

浅水流体モデルから見た山越え気流*

小澤英司**

1. はじめに

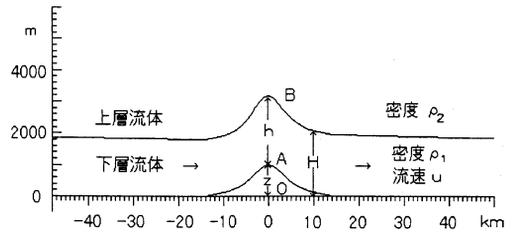
冬季にシベリアから吹きつける風は日本海側に大雪を降らせ、太平洋側には乾燥した空っ風をもたらす。日本海側での生活の長い私は、冬になると太平洋側の太陽を少しでも分けて欲しいと願っていた。雪が道路から消え乾いた路面が現れた時、またひばりが暖かい日差しを受けて空高く舞い上がり鳴いている時、待ち焦がれた春の訪れを感じた。自然は私達に多くの恵みを与えてくれるが、時には厳しい表情をみせる。フェーン現象が大火の一因になったり、羅臼だし風のように船を転覆させ、2度の強風で120余名もの尊い命を奪った例もある。

狭い日本にこのような多様な気象現象をもたらす原因の1つに、山岳の存在がある。山岳が存在するため、おろし風の強風や山から吹き下ろした風が突然跳ね上がる跳ね水現象、山の風下側で発生するフェーン現象、山脈の下流に規則的な雲がみられる風下山岳波など物理的に興味深い現象が現れる。

2. 浅水流体モデル

このように山越え気流は、私達の生活と身近に関わっているが、どのような時にどのような流れになるか、イメージが湧きにくいのも事実である。

これらの現象を統一的に理解したいところだが、難解になってしまう。このような時、より単純化されたモデルを用いると見通しが良くなる。そこで登場するのが浅水流体モデルである。一口で浅水流体モデルといっても、地形の他に流速、安定度も変えられる変化



第1図 浅水流体モデルにおける記号の定め方。上層流体の密度を ρ_2 、下層流体の密度を ρ_1 、下層流体の流速を u と定める。

に富んだ面白いモデルで、プログラムも比較的簡単に作成できる。

このモデルで用いられる浅水方程式は、流体層の厚さに比べ水平スケールの大きな流れを扱う時に成り立ち、この時下層流体の速さは、深さによらないと近似することができる。浅水流体モデルで必要になる式は、運動方程式と質量保存則の2つだけである。運動方程式からは、流体の加速度は境界面の傾きに比例することが、質量保存則からは流体が収束すれば、境界面が盛り上がるということが分かる。

ここで扱うモデルは2層、2次元でありコリオリの力も考慮していないので、この解をそのまま大気現象に適用するわけにはいかないが、実際の大气中で起こる現象との類似点も多く、大変参考になるのでこの解の性質をみることにしよう。

ここで、この文章で使われる記号を決めておく。第1図に示したように山岳の存在しない場所の高さをO、地表面の高さをAとし、2層流体の上層と下層の境界面をBとする。また $OA=z$ 、 $AB=h$ 、 $OB=H$ 即ち、 $H=h+z$ とし、下層流体の密度を ρ_1 、上層流体の密度を ρ_2 とする。なお、上層の流体は下層の流体に上下流体の密度差以外の影響を与えないと仮定する。ま

* Flow over a mountain from the view point of a shallow water model.

** Eiji Ozawa, 気象庁予報情報システム課.

© 1997 日本気象学会

た、山岳が存在しない状態の物理量は ϕ_0 のように添え字 0 を付けて表す。

モデルの格子間隔は 1 km とし、地形 $z(x)$ は高さ 1000 m、半値幅 5 km のベル型の山をモデルの中央におく。ただし山頂から左 15 km と右 15 km 以遠の山すそはカットした。なお、半値幅とは山の高度が山頂の半分の高さになる水平距離のことである。

さて、定常状態における運動方程式を書けば

$$-u^2/h \times \text{流体層厚の傾き} = -g^* \text{ (地形の傾き + 流体層厚の傾き)} \quad (1)$$

1項 2項 3項

となる。ここで g^* は安定度 S と重力加速度 g で決まり、 $g^* = Sg$ である。 S は ρ_1, ρ_2 で決まり、 $S = (\rho_1 - \rho_2) / \rho_1$ として表現される。

