天気の教室

101：1051（メソ気象；気象力学）

メソ気象力学の基礎（II）

小　倉　義　光*

7．物体の落下運動―運動方程式を時間積分する

運動方程式を解く（あるいは解を求める）ということがどういう事なのか示すために，最も簡単な例として物体の落下運動を考える．

質量 m をもった小さな物体（質点）を地表面から高さ h に持ち上げ，時刻 $t=0$ で手を放して自由に落下させたとき，物体の高さ z が時間と共にどう変化するかという問題を考える．前節までは，z は鉛直座標であり，独立変数の1つであったが，今回はラグランジュ的に物体の位置を追いかけるので，z は従属変数，独立変数は時間 t である．物体の速度は $w\equiv dz/dt$ であり，加速度は dw/dt（すなわち d^2z/dt^2）である．落下する物体に対する空気抵抗を無視すると，物体に働いている力は，下向きの重力だけであるから，運動方程式は式（5.1）により，

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=-mg \tag{7.1}$$

である．g は定数であるから，式（7.1）を時間 t について積分すると，

$$\frac{dz}{dt}=w=-gt+a \tag{7.2}$$

が得られる．a はある定数で，積分定数と呼ばれる．a がどんな値をとっても，式（7.2）は式（7.1）を満足させるから，式（7.2）は微分方程式（7.1）の解である．初期（$t=0$）に速度は0と指定したから，$a=0$ である．そうしておいて，式（7.2）をもう一度積分すると，

$$z=-\frac{1}{2}gt^2+b \tag{7.3}$$

が得られる．b は別の積分定数である．初期に物体の位置 z は h であると指定したから，その条件を式（7.3）に入れると，$b=h$ と決まる．従って，式（7.3）は，

$$z=-\frac{1}{2}gt^2+h \tag{7.4}$$

となる．念の為，式（7.4）をもとの微分方程式に代入すれば，それが満足されていることが確認できるし，2次の微分方程式（7.1）に対する2つの初期条件（$t=0$ で $w=0$ と $z=h$）も満足されている．だから，（式7.4）が求める解である．

式（7.4）の両辺に質量 m と g をかけ，

$$\frac{1}{2}mg^2t^2=mg(h-z) \tag{7.5}$$

と書き直す．質量 m の物体が地表面から z の高さにいれば，重力に逆らってその高さにいるのだから，その物体は mgz という位置のエネルギーを持っている．初期の位置エネルギーは mgh であった．それで式（7.5）の右辺は落下に伴う位置のエネルギーの減少量を表す．一方，質量 m の物体が w という速度で運動していれば，その物体の運動エネルギーは $(1/2)\,mw^2$ である．いまの場合，初期の運動エネルギーは0と指定したから，式（7.5）の左辺は運動エネルギーの増加量を表す．従って，式（7.5）は，

運動エネルギーの増加量
　＝位置のエネルギーの減少量

を表す．言い換えれば，

運動エネルギー＋位置エネルギー＝一定　(7.6)

である．すなわち，運動方程式（7.1）から物体のエネルギー保存則が容易に導けるのである．

* Yoshimitsu Ogura，財団法人日本気象協会．

8．大気の静的安定度一常微分方程式を解く

重力の下にあって密度成層をした大気の中で空気塊(パーセル)を，ほんの少し上方に移動させたとき，空気塊がもとの位置に戻るか,移動した位置に止まるか,ますますもとの位置から遠ざかるかによって，大気の成層を安定，中立，不安定と判別することは，一般向けの解説書に述べてある．本節では，このことに数式的表現を与えよう．

いま，空気塊は周囲の気圧を乱さないで，かつ空気塊内の圧力は周囲の気圧といつも同じに保ちつつ，断熱的に，ほんの少し上方に移動したとする．空気塊の位置を z で表すと，空気塊の運動を支配する方程式は前節の式（7.1）に鉛直方向の気圧傾度力を加えて，

$$\frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}-g \tag{8.1}$$

である．この空気塊の周囲の空気の状態を $\overline{(\quad)}$ の記号で表すことにすると，周囲の空気はもともとの静水圧平衡の状態にあるから，

$$0=-\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{d\overline{p}}{dz}-g \tag{8.2}$$

