



## メソ気象力学の基礎 (I)

小倉 義光\*

### 1. はじめに

メソ気象講習会のトップバッターとして、「メソ気象力学の基礎」について2回講義をした。この講義をお引き受けしてから、一番迷ったのは何をお話すべきか、受講者をどう想定するかであった。主催者の方ともご相談して、受講者を次のように想定した。気象学は一通り学習した。しかし微分・積分については、学生時代に習ったが、卒業後はパソコン用のソフト開発やデータ解析に没頭し、微積分を日常業務で使うことはなかったの、ほとんど忘れてしまった。微分方程式とかいうものには全く縁がなかった。

なぜ微積分にこだわるかというと、本講義の主題が「専門課程」として企画された気象力学の基礎だからである。力学は物体に働く力と運動の関係を扱う学問である。すなわち、物体に力が働いたら、その物体はどう動くかを議論する。最も扱いやすい力学は質点の力学である。質量はあるが、大きさは持たない仮想的な物体を質点という。地球の引力をうけて地球の周りを回転する月の運動はほぼ質点の力学で記述される。第7節で、質点とみなしたリングの落下運動を解説する。次に複雑なのが剛体の力学である。質量も大きさも持っているが、形を変えない物体の力学である。ここでは、剛体の重心の動きや、重心の周りの回転運動などが議論の対象となる。

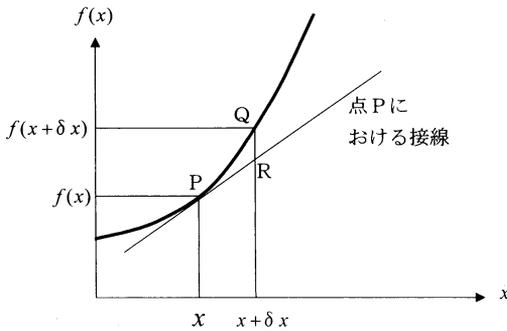
最も複雑なのが流体の力学である。空気や水のように、形を自由に変える物体が流体である。地球の大気は地球引力をうけつつ、空間いっぱい広がる。その大気の運動を議論するために、大気の一部だけに注目して、それを空気塊あるいはパーセル(parcel)と呼び、それがあたかも質点であるかのように扱うことがある。その例が第8節に述べてある。

しかし、流体の特性として、大気中の空気塊はいつも周りから圧力を受けている。よく知られた気圧傾度力である。気塊が動けば、その隙間を埋めるように周りの空気も動く。一般的に大気中の温度は一樣に分布していないから、空気が動けば温度分布も変わる。気圧の分布も変わる。気圧傾度力も変わって、これが新たな運動を引き起こす。このように、気象の力学では、単に与えられた力が物体に働いたとき、その物体がどう動くかだけでなく、運動に伴って、物体に働く力(気圧傾度力、問題によってはコリオリ力など)そのものも変わることを考慮する必要がある。この力と運動のいたちごっこを数式で表現したのが気象力学の運動方程式である。この方程式は微分を含む。それで運動方程式は微分方程式である。その微分方程式を積分して求めた解が、大気の運動と大気の状態(気温や気圧などの分布)の変化の記述となる(例は第9節)。それで、例えば「新教養の気象学」(日本気象学会、1998)や「一般気象学第2版」(小倉、1999)の域を越え、メソ気象に含まれる力学過程の理解を一段とステップアップしようとするれば、微分とはなにか、微分方程式の一種である運動方程式とはどんな式か、微分方程式の解を求めるとはそもそもどんなことをするのか、一通り勉強する必要がある。それをするのが本講義の目的である。

そして、この勉強は単にメソ気象のみならず、数値予報の理解にも役立つはずである。数値予報は数値予報モデルというものをを用いている。そのモデルの中身は、本講義で述べる運動方程式と熱力学の方程式を基幹として、水蒸気の凝結や放射など、いろいろな物理過程を数式化した微分方程式の集合体である。その集合体をコンピュータを用いて数値的に積分し解を求めたのが予報対象となる将来の気象である。今日の数値予報モデルは精緻に構築されており、その詳細は専門家にしか分からないが、少なくとも数値予報モデルは中身の分からないブラックボックスではなく、多少お

\* Yoshimitsu Ogura, 財団法人日本気象協会.

© 1999 日本気象学会



第1図 導関数の説明図.