つまり、下層の密度が大きく上層の密度が小さい時、安定度 S は大きくなる。ちなみに今回の計算では、 $S = 1/30$ としている。また (1) は、

$$u \times (u \text{ の発散}) = -g^* \text{ (地形の傾き + 流体層厚の傾き)} \quad (1)'$$

と書くこともできる。右辺が圧力傾度を示しており、左辺に -1 を掛けたものは、移流項とも呼ばれている。

一方、定常状態における質量保存則は、

$$h_0 u_0 = hu \quad (2)$$

となる。単位時間の流量は流れの断面積と流速との積であり、これは一定である。それゆえ、下層が薄いと流速が大きく、厚いとき小さくなる。

エネルギー保存則は、定常状態の運動方程式 (1)' を x について積分することにより

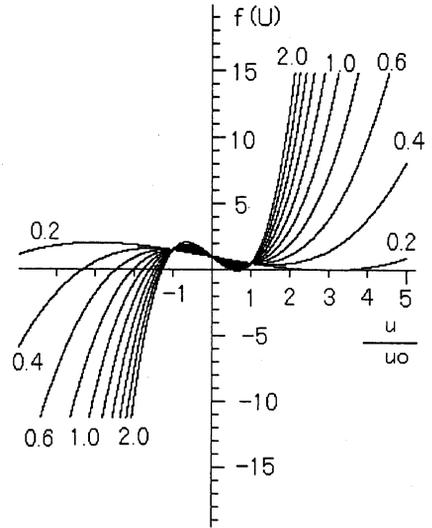
$$u_0^2 / (2g^*) + h_0 = u^2 / (2g^*) + h + z \quad (3)$$

となる。これは、流体の位置エネルギーの高いところで流速が小さく、位置エネルギーの低いところで流速が大きいかを意味している。

3. 定常状態の存在条件とフルード数

浅水流体においては、いかなる流速でも定常状態が存在できるわけではないことがわかっている。そこで、定常解の存在条件を見積もることにしよう。ここで以下のような無次元数を定義する：

$$\begin{aligned} U &= u/u_0 \text{ (無次元化された下層流速),} \\ \gamma &= z/h_0 \text{ (無次元化された山の高さ),} \\ Fr &= u/\sqrt{g^*h} \text{ (フルード数).} \end{aligned} \quad (4)$$



第2図 $\gamma=0.5$ とした場合の F_0 による定常解の存在条件. 縦軸は $f(U)$, 横軸は無次元化された流速, 図中の数字は F_0 を示す.

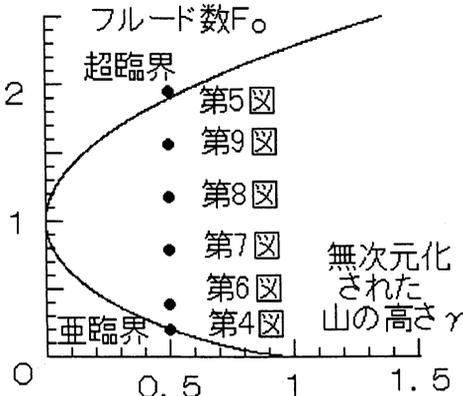
山の高さと同層流体の高さが一致した時に γ は 1 となる。フルード数は重要な無次元量であり、この意味はのちほど明らかになる。フルード数は本来位置の関数であるが、その代表値として F_0 も決めておくことにしよう。この値は (4) における u, h を u_0, h_0 に置き換えて定義する。

(2) と (3) から h を消去し、上記の 3 種類の無次元数の定義を用いれば

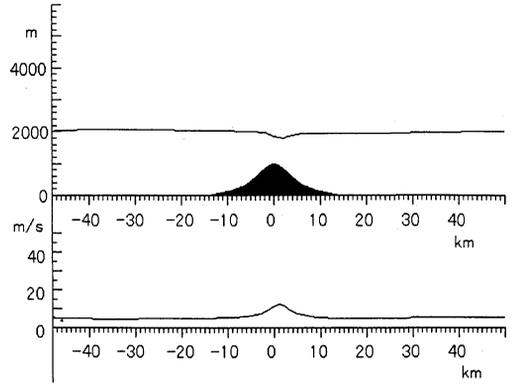
$$f(U) = 0 \quad (5)$$

なる U についての 3 次方程式を得る。 $f(U)$ は U の関数という意味である。従ってこの方程式には 3 つの解 U_1, U_2, U_3 が存在する。第 2 図は、 $\gamma=0.5$ として $f(U)$ の F_0 を、0.2 から 2.0 まで 0.2 おきに変化させた時にできる曲線群を示したものである。 $f(U)$ が x 軸を横切るときに実数解が存在することになる。