である．そして上に述べた仮定により，$p=\overline{p}$ であるから，$dp/dz=-g\overline{\rho}$である．これを式(8.1)に代入すると，

$$\frac{d^2z}{dt^2}=g\frac{\overline{\rho}-\rho}{\rho} \tag{8.3}$$

を得る．一方，気体の状態方程式(5.7)と温位の定義式（5.9）から T を消去すると，

$$\rho=\frac{1}{\theta}\frac{p}{R}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/C_p} \tag{8.4}$$

が得られるから，これを式（8.3）に代入すると，

$$\frac{d^2z}{dt^2}=g\frac{\theta-\overline{\theta}}{\overline{\theta}} \tag{8.5}$$

を得る．いま，空気塊が出発した高度を鉛直座標の原点にとると，空気塊が微小量 z だけ移動した点における周囲の大気の温位は，$\overline{\theta}(z)$をテイラー展開して1次までの項をとって，

$$\overline{\theta}=\theta_{\rm i}+\left(\frac{d\overline{\theta}}{dz}\right)z \tag{8.6}$$

である．$\theta_{\rm i}$は原点における θ の値である．一方，空気塊は断熱的に，温位を保存しながら移動したのであるから，

$$\theta=\theta_{\rm i} \tag{8.7}$$

である．式（8.6）と式（8.7）を式（8.5）に代入すると，

$$\frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{g}{\theta}\left(\frac{d\overline{\theta}}{dz}\right)z \tag{8.8}$$

が得られる．以下，簡単のため，$(1/\overline{\theta})$ $(d\overline{\theta}/dz)$は高度に無関係な一定値と仮定して，式(8.8)の微分方程式の解を求めよう．すなわち式(8.8)を満足する時間 t の関数 $z(t)$ を探そう．

式（8.8）をみると，z を2回微分したものがもとの z に比例している．この性質をもっている関数は表1でみた通り，ν をある定数とし $\mathrm{e}^{\nu t}$か $\sin\nu t$（$\cos\nu t$ でもよい）である．それで z は $\mathrm{e}^{\nu t}$に比例するとして式(8.8）に代入すると，

$$\nu^2=-\frac{g}{\theta}\frac{d\overline{\theta}}{dz} \tag{8.9}$$

が得られる．まず $d\overline{\theta}/dz<0$ の場合を考える．このときには $\nu^2>0$ であるから，

$$\nu=\pm\left(-\frac{g}{\theta}\frac{d\overline{\theta}}{dz}\right)^{1/2}=\pm\left(-g\frac{d\ln\overline{\theta}}{dz}\right)^{1/2} \tag{8.10}$$

となる.±のどちらでもよいから，ν は正であるとして解は，

$$z=a\mathrm{e}^{\nu t}+b\mathrm{e}^{-\nu t} \tag{8.11}$$

の形となる．a と b は積分定数で，初期（$t=0$）における条件で決められる．いま，初期に空気塊は座標原点($z=0$)にいたとすると，$a+b=0$ という関係がある．従って，

$$z=a(\mathrm{e}^{\nu t}-\mathrm{e}^{-\nu t}) \tag{8.12}$$

でなければならない．これから，空気塊の速度 w は，

$$w=\frac{dz}{dt}=a\nu(\mathrm{e}^{\nu t}+\mathrm{e}^{-\nu t}) \tag{8.13}$$

で与えられる．次に，初期に空気塊は w_0という速度を持つとすると，式(8.13)で $t=0$ とおいて，$w_0=2a\nu$ でなければならない．これから，$a=w_0/2\nu$ と求まる．

結局，初期条件を満足する式（8.8）の解は，

$$z=\frac{w_0}{2\nu}(\mathrm{e}^{\nu t}-\mathrm{e}^{-\nu t}) \tag{8.14}$$

である．t が大きくなると，$\mathrm{e}^{-\nu t}$はどんどん小さくなるが，$\mathrm{e}^{\nu t}$は指数関数的に大きくなる．すなわち，初期に周囲の空気と平衡状態にあった空気塊は，原点から w_0 という任意の初速度で動きだすと，時間と共に指数関数的に原点から遠ざかる．このことは，温位が高度と共に減少している成層は不安定であることを示している．

