

然なのか(因果律を当てはめることができるかどうか)はあらゆる自然現象を考えるうえで重要なポイントである。「予測可能性」は天気予報だけの問題ではなく気

象学全体の問題としてあらゆる現象を理解するキーワードとして活発に研究されることを期待したい。

A Report of the Symposium on "Predictability-A Challenge to Chaos" at the 1998 Spring Assembly of the Meteorological Society of Japan

Toshiki Iwasaki* and Ken-ichi Kuma**

* (Corresponding author) Graduate School of Science, Tohoku University
Aobaku, Sendai, 980-8578, Japan

** Numerical Prediction Division, Japan Meteorological Agency

(Received 28 September 1998; Accepted 25 January 1999)

Contents

1. Shigeo Yoden : An Introduction to Predictability Studies
 2. Tadashi Tsuyuki : Data Assimilation and Forecast Sensitivity to Initial Conditions
 3. Kiyoharu Takano : Predictability and Ensemble Prediction
 4. Masahide Kimoto : Comment : An Impact of Midlatitude Atmosphere-Ocean Interaction on Long-Term Predictability
-

101:4011 (数値天気予報; 予測可能性)

1. 予測可能性概論

余 田 成 男*

要 旨

本講演では、数値天気予報の歴史を振り返り、E.N. ロレンツが提起した予測可能性の問題について概説した。こ

* 京都大学大学院理学研究科地球惑星科学専攻。

© 1999 日本気象学会

れは大気の変動がカオス的であることに起因する問題である。初期値に含まれる誤差は予報期間が延びるにしたがって急激に拡大するので、ある期間以上の予報が不可能になる。しかし、その本質を理解し工夫を凝らすことによって、予測の限界を先に延ばすことができる。このような予測可能性に関する基礎理論の構築とそれを踏まえた現業への応用が気象力学の今日的な課題の1つとなっている。

まず、実際の1週間予報の例を用いて予報誤差が変動する様子を概観し、理論的な基盤となる有限時間アノフ安定性について述べた。そして、簡略化した非線形モデルから現業の数値天気予報モデルまでの階層的なモデル群を用いて、このような概念と解析手法がどのように使われ得るかを紹介した。理論の展開において各自の定義や用語が氾濫している現状なので、ここでは理論部分を中心にできるだけ統一的に詳述しておく。ただし、理論の詳細は多くの人が興味をもつところではないので、講演ではその要点を述べるに留めた。

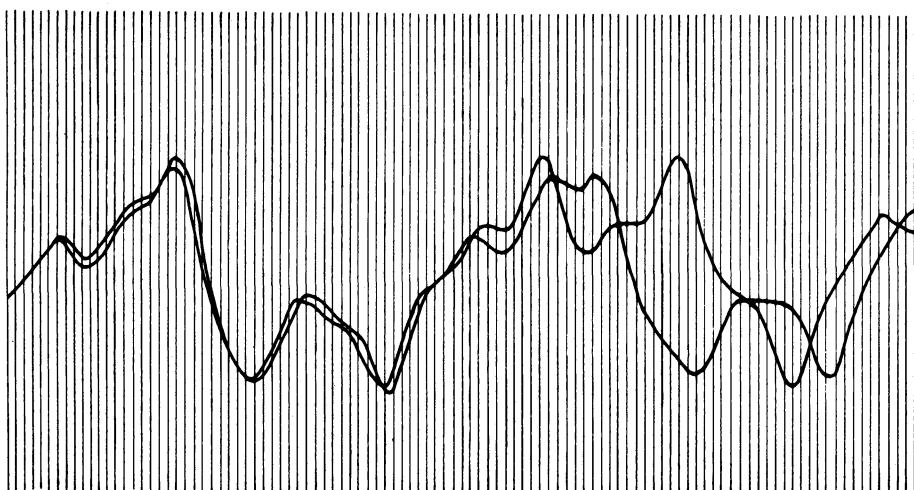
1. はじめに

数値天気予報とは、大気の振舞いの時間発展の様子を物理法則に基づいて数値的に求めて、その予測結果をもとに行う天気予報のことである。数値天気予報の歴史は今世紀初頭の V. ビアクネスや L.F. リチャードソンの研究にまで遡ることができるが、それが急激に進展したのは、コンピュータが発明されて以降の今世紀後半のことである(例えば、時岡ほか, 1993)。コンピュータの発展と数値計算技術の進歩とが相俟って、より細かくより先までの予報が可能となってきた。

しかし、同時にそのような予測には限界があることもわかってきた。このような予測可能性問題を提起し、理想化・簡略化した数値モデルを用いて理論的な研究を開始したのは、カオスの発見者の1人である E.N. ロレンツである(自伝的な書物として, Lorenz, 1993)。数値天気予報の研究自体が黎明期の1950年代後半のこ