なじみとなるはずの微分方程式の群れなのだということは分かるはずである。

本を書くときと違って、教室で講義するときの利点は、受講者との対話を通じて（ときには対話のないことを通じて）、その場で講義の内容をある程度補足・調整できることである。この原稿はそのような調整をした後の講義の内容である。時間が足りなかったため、講義の際には省略した内容の一部も復活している。

この解説には、数式の演算がどの教科書にも書いてないほど省略なしに書いてある。それでも単に目で見ただけでなく、手と鉛筆で一度だけ演算をなぞってほしい。ある程度の慣れが必要である。そして、まず除いてほしいのは、微分という言葉や、 $\partial/\partial x$  という記号に対する拒否反応である。

## 2. 微分の演算の復習

### 2.1 微分と導関数

気温や風速など、ある物理量が独立変数  $x$  が変わると共に変わるとき、その物理量は  $x$  の関数 (function) であるといい、記号  $f(x)$  で表す (第1図)。  $x$  の値が微量  $\delta x$  だけ増したときの関数の値を  $f(x + \delta x)$  と書く (図の Q 点)。  $f(x + \delta x)$  と  $f(x)$  の差が、  $x$  の増し分  $\delta x$  に応じた関数の増し分である。  $\delta x$  を小さくすると、当然関数の増し分も小さくなるが、  $\delta x$  を無限小の極限 (limit) にもっていったとき、関数の増し分と  $x$  の増し分の比を、その関数の導関数あるいは微分係数という。記号で書けば、

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} \quad (2.1)$$

である。導関数は図の P 点における接線の傾きを表

第1表 主な関数とその導関数.

関数	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$e^x$	$\ln x$
導関数	$\cos x$	$-\sin x$	$\sec^2 x$	$e^x$	$1/x$

す。導関数を求める演算を微分という。

早速、例をあげよう。  $x^2$  という関数を考える。このとき、関数の増し分と  $x$  の増し分の比は、

$$\frac{\text{関数の増し分}}{x \text{ の増し分}} = \frac{(x + \delta x)^2 - x^2}{\delta x} = 2x + \delta x \quad (2.2)$$

であるから、  $\delta x$  を限りなく 0 に接近させると、上記の比は  $2x$  となる。従って、  $x^2$  の導関数は  $2x$  である。

式 (2.1) で定義したものは、実は 1 次の導関数といわれているもので、これらをさらに  $x$  で微分したものが 2 次の導関数  $d^2f/dx^2$  である。ちなみに、導関数の英語は derivative で、近頃新聞の経済欄などによく登場するデリバティブ (金融派生商品) と同じ言葉である。導関数は関数から派生した関数の一種である。

この講義で使う関数は、  $\sin x$  や  $\cos x$  などの三角関数、  $e = 2.718\cdots$  という特別な値を底とする指数関数  $e^x$ 、自然対数 (natural logarithm) 関数  $\ln x$ 、さらに  $n$  を任意の実数として  $x^n$  ( $x$  の  $n$  乗) か、またはそれらの組み合わせである。それらの関数の導関数は第1表にまとめてある。導関数を逆に積分すれば、もとの関数が得られる。

次に、例えば  $(1+x^2)^2$  という関数  $f(x)$  を微分する。仮に  $\xi = 1+x^2$  とおけば、与えられた関数は  $f(\xi) = \xi^2$  である。このときの微分の一般的なルールは

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \quad (2.3)$$

である。それでいまの関数の微分は  $4x(1+x^2)$  である。  $e^{ax}$  の微分は  $ae^{ax}$  である。

次に  $f(x)$  と  $g(x)$  を  $x$  の任意の関数とすると、微分のルールは、

$$\frac{d}{dx}(fg) = f \frac{dg}{dx} + g \frac{df}{dx} \quad (2.4)$$

である。従って  $x \cos x$  の微分は  $\cos x - x \sin x$  である。

### 2.2 関数の近似式

この講義ではテイラーの級数展開をしばしば使う。まず説明の順序として、関数  $f(x)$  の一次導関数を

$f'(x)$ , 2次導関数を  $f''(x)$ , ……と書くことにすると,  
 $f''(x)$  の定義式から,

$$\frac{df'(x)}{dx} = f''(x) \quad (2.5)$$

である。これを  $x$  の 0 から  $x$  まで定積分すると,

$$f'(x) - f'(0) = \int_0^x f''(x) dx \quad (2.6)$$

となる。いま,  $x$  は小さい値であって, 0 から  $x$  までの狭い範囲では, 右辺の  $f''(x)$  は  $x=0$  における値  $f''(0)$  で近似できるとすると, 右辺は,

$$\text{右辺} \approx f''(0) \int_0^x dx = f''(0)x \quad (2.7)$$

となる。ここで  $\approx$  は近似的に等しいという記号である。これを式 (2.6) に代入すると,

$$f'(x) \approx f'(0) + f''(0)x \quad (2.8)$$

が得られる。次に同じことを  $f'(x)$  について行う。

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) \quad (2.9)$$

を 0 から  $x$  まで定積分すると,

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(x) dx \quad (2.10)$$

が得られる。右辺に式 (2.8) を代入して積分すると, 結局,

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 \quad (2.11)$$

が得られる。

上記では  $f''(x)$  から出発したが, もっと高次の導関数から出発すれば, もっと高い精度の近似式が得られる。さらに, これを一般化すると,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \dots \quad (2.12)$$