次に $d\bar{\theta}/dz>0$ のときは，ν は実数ではなく，$\nu=\pm\mathrm{i}N$ という純虚数となる．ここで，

$$N=\left(\frac{g}{\theta}\frac{d\bar{\theta}}{dz}\right)^{1/2} \tag{8.15}$$

であり，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，$\mathrm{i}^2=-1$ である．一般に A と B を任意の実数とするとき，$A+\mathrm{i}B$ を複素数といい，A を実数部分，B を虚数部分という，実数部分がない複素数が純虚数である．こうして，この場合の解は，

$$z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nt}+b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Nt} \tag{8.16}$$

である．再び，$t=0$ で $z=0$ という初期条件を用いると，

$$z=a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nt}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Nt}) \tag{8.17}$$

を得る．ここで，

$$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}Nt}=\cos Nt\pm\mathrm{i}\sin Nt \tag{8.18}$$

という公式があるから，式（8.17）は

$$z=2\mathrm{i}a\sin Nt \tag{8.19}$$

となる．もう1つの初期条件，$t=0$ で $w=w_0$を適用すると，

$$w=\frac{dz}{dt}=2\mathrm{i}aN\cos Nt=w_0 \tag{8.20}$$

であるから，$a=w_0/2\mathrm{i}N$ と決まる．結局，求める解は，

$$z=(w_0/N)\sin Nt \tag{8.21}$$

である．この解は，重力を復元力として，振動数 N（周期$2\pi/N$）で振動する運動を表している．N をブラント・バイサラ振動数（あるいは浮力振動数）という．典型的な値として $d\bar{\theta}/dz=3.5\,\mathrm{K/km}$ をとれば，$N\sim10^{-2}\mathrm{s}^{-1}$となる．これは周期約10分に相当する．このように，温位が高度と共に増加している大気では，空気塊は初期に w_0という速度で動き出しても，原点の周りの振動を繰り返すだけである．すなわち，このような成層は安定である．結局，次の静的安定条件が得られる：

$$\frac{d\bar{\theta}}{dz}\ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\ 0\quad \begin{matrix} \text{安定} \\ \text{中立} \\ \text{不安定} \end{matrix} \tag{8.22}$$

上記の安定条件を温度の高度分布で表現しよう．まず，$\bar{\theta}$の定義式（5.9）の自然対数をとると，

$$\ln\bar{\theta}=\ln\bar{T}-\frac{R}{C_\mathrm{p}}\ln\bar{p}+\frac{R}{C_\mathrm{p}}\ln p_0 \tag{8.23}$$

が得られる．これを z で微分する．$d(\ln\bar{\theta})/dz=(1/\bar{\theta})(d\bar{\theta}/dz)$であることと，$d\bar{p}/dz=-\bar{\rho}g$ を考慮し，気体の状態方程式（5.7）を用いて $\bar{\rho}$ を消去すると，

$$\frac{1}{\bar{\theta}}\frac{d\bar{\theta}}{dz}=\frac{1}{\bar{T}}\left(\frac{d\bar{T}}{dz}+\frac{g}{C_\mathrm{p}}\right) \tag{8.24}$$

が得られる．中立成層の大気では $d\bar{\theta}/dz=0$ である．このとき，温度は，$\Gamma_\mathrm{d}\equiv g/C_\mathrm{p}$という乾燥断熱減率$\Gamma_\mathrm{d}$で高度と共に減少する．一般に，温度減率$\Gamma\equiv-d\bar{T}/dz$ を定義すると，式（8.24）を参照して，式（8.22）から，

$$\Gamma\ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\ \Gamma_\mathrm{d}\quad \begin{matrix} \text{安定} \\ \text{中立} \\ \text{不安定} \end{matrix} \tag{8.25}$$

というよく知られた静的安定度の判定条件が得られる．

9．内部重力波—連立偏微分方程式を解く

前節でブラント・バイサラの振動の話をしたときには，空気塊は周囲の空気を乱さないように上下に振動すると仮定した．実際にはこれは不可能である．空気はびっしりと空間を埋めているから，その一部分が動けば，その周囲は必ず影響を受ける．事情は，発車間際の満員電車に1人無理に乗り込んできた状況に似ている．この人は扉近くの人を押す．押された人は自ら少し動くと共に，圧力を隣の人に伝える．こうして，安定成層をした大気の中で空気塊が動けば，周囲の空気も動くし，運動に伴う圧力変動は波動となって，四

方にひろがっていく．この波動は重力を復元力とする波動であるから重力波という．

細かくいうと，重力波にも2種類ある．1つは海面でおこる風波のように，液体と気体が接する境界面，もっと一般的には，密度が不連続的に変わる境界面でおこる重力波で，外部重力波という．これに対し，本節で述べる重力波はこのような境界面なしで起こるので，内部重力波という．