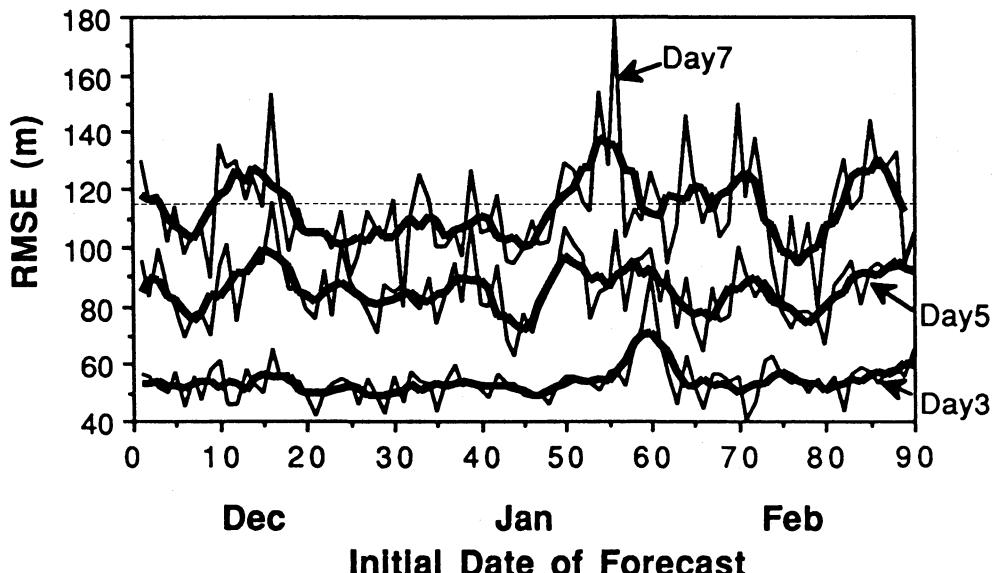
とであった。カオスとは「初期値に対する鋭敏な依存性」をもつ系における非周期的な解の挙動のことであるが、大気の振舞いも基本的にカオスである。たとえ完璧な数値天気予報モデルができたとしても、観測や解析に伴う初期値誤差が避けられず、カオスの性質によりこれが時間とともに拡大してしまうので、ある期間以上の予測は不可能である(第1図)。

一般に、数値天気予報の精度をあげてより良いものにするためには、(I)モデルを改良してより完璧に近いモデルにする、(II)観測や解析の精度をあげて初期値誤差をできるだけ小さくする、(III)予報誤差を予測することにより予報の信頼度を求めておく、などの方策が考えられる。ここでは、(III)に係わる大気の変動に起因する予報誤差の変動についての理論的な基盤をレビューする。すなわち、モデルは完璧であり、初期値誤差は微小で且つある確率密度関数で与えられると



第1図 1961年にロレンツが計算した出力結果の例 (Gleick, 1987より)。彼の簡略化した予報モデルでほとんど同じ初期値からの時間発展を求めるに、両者はどんどん離れていく、やがて全く類似性のない変動をするようになる。一方を大気の変動、他方を「完璧な」モデルによる予報とみなすと、ある期間以上の予報ができないことを示している。

Z500 RMSE <NH 20-90N>



第2図 気象庁全球スペクトルモデルにおける1988年12月1日から90日間の予報誤差の変動（余田ほか, 1992）。3日間, 5日間および7日間予報についての北半球（20度以北）500 hPa 等圧面高度場の RMS 誤差。太線は5日移動平均、点線は気候的標準偏差値。

いう仮定のもとに、初期値誤差の拡大とその変動に関する力学系理論をまとめる。そして、簡略化した非線型モデルから現業の数値天気予報モデルまでの階層的なモデル群を用いて、このような概念と解析手法がどのように使われ得るかを紹介する。

2. 予報誤差の変動

予報誤差変動の具体的なイメージを持つために、まず実際の数値天気予報結果の事例解析を紹介する (Kimoto *et al.*, 1992; 余田ほか, 1992)。気象庁では、1987年のスーパーコンピュータの導入を契機として、翌年3月より全球モデルを用いた8日間予報を毎日行うようになった。ところが、予報期間を延ばすと予報誤差が格段に拡大し、その日々の変動も顕著となる。1週間程度の中期予報では、予報誤差の見積りが予報自体と同様に重要であることがわかつてきた。すなわち、ロレンツが30年以上前に言ったことをもう一度考え直してみる必要性が出てきたわけである。

ここでは、予報値と解析値の差を予報誤差とする。このように定義した誤差には、予報モデルが不完全であることに起因する誤差とロレンツの言う初期値誤差の拡大に伴うものとが含まれている。もっとも、大気

の真の状態つまり観測誤差を含まない状態を知ることができないので、両者を分離することは不可能である。

第2図は気象庁全球スペクトルモデルにおける1988年12月1日から90日間の予報誤差の変動を示したものである。ここでは、予報誤差の指標として北緯20度以北での500 hPa 等圧面高度の Root Mean Square (RMS) 誤差を用いる。RMS 誤差とは、各格子点での誤差の2乗を領域平均してその平方根をとったものである。予報誤差は予報期間が延びるに従って拡大するが、その変動の大きさも大きくなる。例えば7日間予報の誤差を見ると、日々の変動も大きいが1週間以上のゆっくりした変動が顕著で、変動幅は平均値の30%以上の大きさとなっている。また、日々の変動を詳細に見ると、7日間予報のほうが5日間予報よりも誤差が小さい場合があり、予報期間が長いほど予報誤差が大きいとは一概に言えない。