というように,  $x$  が小さいときには,  $f(x)$  を  $x$  のべき乗の無限級数として書くことができる。これをマクローリン (MacLaurin) の級数という。ここで,  $n!$  は階乗で,  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$  である。

これをさらに一般化したのが, 次のテイラー (Taylor) の級数である:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2f''(a) + \frac{1}{6}(x-a)^3f'''(a) + \dots + \frac{1}{n!}(x-a)^nf^{(n)}(a) + \dots \quad (2.13)$$

そして  $f(x)$  をこのような無限級数に展開できるというのがテイラーの定理である。かつての物理数学の標準的教科書であった「自然科学者のための数学概論」(寺澤, 1941) が, この定理は「微分学において最も重要な定理であって, もしこの定理なかりせば微分学の活用範囲は実に哀れなものであろう」というほど, ありがたい定理である (次節参照)。

さて, 式 (2.13) において,  $x-a = \delta x$  とおき,  $\delta x$  は微量だから  $\delta x$  の 2 次以上の高次の項は省略して,

$$f(x + \delta x) \approx f(x) + f'(x)\delta x \quad (2.14)$$

とする。この近似は, 第 1 図において, 点 Q と P における  $f(x)$  の差を, 点 R と P における  $f(x)$  の差で近似したのと同じである。高校や大学の一般教養課程の数学では, 式の左右両辺がきっちり等しいという等式だけを扱ってきたが, 自然科学では式 (2.14) のような近似式を頻繁に使う。マクローリン級数の場合でも,  $x$  が 1 より十分小さいときには,

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x \quad (2.15)$$

と近似できる。従って, 次のように近似できることを練習問題としてやってほしい:

$$\sin x \approx x, \cos x \approx 1 \quad (2.16)$$

$$e^x \approx 1 + x, \ln(1+x) \approx x \quad (2.17)$$

### 2.3 偏微分

次に, 例えば地表面の気温の分布のように, ある物理量が 2 つの独立変数  $x$  と  $y$  の関数であるとして,  $f(x, y)$  と表す。これまで述べてきた微分(常微分という)をほんの少し拡張して, 偏微分というものを考える。  $y$  の値は固定しておいて,  $x$  の値だけが  $x$  から  $x + \delta x$  まで増したとき, 関数の増し分と  $x$  の増し分の比が,  $\delta x \rightarrow 0$  の極限でとる値が  $x$  に関する偏微分である。式 (2.1) と同じような記号で書けば,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta x, y) - f(x, y)}{\delta x} \quad (2.18)$$

である。同じように,  $x$  の値は固定して,  $y$  の値だけが

変わったとき、関数の値がどれだけ変わるかの目安を与えるのが  $y$  に関する偏微分  $\partial f / \partial y$  であって、

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \delta y) - f(x, y)}{\delta y} \quad (2.19)$$

である。例えば  $f(x, y) = x^3 + xy + y^3$  のとき、 $\partial f / \partial x = 3x^2 + y$  であり、 $\partial f / \partial y = x + 3y^2$  である。

従って、式 (2.14) を拡張し、点  $(x = a, y = b)$  から、それぞれ  $\delta x, \delta y$  だけ増した点における関数の値は、 $\delta x$  と  $\delta y$  の 1 次までの項をとって、

$$f(a + \delta x, b + \delta y) \approx f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y \quad (2.20)$$

と近似できる。偏微分はいずれも点  $(a, b)$  における値である。

なお、上に述べたことの大部分は「気象予報の物理学」(二宮, 1998) にさらに詳しく解説されているから、参照していただきたい。

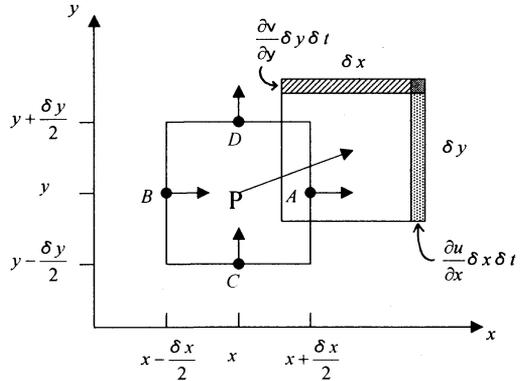
### 3. テイラー級数の応用—発散・収束と個別微分

早速テイラー級数展開の応用例を 2 つ述べよう。この講義では原則として直交直線座標系を用いる。 $x$  軸を東向きに正、 $y$  軸を北向きに正、 $z$  軸を鉛直上方に正にとる。それぞれの方向の速度成分を  $u, v, w$  で表し、座標軸の正の方向を向いている速度成分を正にとる。従って、東風は負、南風は正、下降流は負である。さて第 2 図のように、動いている大気中の水平面上で、 $x, y$  方向の辺の長さがそれぞれ微少量  $\delta x$  と  $\delta y$  の小さな四角形を考える。四角形の中心  $P$  における速度を  $u, v$  とすると、テイラー展開により、

$$\text{点 A における } x \text{ 方向の速度} = u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\delta x}{2}$$

$$\text{点 B における } x \text{ 方向の速度} = u - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\delta x}{2}$$