内部重力波を数式で表現しようとすれば，前節でやったように鉛直方向の運動方程式だけを考えるのでは不十分である．波動は四方に伝わるから水平方向の運動方程式も必要である．空気塊が移動すれば，その隙間を狙って隣の空気塊が動くから連続の式も考慮する必要がある．簡単のためブジネスク近似を使うことにすれば，重力波を扱うのに必要な方程式は（6.8)，(6.20)，(6.6)，(6.22)，(6.24）である．話をできるだけ簡単にするために，運動は y 方向には一様であるとして(すなわち y 方向の偏微分は無視して)，x，z 面内での2次元の運動を考える．式（6.9）は使わない．

波動が生ずる前の静止状態では，温位 $\overline{\theta}(z)$ は z 方向に一定の勾配（$d\overline{\theta}/dz>0$）を持つとする．さらに，いま考えている波動の振幅は極めて小さいので，波動に伴う u，w，p'，ρ'，T'，θ'はすべて微小量であるとする．このことが何を意味するかというと，例えば水平方向の運動方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} \qquad (9.1)$$

において，$u(\partial u/\partial x)$ と $w(\partial u/\partial z)$ は微少量 u や w の積であるから，$\partial u/\partial t$ と $(1/\rho_0)(\partial p'/\partial x)$ にくらべて一段と小さく無視してよい．そうすると，上式は，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} \qquad (9.2)$$

となる．一般的に，従属変数の2次以上の項を非線形項といい，1次の項を線形項という．それで式（9.1）のように非線形項を含む方程式を非線形方程式といい，式(9.2)のように線形項だけを含む方程式を線形方程式という．非線形方程式の中で非線形項を省略して線形方程式にすることを方程式の線形化という．同じ様にして他の方程式も線形化し，断熱変化を仮定すると，

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z}+\frac{\theta'}{\theta_0}g \qquad (9.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (9.4)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t}+w\frac{d\overline{\theta}}{dz}=0 \qquad (9.5)$$

が得られる．連続の式はもともと線形方程式であるから，そのままである．

式（9.2)−(9.5)が波動に伴って変動する従属変数 u，w，p'，θ'を決める4個の連立方程式である．この解を求めることができれば，内部重力波の運動が明らかになる．解を求める常套手段は，4個の方程式から3個の従属変数を消去して，ただ1つの従属変数を含む方程式を導くことである．その従属変数として何を選んでもよいが，ふつうは w についての方程式を導く(その理由はここでは扱わないが，境界条件というものが w について与えられることが多いからである)．そこでまず式（9.2）と（9.4）から u を消去することを考える．式（9.2）を x で偏微分すると，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \qquad (9.6)$$

が得られる．式（9.4）を t で微分すると，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial t}=0 \qquad (9.7)$$

が得られる．式（9.7）から式（9.6）をひくと u を含む項が消えて，

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial t}=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \qquad (9.8)$$

が得られる．次に式（9.3）と式（9.5）から θ'を消去するために，式（9.3）を t で微分すると，

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 p'}{\partial z\partial t}+\frac{g}{\theta_0}\frac{\partial \theta'}{\partial t} \qquad (9.9)$$

となる．右辺の$\partial\theta'/\partial t$ に式（9.5）を代入すると，

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 p'}{\partial z\partial t}-wN^2 \qquad (9.10)$$

となる．ここで N は式(8.15)で定義したブラント・

バイサラの振動数である．最後に式（9.8）と（9.10）から p' を消去するために，式(9.8)を z で微分し t で微分すると，

$$\frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial t^2}=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^4 p'}{\partial x^2 \partial z \partial t} \tag{9.11}$$

となる．式（9.10）をxで2回微分すると，

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^4 p'}{\partial x^2 \partial z \partial t}-N^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{9.12}$$

となるから，式（9.11）と（9.12）を辺々たし合わせると，

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=-N^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{9.13}$$

が得られる．これが目的とした w だけを含む方程式である．前節の常微分方程式と違い，今度は偏微分方程式である．

偏微分方程式の解き方にはいろいろあり，ある型の方程式には特定の解き方が有効である．式（9.13）に対して変数分離法が有効である．いま $\Psi(t)$ と $\Phi(x, z)$ はそれぞれ t および x, z だけの関数であり，$w=\Psi(t)\Phi(x, z)$ という変数が分離された形で解が求まるとして，これを式（9.13）に代入すると，