この領域における500 hPa 等圧面高度の標準偏差を90日間で平均すると115 m であるので、ちょうど、7日間予報の誤差がこの「気候的標準偏差値」あたりで変動していることになる。RMS 誤差が気候的標準偏差値を越えると予報価値はないので、この予報誤差を前もって予測できれば中期予報の情報価値を高めること

になる。

第2図で顕著な中期（7日間）予報のゆっくりした誤差変動は、ヨーロッパ中期予報センター(ECMWF)や米国気象センター(NMC；現在はNCEP)で行われた7日間予報の結果にも認めることができる。12月下旬から1月上旬にかけての小さな値や1月下旬の大きな値などのゆっくりした変動は3機関の結果とも類似している。各機関の数値モデルは独立に開発されたものなので、このような変動にはモデルに伴う系統的な誤差の変動よりも、大気の振舞いのカオス的性質に起因する誤差成長の変動が大きく寄与していると考えられる。つまり、大気循環場の変動に伴って初期値誤差の拡大率が変動したことが示唆される。

実際、この期間の大気循環場を見ると、12月末から1月中旬にかけては中緯度ジェットは直流型で、誤差が大きくなった1月末から2月初めにかけて蛇行（プロッキング）型に遷移していることがわかる。このような循環場の変動に伴う誤差成長変動の可能性は、1980年代後半になって指摘されるようになった。概念化した低次モデルから現業の予報モデルまでを用いて、幅広く研究が進められている。また、毎日の業務として中期予報が出されその結果が蓄積されているので、長年にわたる予報結果のデータ解析をすることにより循環場と誤差成長の関連の統計的有意性を示すことが可能になりつつある。このような研究は、延長予報の可能性を追求する上で重要な解析の1つとなるであろう。

3. 誤差成長の変動に関する理論

この節では、非線型力学系の理論で導入された有限時間アプローフ安定性の概念を紹介する（余田ほか、1992；Yoden and Nomura, 1993；山根, 1998；Yamane and Yoden, 1999）。他分野では特異値解析として知られてきた内容もある。モデルは完璧で系統的な誤差がないと仮定し、初期値誤差を真の解に加えられた微小な摂動であるとして、その線型的な発展だけを考えることにする。一般に微小な摂動が増幅するとやがて有限振幅となり、線型の仮定が妥当性を失う。線型近似の成り立つ期間は考える系と初期値誤差の大きさに依存するが、ここではこれらを特定しないで線型の範囲内で理論を展開する。実際に具体的な系を解析するときには、線型近似の成り立つ期間を認識しておく必要がある。

3.1 非線型力学系における基準解と摂動

n 次元の非線型力学系（連立常微分方程式系）を考える：

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n. \quad (1)$$

初期条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ を与えれば、(1)式の解 $\mathbf{x}(t)$ は一意的に定まる。この解を基準解と呼ぶこととする（第3図）。ある時刻 $t = t_1$ において、基準解 $\mathbf{x}(t_1)$ に微小な摂動 $\mathbf{y}(t_1)$ を加えると、その時間発展 $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^n$ は(1)式を局所的に線型化した方程式（接線方程式、変分方程式などと呼ばれる）で記述できる：

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y}(t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}(t)) \mathbf{y}(t). \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{J}(\mathbf{x}(t))$ は \mathbf{F} の $\mathbf{x}(t)$ におけるヤコビアン行列 ($J_{ij} \equiv \partial F_i / \partial x_j$) である。(2)式を t_1 から $t_2 = t_1 + \tau$ まで時間積分した解は、行列 $\mathbf{M}(t_2, t_1)$ を用いて線型写像の形で表される：

$$\mathbf{y}(t_2) = \mathbf{M}(t_2, t_1) \mathbf{y}(t_1). \quad (3)$$

行列 $\mathbf{M}(t_2, t_1)$ はレゾルベント、伝播行列、基本行列といった様々な呼び名があるが、ここでは Lorenz(1965) に倣って誤差行列と呼ぶこととする。

時刻 t_1 から t_2 の間における摂動の拡大率は、 \mathbf{R}^n 上のノルム $\| \cdot \|$ を用いて、

$$\gamma(t_2, t_1, \mathbf{y}(t_1)) \equiv \frac{\|\mathbf{y}(t_2)\|}{\|\mathbf{y}(t_1)\|} = \frac{\|\mathbf{M}(t_2, t_1) \mathbf{y}(t_1)\|}{\|\mathbf{y}(t_1)\|} \quad (4)$$

と表される。ここで、ノルムは、ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} の内積を $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$ として、 $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$ である。ただし、 T は転置を表す。(4)式は、摂動の拡大率 $\gamma(t_2, t_1, \mathbf{y}(t_1))$ が時刻 t_1 から t_2 までの解軌道 $\mathbf{x}(t)$ だけでなく初期摂動 $\mathbf{y}(t_1)$ の向きにも依存することを表している。

この摂動がランダムで等方的であるとし、分散 a^2 のガウス分布を仮定すると、初期摂動の確率密度関数は次で与えられる：

$$p(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} a^n} \exp\left\{-\frac{1}{2a^2} \sum_{i=1}^n y_i^2\right\}. \quad (5)$$