この図から $U > 0$ の領域において $f(U) = 0$ を横切るためには、 F_0 がある値より大きい時と、ある値より小さい時に限られる様子がわかる。これが、いかなる流速でも定常状態が存在するわけでない理由である。詳しく調べれば分かるが、1 つの解 U_1 は必ず負の実数値をとる。今は、左から右の流れを考えているので、この解は除外できる。これ以外の解、即ち U_2, U_3 が実数値をとる条件を (5) から求めると



第3図 γ と F_0 による定常解の存在条件. 縦軸に F_0 を, 横軸に無次元化された山の高さ γ をとる.



第4図 流体の形状1. 上図は山岳の形状と流体の境界面, 下図は風速分布図. 浅水流体モデルで, $u_0=5\text{ m/s}$ にした場合の数値解. 計算を開始してから2時間後.

$$\gamma \leq -3/2F_0^{2/3} + F_0^2/2 + 1 \quad (6)$$

を得, これが定常解が存在する条件である.

横軸に γ を, 縦軸に F_0 を取り, (6) の範囲, 即ち定常解の存在条件を示したのが第3図である. この図から一定の γ の値をとる時, 流速が小さい時と流速が大きい時に定常解が存在することがより明確になる. また, この図から γ が小さいほど, 即ち山が低いほど定常解が存在する範囲が広がるものの, F_0 が1の時には山岳の高さが0の時にしか定常解が存在できないことも分かる.

ここでフルード数が重要な理由を考えよう. 運動方程式(1)に注目すると, 流体層厚の傾きは, 1項と3項に現れており互いに打ち消し合う関係にある. 流速が大きいときには,

$$|1\text{項}| > |3\text{項}| \quad \text{即ち} \quad F_r > 1$$

流速が小さいときには

$$|1\text{項}| < |3\text{項}| \quad \text{即ち} \quad F_r < 1$$

となり, (1) から F_r が1を境界として地形の傾きと流体層厚の傾きの符号関係が逆転するので, 流体の形状が変化することが分かる.

$F_r > 1$ のとき超臨界 (Super Critical),

$F_r = 1$ のとき臨界 (Critical),

$F_r < 1$ のとき亜臨界 (Sub Critical)

であるという.

抽象的な議論が続いたが, ここで具体的に定常解の存在条件を見積もってみよう. ある変数 ϕ の最大値を ϕ_{\max} で表すことにし, $h_0=2000\text{ m}$, $z_{\max}=1000\text{ m}$ とすれば $\gamma_{\max}=0.5$ を得, この時定常解の存在条件は(6)か

ら

$$0 \leq F_0 < 0.20, 1.90 < F_0$$

となる. これは F_0 の定義式(4)を用いて

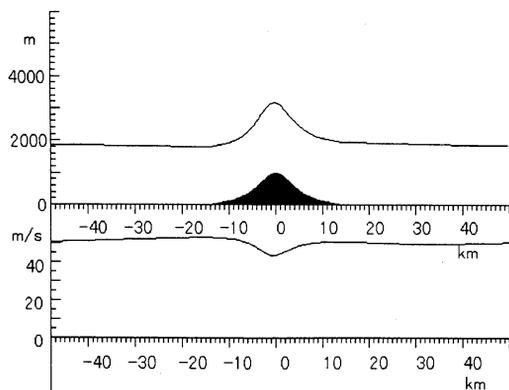
$$0 \leq u_0 < 5.22, 48.64 < u_0$$

と書くこともできる. 従って, 例として初期条件 $u_0=5\text{ m/s}$, $u_0=50\text{ m/s}$ をとれば, それぞれ定常解の存在条件を満たしていることになる(第3図参照).