である。それで点 A と B の速度の差は  $(\partial u / \partial x) \delta x$  である。微小時間  $\delta t$  経った後には、点 P は  $(x + u\delta t, y + v\delta t)$  の位置に移るが、同時にもとの AB 間の距離  $\delta x$  は速度の差に応じて  $(\partial u / \partial x) \delta x \delta t$  だけ  $x$  方向に伸びる。CD 間の距離は  $\delta y$  であるから、これは  $(\partial u / \partial x) \delta x \delta y \delta t$  だけ面積が増えたことになる。(図のシェードした部分)。 $y$  方向についても同じように考えると、点



第 2 図 発散の説明図。

C と D の  $v$  の差は  $(\partial v / \partial y) \delta y$  であるから、 $\delta t$  時間後には  $(\partial v / \partial y) \delta x \delta y \delta t$  だけ面積が増える(図の斜線の部分)。図の四角形を構成する空気はその場の風と共に動いているが、もとの面積  $\delta x \delta y$  は  $\delta t$  時間後には  $(\partial u / \partial x + \partial v / \partial y) \delta x \delta y \delta t$  だけ面積が増えたことになる(図のシェードと斜線が交差した四角形の部分は 2 次の微少量だから無視する)。気象学では速度の水平発散を、目を付けた部分の面積 ( $S$ ) が単位時間に増加する割合で定義する。いまの場合、 $S = \delta x \delta y$  なので、

$$\begin{aligned} \text{水平発散} &= \frac{d(S/S)}{dt} = \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = \frac{1}{\delta x \delta y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \delta x \delta y \delta t \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.1)$$

である(この式の  $d/dt$  については、すぐ後でさらに述べる)。上式により、水平発散は  $(\partial u / \partial x) + (\partial v / \partial y)$  であると定義してもよい。発散量が負のときには収束があるという。

これを拡張して、全次元の発散は、注目した空気の微少部分の容積 ( $V$ ) が単位時間あたり増加した割合として、次のように表現される：

$$\text{3次元の発散} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.2)$$

テイラー展開のもう 1 つの応用例は、温位や水蒸気量などの保存則の数式化である。空気塊が時刻  $t_0$  に点  $(x_0, y_0, z_0)$  にいたとき持っていた物理量を  $q(x_0, y_0, z_0, t_0)$  とする。空気塊が風と共に動き、 $\delta t$  時間後に点  $(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z)$  にきたとき、物理量  $q$  は  $q(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z, t_0 + \delta t)$  という値をとると

すると、単位時間あたりの  $q$  の変化 ( $dq/dt$  という記号を用いる) は、

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\delta t} \{ q(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z, t_0 + \delta t) - q(x_0, y_0, z_0, t_0) \} \quad (3.3)$$

である。右辺の最初の項をテイラー展開すれば、

$$\begin{aligned} & q(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z, t_0 + \delta t) \\ & \approx q(x_0, y_0, z_0, t_0) \\ & + \frac{\partial q}{\partial x} \delta x + \frac{\partial q}{\partial y} \delta y + \frac{\partial q}{\partial z} \delta z + \frac{\partial q}{\partial t} \delta t \end{aligned} \quad (3.4)$$

となるから、式 (3.3) は

$$\frac{dq}{dt} \approx \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial q}{\partial z} \frac{\delta z}{\delta t} + \frac{\partial q}{\partial t} \quad (3.5)$$

となる。 $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  は時間  $\delta t$  の間に空気塊が  $x$ ,  $y$ ,  $z$  の方向に移動した距離なので、 $\delta t$  を小さくしていくと、 $\delta x/\delta t = u$ ,  $\delta y/\delta t = v$ ,  $\delta z/\delta t = w$  となる。従って、

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} \quad (3.6)$$

が得られる。左辺 ( $dq/dt$ ) は空気塊に乗って空気塊と共に動いたときに経験する単位時間あたりの物理量の変化で、これを個別時間微分という。これに対して右辺第1項 ( $\partial q/\partial t$ ) は、ある場所 ( $x_0, y_0, z_0$ ) で起きる単位時間当たりの物理量の変化で、これを局所時間微分という。残りの3項を移流項という。

例えば  $q$  として温位  $\theta$  をとる。空気塊が断熱変化をしているときには温位は保存される。すなわち  $d\theta/dt = 0$  が成り立つ (熱力学第1法則)。このときには、式 (3.6) により、