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)\frac{d^2\Psi}{dt^2}=-N^2\Psi\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \tag{9.14}$$

となるが，これを書き直して，

$$\frac{N^2\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}}{\left(\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)}=-\frac{\dfrac{d^2\Psi}{dt^2}}{\Psi} \tag{9.15}$$

とする．左辺は x, z の関数であり，右辺は t だけの関数であるから，この両辺が等しいためには両辺とも定数でなければならない．その定数を ν^2 と書くと，Ψ と Φ を決める方程式はそれぞれ，

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2}=-\nu^2\Psi \tag{9.16}$$

$$N^2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}=\nu^2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right) \tag{9.17}$$

となる．式（9.16）は（8.8）と全く同じ形であるから解はすぐ $e^{\pm i\nu t}$ と求まる．式（9.17）の解を求めるために，再び $\Phi(x, z)$ が変数分離の形に書けるとしよう．すなわち，$\Phi(x, z)=X(x)Z(z)$ として式(9.17)に代入して整理すると，

$$(N^2-\nu^2)\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=\nu^2\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} \tag{9.18}$$

となる．左辺は x だけの関数，右辺は z だけの関数であるから，各々は定数でなければならない．それで k と n を任意の定数として，$X(x)$ の解としてお馴染みとなった $e^{\pm ikx}$ をとり，$Z(z)$ の解として $e^{\pm inz}$ をとり，式（9.18）に代入すると，

$$\nu^2=N^2\frac{k^2}{(k^2+n^2)}=N^2\frac{1}{1+(n/k)^2} \tag{9.19}$$

が得られる．結局，A_1～A_8 を任意の定数として，求める解は，

$$\begin{aligned} w=&A_1e^{i\nu t}e^{ikx}e^{inz}+A_2e^{i\nu t}e^{ikx}e^{-inz}\\ &+A_3e^{i\nu t}e^{-ikx}e^{inz}+A_4e^{i\nu t}e^{-ikx}e^{-inz}\\ &+A_5e^{-i\nu t}e^{ikx}e^{inz}+A_6e^{-i\nu t}e^{ikx}e^{-inz}\\ &+A_7e^{-i\nu t}e^{-ikx}e^{inz}+A_8e^{-i\nu t}e^{-ikx}e^{-inz} \end{aligned} \tag{9.20}$$

である．ただし，ν，k，n の間には式（9.19）の関係がある．これを内部重力波の分散関係式という．

定数 A_1～A_8 は u，w，p'，θ' に対する初期条件や境界条件によって決まる．具体的に初期条件や境界条件を与えて A_1～A_8 を決める代わりに，ここでは簡単のため，例えば，$A_1=A_2=A_3=A_4=A_5=A_6=A_7=A_8$ とする．この場合には，式（8.18）から得られる．

$$\cos\nu t=\frac{1}{2}(e^{i\nu t}+e^{-i\nu t}) \tag{9.21}$$

という公式を考慮すると，

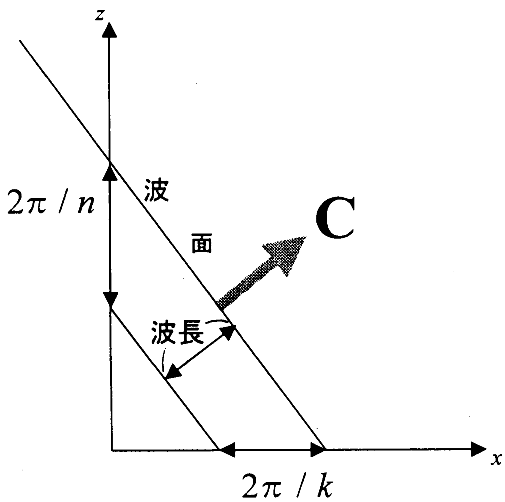
$$w=8A_1\cos\nu t\cos kx\cos nz \tag{9.22}$$

となる．$\cos kx$ は kx が 2π だけ異なるときには，同じ値をとるので，x 方向の波長は $\lambda_X=2\pi/k$ である．同様に $\lambda_Z=2\pi/n$ が z 方向の波長である．すなわち，式(9.22)は x 方向に λ_X，z 方向に λ_Z の間隔をもつ流れのパターンが，移動することなく周期 $2\pi/\nu$ で振動している重力波を表している．

