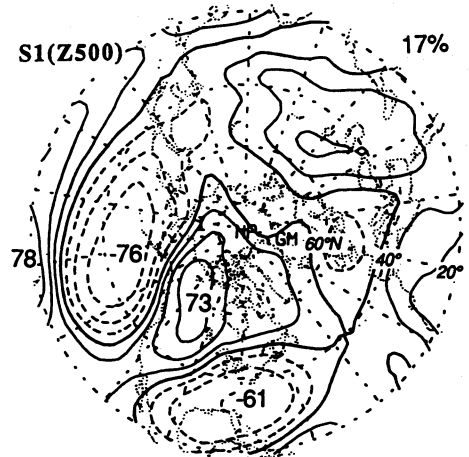
図中の数字は相関係数 (%) を表している。図中央部の  $r = 0.81$  は第1モードで得られた2つの時系列の間の相関係数である。この高い相関はこのモードにおけるそれぞれのパターンの結びつきが非常に強いことを示している。52% という数字は、全モードにおける特異値の二乗和 (共分散の全二乗和に相当する) に対する第1モードにおける特異値の二乗の割合であり、SCF (Squared Covariance Fraction) と呼ばれる。それぞれの correlation map 右上に示されている数字 (12%, 17%) はそれぞれの場の全分散のうち第1モードだけで説明される割合を示している。このような統計量はそれぞれ他のモードに比べどれだけ卓越しているか、また変動エネルギー量として意味のある大きさなのかを判断する基準となる。

この他、SVD 解析を適用した代表的な研究例として2つあげたい。1つは、境界条件として与えた SST 偏差場とそれを用いて駆動した大循環モデルの結果 (515 hPa 高度偏差) の場に適用した Lau and Nath



$r = .81$

52%



第2図 Wallace *et al.* (1992), 第6図より引用. 北太平洋上における冬季 500 hPa と SST 偏差場に対する SVD 第1モードの heterogeneous correlation map. 等値線は 0.2 間隔. 破線は負の値を示す.

(1994). もう1つは、観測資料から求められた海面から大気への熱フラックス場と 500 hPa 高度、海面気圧、1000~500 hPa 層厚といった大気大循環場との相互関係を見た Iwasaka and Wallace (1995) である。

最後に解析結果の検定に関する一般的方法について触れておく。1つ目は、データの時間方向の長さを何らかの形で半分（前半後半、1つ飛ばしなど）にしたものを基にした共分散行列からも同様の結果が得られるかどうかを調べる方法。2つ目は、一方の場を時間的にランダムにシャッフルしたものを多数作り（例えば100例）、それともう一方の場と組み合わせ共分散を計算する方法。これは、現実の場から得られたSCFなどの統計量が仮想的な場から得られるものと比べてどの程度の大きさなのかを調べることにより、統計的有意性を推定する方法である。

これまでのSVD解析を用いた研究は大気と海洋との相互関係を念頭に入れたものが多かった。これは、それぞれ場が今までに別な統計手法によって比較的よく調べられていたことが背景にあると思われる。SVD解析は大変便利な手法ではあるが万能ではない。例えば、SVD解析、EOF解析などモード展開をする解析手法には空間直交性の制約があるので、第1モードではその制約をうけないが、第2モード以降はそれより上位のモードに対してこの制約をうける。これは自然現象を記述する意味ではいささか強すぎる制約であろう。現在ではEOF解析の場合と同様に、主要モード同士を回転させることによりこの制約を緩める方法も紹介されている(Cheng and Dunkerton, 1995)。しかし、モードの独立性の解釈の問題など、回転することもまた万能ではない。データを目の前にしたとき、このようなSVD解析の特性を踏まえ、まずそれぞれの場がどのような変動特性を持つかを調べるのが、SVD解析を生かす意味でも重要である。

### 参 考 文 献

- Bretherton, C. S., C. Smith, and J. M. Wallace, 1992 : An intercomparison of methods for finding coupled patterns in climate data, *J. Climate*, **5**, 541-560.
- Cheng, X., and T. J. Dunkerton, 1995 : Orthogonal rotation of spatial patterns derived from singular value decomposition analysis, *J. Climate*, **8**, 2631-2643.
- Iwasaka, N., K. Hanawa, and Y. Toba, 1987 : Analysis of SST anomalies in the North Pacific and their relation to 500mb height anomalies over the Northern Hemisphere, *J. Meteor. Soc. Japan*, **65**, 103-114.
- Iwasaka, N., and J. M. Wallace, 1995 : Large scale air sea interaction in the Northern Hemisphere from a view point of variations of surface heat flux by SVD analysis, *J. Meteor. Soc. Japan*, **73**, 781-794.
- Lau, N.-G., and M. J. Nath, 1994 : A modeling study of the relative roles of tropical and extratropical SST anomalies in the variability of the global atmosphere-ocean system, *J. Climate*, **7**, 1184-1207.
- Tanimoto, Y., N. Iwasaka, K. Hanawa, and Y. Toba, 1993 : Characteristic variation of sea surface temperature with multiple time scales in the North Pacific, *J. Climate*, **6**, 1153-1160.
- Wallace, J. M., C. Smith, and C. S. Bretherton, 1992 : Singular value decomposition of wintertime sea surface temperature and 500-mb height anomalies, *J. Climate*, **5**, 561-576.

(ワシントン大学大気海洋共同研究施設

谷本陽一)