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -u \frac{\partial \theta}{\partial x} - v \frac{\partial \theta}{\partial y} - w \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (3.7)$$

である。

温位が北に向かって減少しているときに ( $\partial\theta/\partial y < 0$ )、南風 ( $v > 0$ ) が吹けば、式 (3.7) により  $\partial\theta/\partial t > 0$  である。すなわち、その地点の温位は増加する。暖かい空気の移流効果である。普通、温位は高度と共に増加している。それで上昇流がある地点の温位は減少する。鉛直移流効果である。一般的に気象の変化を観察する方法として、目を付けた空気塊を追いかけて、その空気塊の変化を観察する方法と、ある固定された地

点にじっくり腰を据えて時間変化を観察する方法とがある。前者をラグランジュ的、後者をオイラー的観察法という。それで個別時間微分をラグランジュ時間微分、局所時間微分をオイラー時間微分ということもある。

#### 4. 連続の式を導く

空気は運動しているが、空気の質量は減りも増えもしない。このことを数式化したのが質量保存の式あるいは連続の式とよばれているものである。それを導くために、大気から小さな直方体を切り取り、その3辺の長さをそれぞれ  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  とする。その容積は  $\delta x \delta y \delta z$  であり、空気の密度を  $\rho$  とすれば、質量は  $\rho \delta x \delta y \delta z$  である。この直方体が風と共に動き、容積が時間と共に変化しても、その質量は変化しない。このことを式で表現すれば、

$$\frac{d(\rho \delta x \delta y \delta z)}{dt} = 0 \quad (4.1)$$

である。ここで式 (2.4) の微分のルールを用いると、

$$\frac{d\rho}{dt} \delta x \delta y \delta z + \rho \frac{d(\delta x \delta y \delta z)}{dt} = 0 \quad (4.2)$$

と書ける。これは、

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\delta x \delta y \delta z} \frac{d(\delta x \delta y \delta z)}{dt} = 0 \quad (4.3)$$

に等しい。そして第2項は式 (3.2) で述べた発散であるから、

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.4)$$

と書き直せる。これが質量保存の式あるいは連続の式とよばれているものである。

ところで、式 (3.6) によれば、

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (4.5)$$

であるから、これを式 (4.4) に代入して整理すると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (4.6)$$

が得られる。これも連続の式であり、式 (4.4) と同様によく用いられる。

一般的に密度がどこでもいつでも一定である流体を

非圧縮性流体という。この場合は式(4.4)において  $d\rho/dt=0$  であるから、非圧縮性流体の連続の式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.7)$$

である。すなわち、発散=0である。

### 5. 運動方程式を導く

ニュートンの運動の第2法則によれば、ある物体の運動量(物体の質量と速度の積)の単位時間(1秒間)当たりの変化は、その物体に働いている力の和に等しい。質量  $m$  は変わらないとすれば、例えば  $x$  方向では、

$$\frac{d(mu)}{dt} = m \frac{du}{dt} = \text{力の和の } x \text{ 方向の成分} \quad (5.1)$$

が成り立つ。 $du/dt$ =加速度であるから、これが質量×加速度=力という運動の法則を数式で表したもので、 $x$  方向の運動方程式という。

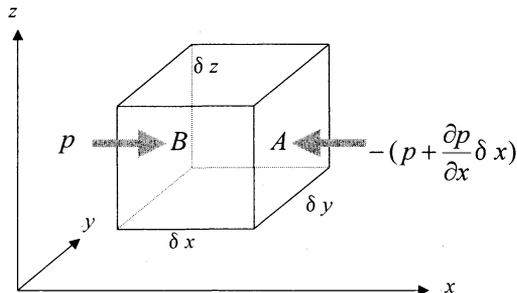
大気の一部を切り取った空気塊には、周りの空気が圧力(気圧)を及ぼしている。第3図のように、 $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向にそれぞれ微量  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  の長さの辺をもつ直方体を占める空気塊を考える。図の  $B$  点における気圧を  $p$  とすると、図の面  $B$  の面積は  $\delta y\delta z$  であるから、面  $B$  を通して空気塊に働いている気圧は  $p\delta y\delta z$  である。テイラーの近似式を使うと、点  $A$  における気圧は、 $p + (\partial p/\partial x)\delta x$  であるから、面  $A$  を通して空気塊に働いている気圧は、 $-\{p + (\partial p/\partial x)\delta x\}\delta y\delta z$  である。従って、さしひき空気塊に働く  $x$  方向の気圧は

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (5.2)$$

である。空気の密度を  $\rho$  とすれば、この直方体の質量は  $m = \rho \delta x \delta y \delta z$  である。この  $m$  と式(5.2)の力の成分を式(5.1)に代入すると、

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.3)$$

という  $x$  方向の運動方程式が得られる。右辺が気圧傾度力といわれている力の  $x$  成分である。負の符号が付いていることは、気圧傾度力は気圧が高い地点から低い地点に向かって働いていることを表している。あるいは、式(3.6)を用いると、