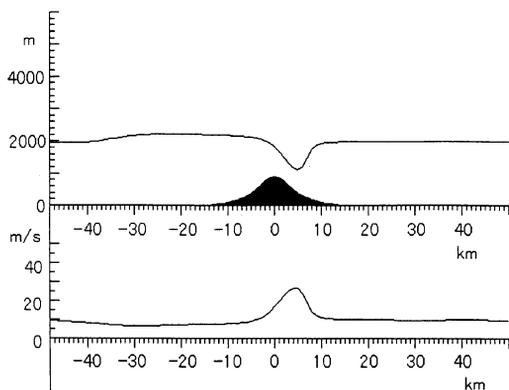
第4図は亜臨界 ($u_0=5\text{ m/s}$) の状態の流体の形状(上)と風速分布(下)を示す. 山頂付近に流速の強い領域があり, 山岳の真上で境界面が下降している. 即ち, 山岳に近づくに従って下層が薄くなっているため, 下層流体は強い水平発散が起こっている. 発散が起こるためには, この区間で流体は加速されなくてはならない. 加速されるためには, 運動方程式から山岳の上流で山岳に近づくにつれて H が小さくなっているはずである. 第4図はこの状態であり, 物理的に矛盾のない状態である.

このような形状になるのは, 流速が小さい時である. なぜなら, この状態のときには水平発散が強い割に, 山岳があるために圧力傾度が小さい. (1)からこの条件を満たすためには, 流速が小さい必要があるからである.

第5図は超臨界 ($u_0=50\text{ m/s}$) の状態を示す. 注意深くみると山岳の近傍では, 山岳に近づくに従って下層がわずかながら厚くなっているため, 水平収束が起こっている. 収束が起こるためには, この区間では流体は減速されなくてはならない. 従って運動方程式から, 山岳の上流で山岳に近づくにつれて H が大きくなっているはずである. これも物理的に矛盾のない状



第5図 流体の形状2. 図の見方は第4図と同じ. 浅水流体モデルで, $u_0 = 50$ m/sにした場合の数値解. 計算を開始してから2時間後.



第6図 浅水流体モデルで, $u_0 = 10$ m/sにした場合の数値解. 計算を開始してから1時間後.

態である.

このような形状になるのは, 流速が大きい時である. なぜなら, この状態では水平収束が小さい割には山岳が存在するため圧力傾度が大きく, (1)からこの条件を満たすためには, 流速が大きい必要があるからである.

4. 数値実験のデザインと非定常解の振る舞い

以上で定常解は分かったが, より一般的な非定常解は分からない. そこで非定常の運動方程式を数値的に時間積分する浅水流体モデルを実際に動かして, 解の振る舞いを調べることにする.

そのためにまず考慮しなければならないのが, 右端と左端の扱いをどうするかという, いわゆる境界条件の問題である. 今回は, 右端から出ていった流体は左端から入ってくるというサイクリックな境界条件を用いた. この方法が一番簡単に滑らかに接続できる.

初期条件は $u(x) = u_0$, $H(x) = 2000$ m とする.

初期条件や安定度, 山岳の形状は, モデルを作ってしまうと, 好みに合わせて自由に設定できる. 以上でモデルを動かす準備は整ったことになる.

実は, 前章第4図と第5図は上記条件を基に, 浅水流体モデルを用いて計算したイニシャルから2時間後の状態なのである.

それでは, このモデルにより計算された非定常状態の実例を見てみよう. 非定常状態の典型的なものは, 以下に述べる2種類の hydraulic jump (跳ね水) を伴う流れとなる. 第6図は $u_0 = 10$ m/s に設定して計算した1時間後の状態である. 山の後面で大きく境界面が落ち込んで, 流速が大きくなっている. 山麓におろ

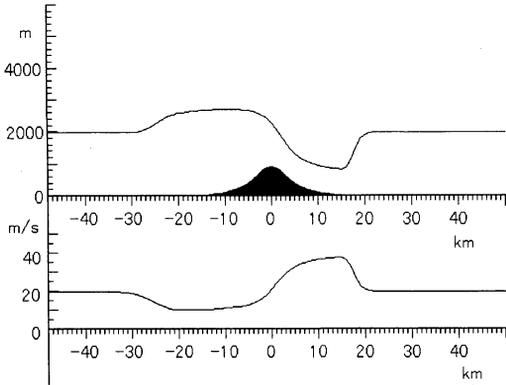
し風が吹き始める前にまず山頂付近で風が強まるということが知られており, この図はこの段階に対応すると考えることができる.