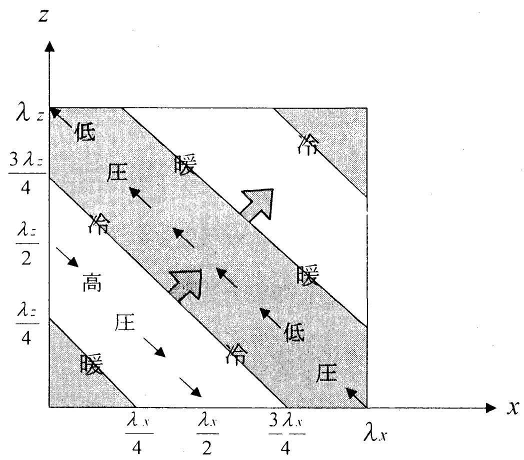
別の例として，$A_1=A_2=A_7=A_8=0$，$A_3=A_4=A_5=A_6$ のときは，任意の数 a と b について，指数関数には，

$$e^ae^b=e^{a+b} \tag{9.23}$$

という性質があることを利用すると，式（9.20）は，



第4図　波面と伝播速度の関係.



第5図　鉛直断面内で，仮想的な内部重力波に伴う圧力，温度，速度の分布を示す図．細い矢印は速度，太い矢印は重力波が伝わる方向，シェードしてあるのは上昇流の区域.

$$
\begin{aligned}
w &= 4A_4 \cos nz \cos(kx - \nu t) \\
&= 4A_4 \cos nz \cos k(x - c_x t) \qquad (9.24)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，$c_x \equiv \nu/k$ である．式(9.24)をみると，$x - c_x t$ が一定のとき w の値は同じであることがわかる．すなわち，時間が経つと共に，w のパターンは x 方向に $c_x t$ だけずれていくから，これは x の正の方向に c_xの速度で伝播する波を表す．

さらに，$A_1 = A_2 = A_3 = A_6 = A_7 = A_8 = 0$，$A_4 = A_5$とすると，式（9.20）は，

$$w = A \cos(kx + nz - \nu t) \qquad (9.25)$$

となる．ここで $A = 2A_4$である．これは第4図に示したように，波面が x 軸にも z 軸にも傾いた波を表す．x 方向と z 方向の波長は再び$2\pi/k$ と$2\pi/n$ であるが，本当の波長は2つの隣り合った波面の間隔であり，これは$2\pi/(k^2+n^2)^{1/2}$で与えられる．波の伝播を x 軸に沿ってみれば，その伝播速度は $c_x = \nu/k$ であり，z 軸に沿っては $c_z = \nu/n$ である．それで真の伝播速度は c_xと c_zを成分とするベクトルである．その方向は波面に直角で，大きさは $\nu/(k^2+n^2)^{1/2}$で与えられる．

次に，w が式（9.25）で与えられたとき，他の従属変数についての解を求めよう．まず式（9.8）の左辺に式（9.25）を代入すると，

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = A\rho_0 n\nu \cos(kx + nz - \nu t) \qquad (9.26)$$

という p'を決める式が得られる．p'の振幅を B とし，$p' = B\cos(kx + nz - \nu t)$ が解であるとして式（9.26）に代入すると，$B = -A\rho_0 n\nu/k^2$と決まる．それで，

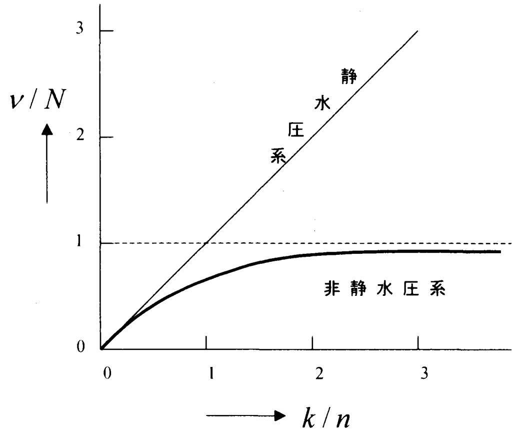
$$p' = -\frac{A\rho_0 n\nu}{k^2}\cos(kx + nz - \nu t) \qquad (9.27)$$