位相空間内での等確率密度面は、 $\sum_{i=1}^n y_i^2 = \varepsilon^2 = \text{一定}$ 、という半径 ε の n 次元球となる。

力学系(1)をある数値天気予報モデルとするならば, $\mathbf{x}(t)$ が予報変数(各格子点値または各スペクトル係数値)となり, n が $10^{6\sim 7}$ オーダーの大自由度の力学系となる。 $\mathbf{x}(t)$ が真の状態で, $\mathbf{y}(t)$ が初期値に含まれる小さな誤差の線型的な時間発展を表すことになる。

3.2 特異値解析

摂動の確率密度関数が有限時間 $\tau (=t_2 - t_1)$ に発展する様子は, 誤差行列 \mathbf{M} の特異値解析により調べることができる (Legras and Vautard, 1996). 特異値解析は固有値解析に比べて不當に軽い扱いを受けているのが普通のようであるが, 流体力学・弾性体力学など, 一般に変形体の力学と呼ばれる分野では基本的で重要な解析方法である (森口, 1987).

行列 \mathbf{MM}^t の n 個の固有値の平方根 σ_i ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$) を行列 \mathbf{M} の特異値といい, 行列 \mathbf{M} は \mathbf{U} と \mathbf{V} の 2 つの直交行列 (${}^t\mathbf{U}\mathbf{U} = \mathbf{U}^t\mathbf{U} = \mathbf{E}$, ${}^t\mathbf{V}\mathbf{V} = \mathbf{V}^t\mathbf{V} = \mathbf{E}$) と特異値 σ_i をその成分とする対角行列 \mathbf{D} により次式のように特異値分解できる (伊理, 1994) :

$$\mathbf{M} = \mathbf{U} \mathbf{D}^t \mathbf{V}. \quad (6)$$

直交行列 \mathbf{U} と \mathbf{V} が, それぞれ, ベクトル \mathbf{u}_i と \mathbf{v}_i から成るとすると ($\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n]$, $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$), (6) 式は次のように書き換えられる :

$$\mathbf{M}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, \quad {}^t\mathbf{M}\mathbf{u}_i = \sigma_i \mathbf{v}_i, \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

$\{\mathbf{u}_i\}$ と $\{\mathbf{v}_i\}$ はそれぞれ正規直交基底を成す。 \mathbf{u}_i を左特異ベクトル, \mathbf{v}_i を右特異ベクトルと呼ぶ。また, (6) 式より,

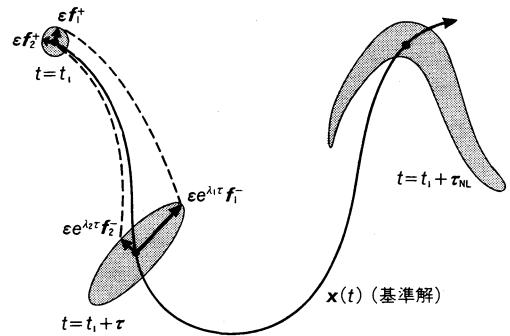
$${}^t\mathbf{M}\mathbf{M}\mathbf{V} = \mathbf{D}^2 \mathbf{V}, \quad \mathbf{M}^t\mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{D}^2 \mathbf{U} \quad (8)$$

であるので, \mathbf{v}_i は行列 ${}^t\mathbf{M}\mathbf{M}$ の固有値 σ_i^2 に対応する固有ベクトル, \mathbf{u}_i は行列 $\mathbf{M}^t\mathbf{M}$ の固有値 σ_i^2 に対応する固有ベクトルとして求めることができる。

ここで摂動の拡大率を考える。 $\|\mathbf{M}\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{M}\mathbf{y}, \mathbf{M}\mathbf{y} \rangle = \langle {}^t\mathbf{M}\mathbf{M}\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$ であるので, (8) 式より,

$$\gamma(t_2, t_1, \mathbf{v}_i) = \sigma_i(t_2, t_1) \quad (9)$$

である。つまり, 初期摂動が右特異ベクトル \mathbf{v}_i に平行であるとき, 摂動の拡大率は誤差行列 \mathbf{M} の特異値に等しい。また, このとき, (7) 式より \mathbf{v}_i が τ 時間後に



第3図 非線型力学系における摂動(初期値誤差)の成長を示す概念図(余田, 1995より)。摂動が微小な場合には, $t=t_1$ において n 次元相空間内で球であったものが $t=t_1+\tau$ では橢円体に変形する。摂動が大きくなり有限振幅になると, 橢円体ではなくなる ($t=t_1+\tau_{NL}$)。

は $\sigma_i \mathbf{u}_i$ となる。この時間経過を意識して, \mathbf{v}_i を前方特異ベクトル, \mathbf{u}_i を後方特異ベクトルと呼ぶ。第3図に示すように初期摂動の等確率密度面を基準解 $\mathbf{x}(t_1)$ のまわりの n 次元球 (${}^t\mathbf{y}(t_1)\mathbf{y}(t_1) = \varepsilon^2$) とすると, 時刻 t_2 では(3)式より

$${}^t\mathbf{y}(t_2) [\mathbf{M}^t \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{y}(t_2) = \varepsilon^2 \quad (10)$$