4.1 下流ジャンプ (downstream jump)

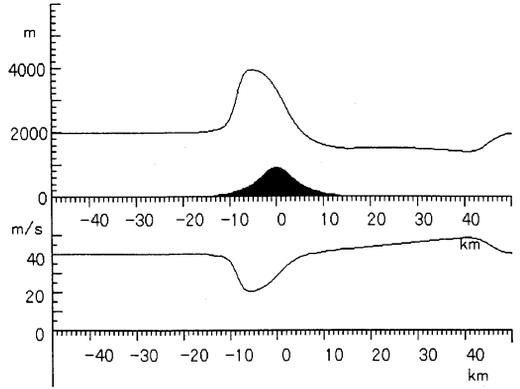
第7図は, $u_0 = 20$ m/s として計算したイニシャルから1時間後の境界面と流速である. 山岳の後面で落ち込んでいる領域が第6図より広がり, 典型的なおろし風が発生している状況と考えることができる. また, 15 km 付近で境界面は急激に上昇, 流速は急激に減少している. このように山頂よりも下流において, 境界面が急激に上昇する現象を下流ジャンプ (downstream jump) と呼ぶ. これは, 川の中に石がある状況でよく見ることができる. 石の上流で水流が遅くなるが, 石を越えた水は流速を増し, ある地点で跳ね上がる. 大気中でもこの現象が起こっている様子を雲の形状からみてとることができる場合がある. この jump は, 流速が比較的小さい時には山岳から一定の距離を保って停滞し, 山岳からの停滞距離は流速が大きいほど長い. 流速がある臨界値を超えるとこの jump は停滞できずに下流に移動する. 移動速度は流速が大きいほど速い. 第7図は, jump が下流に移動している状態を示している.

4.2 上流ジャンプ (upstream jump)

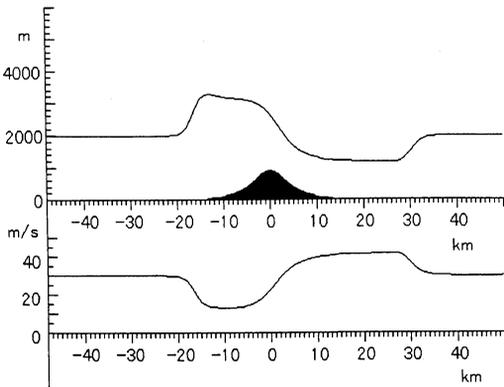
また, 第7図では山岳の上流でも jump が発生している. これは, 上流ジャンプ (upstream jump) と呼ばれており, 流速が小さい時には停滞できずに上流に向かって移動する. 移動速度は流速が大きいほど遅く, 山の風上で発生した jump が1時間後に図に示した地点まで移動した. 第8図は, $u_0 = 30$ m/s にしたイニ



第7図 浅水流体モデルで、 $u_0=20$ m/sにした場合の数値解。計算を開始してから1時間後。



第9図 浅水流体モデルで、 $u_0=40$ m/sにした場合の数値解。計算を開始してから1時間後。



第8図 浅水流体モデルで、 $u_0=30$ m/sにした場合の数値解。計算を開始してから1時間後。

シャルから1時間後の状態である。第7図と比較すると確かにこのjumpの移動速度が遅いことがわかる。第9図は $u_0=40$ m/sにしたイニシャルから1時間後の状態である。流速が小さい場合には、downstream jumpが卓越していたが、流速が大きい場合にはupstream jumpの方が優勢になっている。流速がある臨界値を超えるとupstream jumpはついに停滞する。downstream jumpが、流速の小さい時に停滞することと比較すると面白い。

upstream jumpが川の上流に伝わる現象は、アマゾン大逆流として知られるポロロッカや、上海の南に河口を持つ銭塘江に旧暦8月18日に現れるという逆流が有名である。後者はごう音とともに銭塘江を河口から80 km上流の杭州付近まで溯る。波は時に飛沫の高さが10 mに達し、高さ6 mの突堤をやすやすと超える。この自然現象を見るために数万人の見物人で賑わうという(NHK総合TV1996年4月5日放送「銭塘江80 kmの旅、追跡大河逆流」より)。

5. まとめ

流速が小さい時と大きい時のみ定常な状態が存在する。その中間の状態の時にはupstream jumpやdownstream jumpを伴う非定常な流れとなり、これらのjumpは条件によっては停滞できずに移動する。

この解の性質をみた時、運動方程式と質量保存則のたった2つの式でこれほど変化に富んだ現象が表現されることに感動したがいみなさんはどうだろうか。

謝辞

原稿提出が遅れたにも関わらず、レフリーの方々および教育と普及委員会の気象談話室担当者には多くの助言を頂き、当初より読みやすい文章にすることができた。誌面を借りて感謝申し上げます。