第3図 気圧傾度力の説明図。

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.4)$$

と書くこともできる。

同じようにして、 $y$  方向の運動方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.5)$$

となる。重力はいつも鉛直下方に働いているから、重力加速度を  $g$  ( $=9.8 \text{ m s}^{-2}$ ) とすると、鉛直方向の運動方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned} \quad (5.6)$$

となる。式(5.4)–(5.6)がコリオリ力と空気の粘性による摩擦力を無視したときの運動方程式である。

さて、大気中にはいつも水蒸気が含まれているが、話を簡単にするために、この講義では水蒸気の影響は全く無視して乾燥空気だけを考える。乾燥空気の気体定数を  $R$ 、温度を  $T$  とすると、乾燥空気の状態方程式は、

$$p = \rho RT \quad (5.7)$$

と書ける。単位質量の空気が単位時間に  $\dot{Q}$  という割合で加熱されている場合には、熱力学の第1法則は、温位  $\theta$  を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial\theta}{\partial t} + u \frac{\partial\theta}{\partial x} + v \frac{\partial\theta}{\partial y} + w \frac{\partial\theta}{\partial z} \\ &= \frac{\theta}{C_p T} \dot{Q} \end{aligned} \quad (5.8)$$

と書ける。ここで、温位は、

$$\theta = T \left( \frac{p_0}{p} \right)^{R/C_p} \quad (5.9)$$

で定義される。\$C\_p\$ は乾燥空気の定圧比熱、\$p\_0\$ は標準の気圧(ふつう1,000 hPaにとる)である。\$\dot{Q} = 0\$ の場合には、式(5.8)は断熱変化の場合に温位が保存されることを示す。

いま \$\dot{Q}\$ は外から与えられて既知だとすると、ある時刻における大気の状態および運動は \$u, v, w, T, \rho, p, \theta\$ の7個の変数(これを従属変数という)の空間分布により完全に記述される。そしてこれらの7個の従属変数について、\$x, y, z, t\$ を独立変数として7個の方程式(4.4), (5.4)–(5.9)があるから、後で述べる初期条件と境界条件というものを指定すれば、この方程式群を時間について積分することによって、将来の大気の運動および状態を知ることができる。これが最も一般的な方程式の組み合わせで、圧縮性流体の運動方程式系という。第1節で、大気の運動では、流れによって温度分布が変わり、気圧分布が変わり、この気圧傾度力の変化が流れの変化をもたらすという一連の変化が連続的に起こっていると述べたが、この一連の変化は上記の運動方程式系で記述されるわけである。実際の現象に対しては、個々の現象に応じて、もっと単純化した方程式が用いられることは、以下述べる通りである。

### 6. ブジネスク近似

前節で述べた圧縮性流体の運動方程式系は一般的なもので、実際の問題によっては、これを近似した式を用いることができる。例えば、総観規模の気象では、鉛直方向の運動方程式(5.6)の代わりに、鉛直加速度を省略した方程式、すなわち静水圧平衡の式 \$\partial p / \partial z = -\rho g\$、が使えることは、よく知られている。積乱雲などのメソ気象には静水圧平衡の近似は使えない。しかし、大気のスケール・ハイト (\$H\$) にくらべて、対象とする大気層の厚さ (\$h\$) が非常に薄い場合、言い換えれば空気塊が鉛直方向に動く距離が \$H\$ より非常に短い場合には、ブジネスク (Boussinesq) 近似とい

うものを使うことができる。ここでスケール・ハイトというのは、例えば、密度がどこでも一定 (\$\rho\_0\$) という仮想的な等密度大気では、地上の気圧 (\$p\_0\$) はそれより上にある大気のみであるから、\$p\_0 = \rho\_0 g H\$ という関係があり、この \$H\$ が等密度大気のスケール・ハイトである。\$H\$ は約10 kmであり、冬に日本海上に出現する筋状の雲の雲頂高度は約2 kmだから、こうした現象にはブジネスク近似が適用できる。以下 \$h/H \equiv \epsilon\$ において、\$\epsilon\$ が \$10^{-1}\$ かそれ以下の大きさの場合を考える。\$\equiv\$ はこの式で定義するという記号である。この節では、方程式の中の各項の大きさの桁数を問題として、数値は問題としない。

まず、\$\rho, p, T\$ を基本状態 (\$\bar{\quad}\$ の記号で表す) とそれに重なった擾乱 (対流や波動など) に分ける。基本状態は \$z\$ だけの関数とする。さらに、基本状態を次のように2つに分けて、

$$\begin{aligned} \rho(x, y, z, t) &= \bar{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t) \\ &= \rho_0 + \rho_1(z) + \rho' \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} p(x, y, z, t) &= \bar{p}(z) + p'(x, y, z, t) \\ &= p_0 + p_1(z) + p' \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) &= \bar{T}(z) + T'(x, y, z, t) \\ &= T_0 + T_1(z) + T' \end{aligned} \quad (6.3)$$