となり, n 次元橢円体に変形される。橢円体の主軸長は $\varepsilon \sigma_i$ であり, 主軸方向は後方特異ベクトル \mathbf{u}_i で与えられる。また, (7)式に示されるように, 橢円体の主軸方向となるべき初期の球における方向が前方特異ベクトル \mathbf{v}_i である。

3.3 前方リアノフ安定性解析

大気は強制散逸系であるが, 一般に力学系(1)が強制散逸系である場合, 解軌道 $\mathbf{x}(t)$ は初期条件に関わらずアトラクタに漸近する(エネルギー散逸のある力学系で解軌道が落ち込む極限集合のことをアトラクタという)。アトラクタには, 時間変化しない不動点や周期変化するリミットサイクルなどの「奇妙でない」アトラクタとカオス解の「奇妙な」アトラクタとがある。以下ではカオス解を中心に考えて, 「奇妙な」を略して単にアトラクタと書くことにする。このアトラクタの大域的な性質を特徴づける指標としてリアノフ指数があるが, それをここでの表記法で定義し, 新たに有限時間リアノフ指数を導入する。

t_1 を固定して $t_2 \rightarrow \infty$ とした場合の線型摂動 $\mathbf{y}(t)$ の

漸近的な振舞いによりリアブノフ指数が定義できる。
 \mathbf{R}^n のある正規直交基底 $\{\mathbf{f}_i(t_1)\}$ に対して,

$$\lambda_i = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \|\mathbf{M}(t_2, t_1) \mathbf{f}_i(t_1)\| \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \ln |\det(\mathbf{M}(t_2, t_1))| \quad (12)$$

が成り立つとき, λ_i ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$) をリアブノフ指数, $\mathbf{f}_i(t_1)$ を(前方)リアブノフベクトルといふ。(11)式から分るように, リアブノフ指数 λ_i は前方リアブノフベクトル方向の摂動の指數関数的な成長率を表す。リアブノフ指数は初期時刻やノルムの選択に依存せず, アトラクタの大域的な性質を表す指標として用いられる。最大リアブノフ指数 λ_1 が正であれば, ほとんどすべての摂動は指數関数的に拡大するので, 解軌道 $\mathbf{x}(t)$ は不安定である。これがカオスの数学的な定義である。(12)式は, リアブノフ指数の和が n 次元体積の指數関数的な変化率を表すことを意味する。保存系の場合には $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ であり, 散逸系の場合には $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$ である。

アトラクタのフラクタル次元はリアブノフ指数 λ_i を用いて次のように見積ることができる:

$$D_{\text{KY}} = j + \frac{1}{|\lambda_{j+1}|} \sum_{i=1}^j \lambda_i. \quad (13)$$

ここで, j は $\sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0$ を満たす整数である。
 D_{KY} はカブラン-ヨーク次元(またはリアブノフ次元)と呼ばれ, 部分空間の次元を増やしていくときに伸びも縮みもしなくなる(指數関数的な成長率がゼロとなる)次元を意味する。

つぎに, 有限時間で対応する指標を考える:

$$\begin{aligned} \lambda_i(t_2, t_1) &= \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \|\mathbf{M}(t_2, t_1) \mathbf{v}_i(t_2, t_1)\| \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \sigma_i(t_2, t_1). \end{aligned} \quad (14)$$

これを有限時間(または局所的)リアブノフ指数と呼び, 前方特異ベクトル $\mathbf{v}_i(t_2, t_1)$ を有限時間(局所的)リアブノフベクトルと呼ぶ。有限時間リアブノフ指標は初期時刻と評価期間に依存する。評価期間を長くして $t_2 \rightarrow \infty$ の極限をとれば, (11)式のリアブノフ指標と一致し, 前方特異ベクトルはリアブノフベクトルに漸近する。評価期間を固定すれば, 一般に摂動の成長率が基準解に依存して時間変動することを表している。

つまり, 有限時間リアブノフ指標は予報誤差の成長率の大気循環場に対する依存性を表す線型的な指標となる。

3.4 後方リアブノフ安定性解析

解軌道 $\mathbf{x}(t)$ が時刻 t_1 からアトラクタ上に存在すると仮定すれば, 前小節の内容と同様のことが t_2 を固定して $t_1 \rightarrow -\infty$ とした場合にも成り立つ。これが後方リアブノフ安定性解析である。 \mathbf{R}^n のある正規直交基底 $\{\mathbf{g}_i(t_2)\}$ に対して,

$$\lambda_i = \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \|\mathbf{M}(t_2, t_1) \mathbf{g}_i(t_2)\| \quad (15)$$

が成り立つ。ここで $\mathbf{g}_i(t_2)$ を後方リアブノフベクトルと呼ぶ。 $\mathbf{g}_i(t_2)$ は時刻 t_2 とノルムの選択に依存する。

また, 有限時間で対応する指標を考えることもできる:

$$\begin{aligned} \lambda_i(t_2, t_1) &= \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \|\mathbf{M}(t_2, t_1) \mathbf{u}_i(t_2, t_1)\| \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \sigma_i(t_2, t_1) \end{aligned} \quad (16)$$