と求められる．同様にして，式(9.5)から θ'が，式(9.4)から u が次のように決められる：

$$\theta' = \frac{A}{\nu}\frac{d\bar{\theta}}{dz}\sin(kx + nz - \nu t) \qquad (9.28)$$

$$u = -\frac{An}{k}\cos(kx + nz - \nu t) \qquad (9.29)$$

第5図が u，w，p'，θ'の間の位相の相互関係を示したものである．大気中には音波，重力波，ケルビン波，ヘルムホルツ波，山岳波，順圧不安定波，傾圧不安定波など，いろいろな原因でさまざまな波動が起こっている．大気中で観測された波動がどういう波なのか，同定するためには上記のようないろいろな気象要素の間の位相の関係が用いられる．さらに例えば uw, $w\theta'$, wp'を1波長で積分した量は，それぞれ波による水平運動量の鉛直輸送，熱の鉛直輸送，波がする仕事（すなわちエネルギーの伝播）を表し，その値は u, w, p', θ'の相互の位相関係で，ゼロになったり，正あるいは負になったりする．だから位相は大事なのである．



第6図　非静水圧系と静水圧系における無次元の振動数（ν/N）と波数（k/n）の関係．

上記の結果で興味があるのは，他のパラメータはそのままにしてkを無限大にすると，式（9.27）においてp'は0となるし，式（9.29）でuも0となるし，式（9.19）でνはNに等しくなる．これはちょうど前節で，空気塊が周囲の空気を乱さないように，またいつも周囲と同じ気圧を保つようにしつつ，鉛直方向に振動したときの状況である．このことから，前節の，いわゆるパーセル法の考え方は，実は本節で行った厳密な議論で，水平方向の波長を無限小とした特殊な場合に等しいのだと納得する．こうした点が理論的な解析のおもしろさである．

次に第6図において非静水圧系と記したのが式（9.19）のk，nとνの関係を図示したものである．すぐ上で述べたように，$k\to\infty$で$\nu\to N$となるし，$k\to 0$では$\nu\to 0$となる．ところで本節で行った演算で，鉛直方向の運動方程式として式（9.3）を使う代わりに静水圧平衡の式を用いて演算をやり直してみると，式（9.19）の代わりに，

$$\nu^2=N^2\frac{k^2}{n^2} \tag{9.30}$$

という分散関係式が得られる（演習問題として自分で導いてほしい）．これが第6図で静水圧系と記した直線である．この2本の線を比較すると，k/nが0に近いときには，もちろん両者は一致しているが，k/nが1に近付くあたりから離れ始める．このことから，擾乱の水平スケールが鉛直スケールと同じ程度になると，静水圧平衡はよい近似を与えないことが分かる．

ついでに述べると，式（9.19）において，$k^2<(k^2+n^2)$であるから，$\nu<N$であることは明らかである．第6節でブジネスク近似を導く際に，あまり速く振動する現象は考えないという条件をつけた．本節ではブジネスク近似を用いて内部重力波を議論したが，その重力波の振動数はいつもNより小さいから，上記の条件は，時間スケールが$1/N$より大きい現象だけを考えていることになる．ちなみに，内部重力波の伝播速度の大きさの実感をもつために，かりに$k=n$と仮定すると，$\nu=0.71N$であり，$k=2\pi/10$ km, $N=10^{-2}\mathrm{s}^{-1}$とすると，$c_x=\nu/k=11.3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$となる．これは音速より一桁小さい．

重要で興味深い内部重力波の応用問題は山岳波あるいは山越えの気流である．山岳波は笠雲や吊るし雲など特有な雲を作ったり，「おろし風」などの局地的な強風を吹かせたりする．さらに，山岳波に伴う水平運動量の鉛直輸送は，大気の大循環の角運動量の収支や日々の数値予報にも無視できない影響を及ぼしている．また，大気の状態によっては，内部重力波に伴う上昇流が積雲対流を起こすこともある．こうした問題については，前回に引用した「地球流体力学入門」（木村，1983）や「メソ気象の基礎理論」（小倉，1998）などを参照していただきたい．また，次回の吉崎正憲氏の講義には，メソ対流系の中では長時間にわたって多量の凝結熱が放出されているのに，メソ対流系の中の温度が数度くらいしか上昇しないのは，凝結熱が内部重力波によって四方に広がってしまうからだという話がある予定である．