と表現する。ここで、\$\rho\_0, p\_0, T\_0\$ は定数であり、地表における値、あるいは今考えている層の鉛直方向の平均値をとる。層内で基本状態が高度と共に変化している様子が \$\rho\_1, p\_1, T\_1\$ で表されている。この基本状態に対しては、静水圧平衡 \$\partial p\_1 / \partial z = -\rho\_1 g\$ および気体の状態方程式 \$p\_1 = \rho\_1 R T\_1\$ が成り立つとする。

いま、\$\Delta p\$ という記号で層内の気圧の変動の幅、すなわち \$p\_1 + p'\$ がとり得る値の最大値と最小値の差を表すとする。同様に、温度の変動の幅を \$\Delta T\$、密度の変動の幅を \$\Delta \rho\$ とする。このとき、層が薄いということから、

$$\frac{\Delta p}{p_0} \sim \epsilon, \quad \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \sim \epsilon, \quad \frac{\Delta T}{T_0} \sim \epsilon \quad (6.4)$$

と仮定することができる。\$\sim\$ はだいたいこれくらいの大きさという記号である。例えば、地表から高さ800 hPaまでの層の中の擾乱を対象としているときには、\$p\_1\$ の変動量は200 hPaの程度であり、ふつう考えている擾乱では、擾乱に伴う気圧の変動量 \$p'\$ は \$p\_1\$ の変動(すなわち200 hPa)よりはるかに小さい。それで(6.4)の仮定はたいがい満足される。既に述べたように \$p\_0 =

$\rho_0 g H$  であり、おおざっぱな議論としては、 $p_1$  の変動量は  $\rho_0 g h$  の桁数であるから、 $\Delta p/p_0 \sim h/H \sim \epsilon$  となる。

それで以下では、もとの圧縮性流体の方程式系の中の各項の大きさを調べて、その中に  $\epsilon$  の大きさの項があったら、それを省略するという作業をしていく。まず連続の式であるが、これは式 (4.4) から、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{d}{dt} \ln \rho \\ &= -\frac{d}{dt} \ln \rho_0 \left(1 + \frac{\rho_1 + \rho'}{\rho_0}\right) \\ &\sim \frac{d}{dt} \ln \left(1 + \frac{\Delta \rho}{\rho_0}\right) \sim \frac{d}{dt} (\epsilon \text{ の大きさ}) \end{aligned} \quad (6.5)$$

と順次に書き直せる。最後の変形のところでは、一般に  $\epsilon$  をある小さい量とすると、 $\ln(1+\epsilon) \approx \epsilon$  というテイラー近似を用いている (第2節)。

式 (6.5) の右辺は  $\epsilon$  の大きさの微量量であるから、左辺とくらべて省略すると、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (6.6)$$

となり、連続の式は非圧縮性流体のそれと全く同じ式を用いてよいことになる。(厳密にいうと、式 (6.5) の右辺には  $d/dt$  という微分があり、時間的に早く振動する運動、例えば音波、に対しては、単に  $\epsilon$  が小さいという理由だけでは、右辺を左辺に比べて省略できないのであるが、いまはそのような速い運動は考えないので、この問題には深入りしない)。

次に式 (6.1) と (6.2) を運動方程式 (5.4) に代入すると、

$$\rho_0 \left(1 + \frac{\rho_1 + \rho'}{\rho_0}\right) \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p'}{\partial x} \quad (6.7)$$

が得られるが、 $(\rho_1 + \rho')/\rho_0$  は  $\epsilon$  の大きさであるから省略して、

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \end{aligned} \quad (6.8)$$

を得る。同様にして、他の2つの運動方程式、

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho_0} g \end{aligned} \quad (6.10)$$

も得られる。

次に気体の状態方程式の自然対数をとると、

$$\ln p = \ln \rho + \ln T + \ln R \quad (6.11)$$

および

$$\ln p_0 = \ln \rho_0 + \ln T_0 + \ln R \quad (6.12)$$

が得られる。式 (6.11) を書き直して、

$$\begin{aligned} \ln p_0 \left(1 + \frac{p_1 + p'}{p_0}\right) &= \ln \rho_0 \left(1 + \frac{\rho_1 + \rho'}{\rho_0}\right) \\ &+ \ln T_0 \left(1 + \frac{T_1 + T'}{T_0}\right) + \ln R, \end{aligned} \quad (6.13)$$

式 (6.13) から式 (6.12) をひいて、 $\ln(1+\epsilon) \approx \epsilon$  の近似式を使うと、

$$\frac{p_1 + p'}{p_0} = \frac{\rho_1 + \rho'}{\rho_0} + \frac{T_1 + T'}{T_0} \quad (6.14)$$