これも, $t_1 \rightarrow -\infty$ の極限でリアブノフ指標と一致し, 後方特異ベクトル $\mathbf{u}_i(t_2, t_1)$ は $\mathbf{g}_i(t_2)$ に漸近する。

3.5 予測可能性の指標

有限時間リアブノフ指標のスペクトル $\{\lambda_i(t_2, t_1)\}$ は, 予測可能性の変動を表す線型的な指標である。その最大値 λ_1 だけに注目することがある。また, 予測可能性の指標としてこれらの何らかの平均値を用いることもある。時刻 t_1 における初期摂動の向きが \mathbf{R}^n 空間で等方的であると仮定したときに期待される摂動の平均的な拡大率は, 特異値の 2 乗平均平方根で与えられる:

$$\alpha(t_2, t_1) \equiv \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \gamma(t_2, t_1, \mathbf{v}_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2} \quad (17)$$

この誤差成長の指標 $\alpha(t_2, t_1)$ は Lorenz (1965) により導入されたことからロレンツインデックスと呼ばれ, 解軌道の局所的な安定性を表す指標として用いられている(例えば, Mukougawa *et al.*, 1991; Kimoto *et al.*, 1992; Yamane and Yoden, 1997など)。

これらの線型的な指標を求める手続きを以下にまとめておく:

(i) (1) 式を時間積分して基準解 $\mathbf{x}(t)$ を求めるのと並行して, n 個の独立な初期値から(2)式を

- n 回時間積分することにより、誤差行列 $\mathbf{M}(t_2, t_1)$ を求める。
- (ii) $\mathbf{M}(t_2, t_1)$ の特異値解析を行う。すなわち、(8) 式より、特異値 $\sigma_i(t_2, t_1)$ 、前方特異ベクトル $\mathbf{v}_i(t_2, t_1)$ 、後方特異ベクトル $\mathbf{u}_i(t_2, t_1)$ を求める。
- (iii) 有限時間リアノフ指数 $\lambda_i(t_2, t_1)$ 、ロレンツインデックス $\alpha(t_2, t_1)$ などを計算する。

4. 有限時間リアノフ解析の実例

前節で線型的な誤差成長の変動と基準解との関係を定式化出来たわけであるが、実際にどのような関係があるかは考える系に依存するし、準定常状態 (Mukougawa, 1988) というような流れ場を特徴づける要因との関連も具体的に調べていくしかない。Mukougawa *et al.* (1991) では、ロレンツアトラクタ (Lorenz, 1963) 上で、ロレンツインデックスがどのような分布になっているかを求めて、系の状態に依存して誤差成長の指標が変動することを例示した。また、準定常状態に入る時期に誤差成長が小さく、その期間中に徐々に大きくなることを示した。25元の低次モデルでも同様の関係を得たが、このような1次元的なイメージが多次元では必ずしも成り立たない可能性がある (Yamane and Yoden, 1997)。

これらのように少数自由度の低次モデルでは、接線方程式 (2) の時間積分を繰り返すことにより誤差行列 \mathbf{M} を求めて特異値解析を行うことができる。しかし、系の自由度がおよそ 10^3 オーダー以上になると、今の計算機資源では誤差行列を求めることが難しくなる。これに代わる方法の1つとして随伴 (アジョイント) モデルを用いる方法がある。客観解析法の1種の4次元変分法によるデータ同化においては、随伴モデルをつくり過去に向かって時間積分することになるが、それを応用して有限時間リアノフ指数と対応するベクトルを指数が大きい順に求めることができる (データ同化の解説はこのシンポジウムの露木義氏の基調講演にあった)。また、アトラクタに接する部分空間を考えて、その中の誤差成長の変動を考えることができる (山根, 1998; Yamane and Yoden, 1999)。T42切断の全球順圧モデル ($n=1848$) で得られた不規則変動する基準解では、アトラクタ次元に近い8次元部分空間で定義したロレンツインデックスが (17) 式で定義した従来のロレンツインデックスと高相関を示すことがわかった。この結果は、計算コストを2桁以上節約して実質的な有限時間リアノフ解析ができる可能性を示

している。

5. 数値天気予報への応用

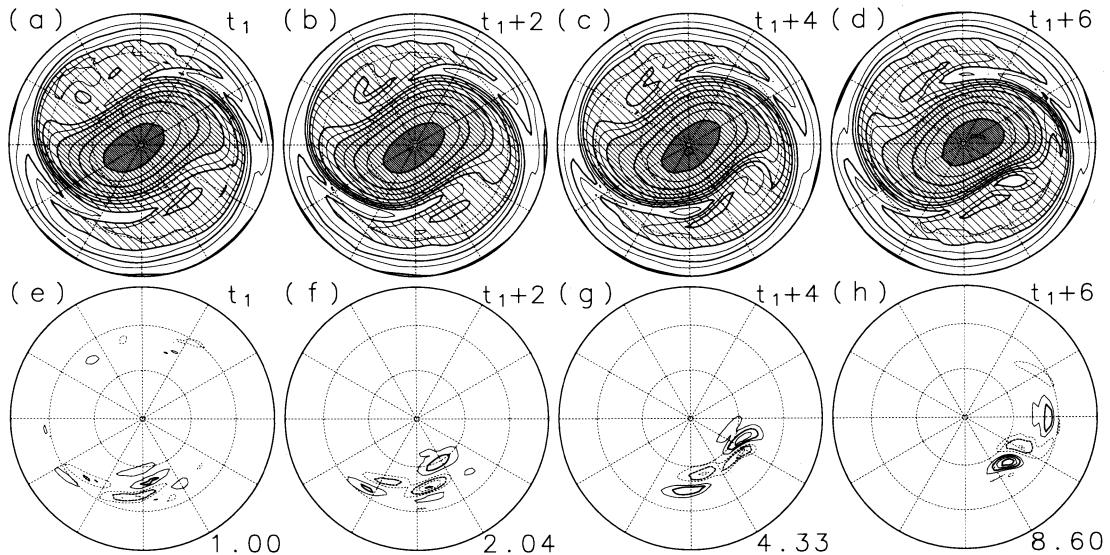
Kimoto *et al.* (1992) は現業で予報誤差を予測する簡便法として、基準解は数値天気予報モデルで求めて有限時間リアノフ解析は簡単な順圧モデルで行うという方法を提案したが、時代は一気にアンサンブル (集團) 予報に移ってしまった。また、最近では同解析法を用いた機動的な観測網構築の提案がなされている。

5.1 アンサンブル予報

有限時間リアノフ解析はあくまで初期値誤差の線型成長の理論である。誤差が大きくなると非線型性が重要となり、ランダム誤差は梢円ではなくなる (第3図で $t=t_1+\tau_{NL}$ の段階)。すなわち、接線方程式 (2) をもとに $\mathbf{y}(t_1)$ の線型結合として表される $\mathbf{y}(t_1)$ と、もとの非線型系 (1) で $\mathbf{x}(t_1) + \mathbf{y}(t_1)$ を初期値として直接解いて求めた摂動との差が無視できないほどに大きくなる。いまの全球予報モデルの場合、非線型性が効いてくる時間は1日程度と考えられている。初期値誤差の非線型成長を把握するには、アンサンブル予報を行うのが常道である。アンサンブル予報とは、ただ1つの初期値から予報するのではなく、多くの似たような初期値から時間積分を繰り返して行い、それらの結果の平均値や個々のバラツキなどの統計をもとに予報を行うものである (アンサンブル予報の具体的な解説はこのシンポジウムの高野清治氏の基調講演にあった)。個々の予報の分散はそのまま予報誤差の大きさを見積る指標となるが、さらに様々な情報を含んでいる。いま、現業モデルを用いたアンサンブル予報の結果が蓄積されつつあるが、アンサンブル予報のデータからどのような情報が取り出せ得るかを研究することは、より高度な天気予報情報を提供するうえで重要な課題の1つである。

ところで、アンサンブル予報をするときには、個々の初期値をどう与えるかが大きな問題となる。従来の初期値に小さなゆらぎを加えてそれぞれの初期値とするのだが、このゆらぎの与え方が問題である。非常に多数の初期値から何回も時間積分できるのであれば、さいころを振って確率的にゆらぎを与えれば良いのかもしれないが、高々数十回の時間積分しか出来ないので、ゆらぎの与え方には工夫が必要である。

ECMWF では、粗い解像度の3次元準地衡近似モデルで有限時間リアノフ解析を行い、指数の大きいほうから順に前方特異ベクトル $\mathbf{v}_i(t_2, t_1)$ の向き (正と負



第4図 (a-d) ある全球順圧モデルで得られた不規則変動する基準解で、評価時間 $\tau = 6$ 日の部分空間ロレンツインデックスが最大となる期間におけるポテンシャル渦度の時間変動、および、(e-h) 摂動の拡大率が最大となる有限時間リアノフベクトルの線型時間発展 (Yamane and Yoden, 1999)。北半球のみをランベルト正積方位図法で示す。左が経度0度、下が90度とする。(e-h) では摂動の大きさを1に規格化してセンターを引き、実際の摂動の大きさを右下の数字で示す。

と両方) にゆらぎを与えていた。このようなゆらぎは SVs (Singular Vectors) と略称されることがある。一方、NCEP では BGMs (Bred Grown Modes) と略称されるゆらぎを与えていた。その「理論的な定義」は、後方リアノフベクトル、即ち(15)式の $g_i(t_2)$ であるが、実際の「現業での定義」は少し異なるものになっている。現業モデルにおいても山根 (1998) のような再直交化の手続きを繰り返し行えるのであれば、理論的な定義通りのゆらぎを与えることができるはずである。何れの方法が良いかはモデルの完璧度にも依存しており、今も議論が続いている(例えば、Yamane and Yoden, 1999)。

5.2 機動的な観測網の構築

最大の有限時間リアノフ指数に対応する前方特異ベクトルを実空間で描けば、どのような空間分布の初期値誤差が最も増大するかを見ることができる。第4図はある全球順圧モデルを用いた解析例 (Yamane and Yoden, 1999) で、評価時間 $\tau = 6$ 日の部分空間ロレンツインデックスが最大となる期間におけるポテンシャル渦度 (PV) の時間変動、および最大の有限時間リアノフ指数に対応するベクトルの線型時間発展を 2 日毎に示す。中緯度で経度90度あたりに置いた擾乱が最大発達する (e-h) が、そこはちょうど低緯度の