となる。擾乱がないときには、

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{T_1}{T_0} \quad (6.15)$$

であるから、これを式 (6.14) からひくと、

$$\frac{p'}{p_0} = \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{T'}{T_0} \quad (6.16)$$

が得られる。擾乱に伴う変動  $p'$  と  $\rho'$  については静水圧平衡は適用できないが、 $\partial p'/\partial z$  は  $\rho'g$  と同じ程度の大きさである。それで  $p'$  と  $\rho'$  の変動量の最大の大きさをそれぞれ  $\Delta p'$  と  $\Delta \rho'$  と記すと、

$$\Delta p'/h \sim g \Delta \rho' \quad (6.17)$$

としてよいであろう。そうすると、

$$\frac{\Delta p'}{p_0} / \frac{\Delta \rho'}{\rho_0} \sim \frac{h}{H} \sim \epsilon \quad (6.18)$$

となる.  $\varepsilon$  の大きさを省略すると, 式 (6.16) は,

$$\rho' = -\rho_0 \frac{T'}{T_0} \quad (6.19)$$

となる. これは重要な結果で, 密度の変動は温度の変動だけで決まり, 圧力の変動の影響は考えなくてよいのである. しかし (6.15) で示したように, 基本状態では圧力変動の効果を考慮しなければならない. 式 (6.19) を式 (6.10) に代入すれば, 鉛直方向の運動方程式は,

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{T'}{T_0} g \quad (6.20)$$

となる.

温位  $\theta$  も基本状態と擾乱の部分に分けて,

$$\theta(x, y, z, t) = \bar{\theta}(z) + \theta'(x, y, z, t) = \theta_0 + \theta_1(z) + \theta' \quad (6.21)$$

とすると, 熱力学の第1法則は,

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial \theta'}{\partial t} + u \frac{\partial \theta'}{\partial x} + v \frac{\partial \theta'}{\partial y} + w \frac{\partial \theta'}{\partial z} + w \frac{d\bar{\theta}}{dz} \\ &= \frac{\theta_0}{C_p T_0} \dot{Q} \end{aligned} \quad (6.22)$$

と書ける. ちなみに,  $\theta$  の定義式から, (6.11) - (6.15) と同様にして

$$\frac{\theta'}{\theta_0} = \frac{T'}{T_0} - \frac{R}{C_p} \frac{p'}{p_0} \quad (6.23)$$

であるが, 既に述べたように,  $p'/p_0 \ll T'/T_0$  であるから,

$$\frac{\theta'}{\theta_0} = \frac{T'}{T_0} \quad (6.24)$$

となり, 再び擾乱部分では圧力変動の影響は無視できる.

以上長くなったので要約すると, 運動方程式は

(6.8), (6.9), (6.20), 連続の式は (6.6), 気体の状態方程式は (6.19), 熱力学の第1方程式は (6.22) である. これら一組の方程式を導く近似をブジネスク近似と呼び, この方程式系で記述される流体をブジネスク流体という. その特徴は, ① 空気のように圧縮されやすく密度が変わりやすい流体を扱っているのにもかかわらず, まるで非圧縮流体のような連続の式に従う. ただし重力と結び付いた項だけでは密度の変化の効果を考える. これによって浮力がちゃんと作用することが保証されている. ② 密度の変動に対する圧力の変動は無視してよく, 密度の変動は温度の変動だけで決まる. このことは実際上たいへん便利である. というのは, 対流などで浮力の大きさを決めるのは密度の変動であるが, 密度の直接測定は困難で, 測定しやすいのは温度だからである.

はじめに述べたように, ブジネスク近似が適用できるのは, 層の厚さが大気スケール・ハイトより非常に小さい現象だけである. 積乱雲のような, 地表付近から対流圏界面に達するような深い対流にはブジネスク近似は使えない. この場合には, もっと一般的な非弾性 (anelastic) 近似というものか, もとの非圧縮性流体の運動方程式系を用いる必要がある. ブジネスク近似は非弾性近似の特殊な場合と性格づけることができる (「地球流体力学入門」(木村, 1983), 「メソ気象の基礎理論」(小倉, 1997)).

#### 参考文献

- 木村龍治, 1983: 地球流体力学入門, 東京堂出版, 247 pp.  
 日本気象学会編, 1998: 新教養の気象学, 朝倉書店, 144 pp.  
 二宮洸三, 1998: 気象予報の物理学, オーム社出版局, 202 pp.  
 小倉義光, 1997: メソ気象の基礎理論, 東京大学出版会, 215 pp.  
 小倉義光, 1999: 一般気象学第2版, 東京大学出版会, 308 pp.  
 寺澤寛一, 1941: 自然科学者のための数学概論修正第3版, 岩波書店, 762 pp.