低 PV 流体がストリーマー状に中緯度に入り込むところ (a-d) で、局所的に順圧不安定な場所となっている。

このように、初期値誤差が最大発達する場所を事前に特定できるならば、その付近の観測精度をあげて初期値誤差を小さくすることにより、実際の予報精度をあげることができるかもしれない。これが、機動的な観測網構築の提案である (Snyder, 1996; Palmer *et al.*, 1998)。すなわち、飛行機観測などルーチン的でない手段で特定の領域の観測を充実させて、数値天気予報の精度を向上させようという目論見である。

ところで、有限時間リアノフ解析を行う際のノルムの選び方には任意性がある。第4図の例では全球均質な重みでノルムを定義したが、例えば、日本域に重みを置いてやると、 τ 日先の日本域の予報精度をあげるにはどの領域の観測を充実すべきか、という目安が得られることになる。

6. おわりに

これまで述べてきた予測可能性の研究は、ロレンツの先駆的研究を抜きにあり得ない。数値天気予報モデル自体が未だ揺籃期にあったときに予測の限界を指摘することは、モデルの開発に水をさすことであったかもしれないが、彼の真意は「気象観測システムや数値

天気予報モデルは改善の余地が大きいにあるので、期間を限定すればそれらの努力によってより良い予報ができるようになる」という点にあった (Lorenz, 1993)。事実、ECMWF で毎日の10日間予報が始まれば、いち早くその予報結果のデータをもとに誤差成長の解析を行っている (Lorenz, 1982)。また、今年になって機動的な観測網構築に関する論文を発表している (Lorenz and Emanuel, 1998)。1917年生の彼が1981年に MIT 名誉教授になってからも現役として予測可能性に関する先端的な研究を続けていることに触れるとき、そのような生き方に学ぶことまた考えることが多くある。

参考文献

- Gleick, J., 1987 : Chaos : Making a New Science, Viking Penguin Inc., 352pp.
- 伊理正夫, 1994 : 線形代数II(岩波講座応用数学11), 岩波書店, 291pp.
- Kimoto, M., H. Mukougawa and S. Yoden, 1992 : Medium-range forecast skill variation and blocking transition : A case study, *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 1616-1627.
- Legras, B. and R. Vautard, 1996 : A guide to Liapunov vectors, Seminar Proceedings on Predictability, Vol. I, ECMWF, 141-156.
- Lorenz, E. N., 1963 : Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.*, **20**, 130-141.
- Lorenz, E. N., 1965 : A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model, *Tellus*, **17**, 321-333.
- Lorenz, E. N., 1982 : Atmospheric predictability experiments with a large numerical model, *Tellus*, **34**, 505-513.
- Lorenz, E. N., 1993 : The Essence of Chaos, Univ. of Washington Press, 227pp.
- Lorenz, E. N. and K. A. Emanuel, 1998 : Optimal sites for supplementary weather observations : Simulation with a small model, *J. Atmos. Sci.*, **55**, 399-414.
- 森口繁一, 1987 : 数値計算術(計算機科学/ソフトウェア技術講座6), 共立出版, 248pp.
- Mukougawa, H., 1988 : A dynamical model of "quasi-stationary" states in large-scale atmospheric motions, *J. Atmos. Sci.*, **45**, 2868-2888.
- Mukougawa, H., M. Kimoto and S. Yoden, 1991 : A relationship between local error growth and quasi-stationary states : Case study in the Lorenz system, *J. Atmos. Sci.*, **48**, 1231-1237.
- Palmer, T. N., R. Gelaro, J. Barkmeijer and R. Buizza, 1998 : Singular vectors, metrics, and adaptive observations, *J. Atmos. Sci.*, **55**, 633-653.
- Snyder, C., 1996 : Summary of an informal workshop on adaptive observations and FASTEX, *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **77**, 953-961.
- 時岡達志, 山岬正紀, 佐藤信夫, 1993 : 気象の数値シミュレーション(気象の教室5), 東京大学出版会, 247pp.
- Yamane, S. and S. Yoden, 1997 : Predictability variation and quasi-stationary states in simple non-linear systems, *J. Meteor. Soc. Japan*, **75**, 557-568.
- 山根省三, 1998 : 大気循環の変動と予測可能性についての理論的・数値的研究, 京都大学大学院理学研究科博士学位論文, 73pp.
- Yamane, S. and S. Yoden, 1999 : A new method of finite-time Lyapunov stability analysis in large systems, submitted to *J. Meteor. Soc. Japan*.
- 余田成男, 木本昌秀, 向川均, 野村真佐子, 1992 : カオスと数値予報—局所的リアプロフ安定性と予測可能性—, *天気*, **39**, 593-604.
- Yoden, S. and M. Nomura, 1993 : Finite-time Lyapunov stability analysis and its application to atmospheric predictability, *J. Atmos. Sci.*, **50**, 1531-1543.
- 余田成男, 1995 : カオスと気象予測, *科学*, **65**, 305-313.