

# 新しい質量分布のリモートセンシング — 次世代の重力計測とその役割 —

古 屋 正 人\* 内 藤 勲 夫\*\*

## 1. はじめに

重力計測は、地球科学のうちでも固体地球の分野、特に「測地学」に属するものとされる。重力計は、地球の形状や地球内部の密度構造に制約を与えるための手段であり、また地震波より低周波の固体地球力学の道具でもある。

地球科学の他の分野と同様、20世紀の技術の進歩は重力計測の精度も機能も飛躍的に高めた。5桁以上もの精度の向上に加え、地表一点の観測に限られた従来の重力計が可搬型になったおかげで、観測可能な領域が広がった。さらに1957年のスプートニク打ち上げによって衛星測地学の時代の幕が開け、グローバルな重力計測が可能になった。地球重力場のモデルとして現在最先端を行くEGM96 (Earth Gravity Model) は、重力ポテンシャルを球面調和関数 (付録参照) の次数360次まで展開したものであり、これは地表、船舶、航空機、衛星などさまざまな計測技術による膨大なデータに基づいている (Lemoine *et al.*, 1998)。EGM96のような地球重力場モデルの用途は多岐にわたり、測地学的な意味での地球の形状決定はもとより、人工衛星の軌道計算における外力としての用途など実用的な側面もある。なお従来の重力計測の歴史は Nerem *et al.* (1995) に詳しい。

これまでのところEGM96のようなグローバルな重力場モデルの作成は、主に米国研究機関が行っており、今後数年のうちにまた新たな重力計測の衛星ミッションが始まる。それらが従来の衛星重力計測と本質的に異なるのは、静的な重力場の精度を向上させるだけでなく、動的な重力場、すなわち重力ポテンシャルの展

開係数 (付録参照) の時間変化を推定しようとする点である。5年程度の衛星ミッションで展開係数の時間変化が得られるとなれば、それが捉えるシグナルには固体地球起源というより季節変動に代表される大気水圏起源の現象が強く反映される筈である。展開係数の静的な成分を1とすれば、時間変動成分は $10^{-7}$ よりも小さいが、これが現実には観測されるとなると後述のように、「重力」は狭い意味での測地学のみならず大気水圏科学にも重要な意義を持つ筈である。流体地球科学に携わる多くの「天気」の読者に、これらの衛星計画CHAMP (CHALLENGING Microsatellite Payload) とGRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) を知って頂き、次世代の重力計測が果たす新しい役割を紹介したい。

## 2. 衛星重力計測の展開

地球を周回する衛星にとっては、地球を質点と見做すことはできず、単純なケプラー軌道から外れている：地球重力場の0次成分 (付録参照) 以外の効果が無視できない。このことを逆に利用すれば、衛星軌道を精密に追尾したデータを得れば地球重力場が求められる。原理的には古典的な天体力学の応用なので、どの次数まで逆問題として解けるかは、観測値である追尾データがどの程度の時空間分解能で得られるかで決まり、それは技術的な問題となる。

衛星測地学の黎明期に次数2や3程度の展開係数 (付録参照) の決定が行われ、前述のEGM96では70次まで衛星データに依拠できるようになった。次世代の重力ミッションのCHAMPやGRACEの話題に移る前に、静的重力場モデルの集大成であるEGM96に至るまでの主要な衛星技術について、Nerem *et al.* (1995) に基づきまとめておく。

\* 東京大学地震研究所. \*\* 国立天文台地球回転研究系.  
—1999年11月8日受領—  
—2000年4月6日受理—

第1表 衛星重力ミッションの今後.

ミッション	観測技術	補助装置	高度 (km)	期間 (年)	技術的可能性
SST (High-Low)	High-Low 衛星間測距	加速度計	400	5	実用段階
SST (Low-Low)	Low-Low 衛星間測距 (マイクロ波)	加速度計	400	5	可能
SGG	極低温重力偏差計	GPS 受信機	300	0.75	可能
SSI (Low-Low)	Low-Low 衛星間測距 (レーザー)	加速度計	400	5	未知
SGGE	極低温重力偏差計	GPS 受信機	300	5	未知

## 2.1 従来の衛星重力計測

### 2.1.1 衛星レーザー測距 SLR

スプートニク打ち上げ以降、地上からの衛星追尾データに基づいた重力場推定が行われた。衛星を追尾するための手法としては、太陽光の反射の利用や、電波干渉などの技術が用いられた。現在最も高精度に地上と衛星間を追尾できるのは Satellite Laser Ranging (SLR) 技術である。高度数千から数万 km ほどを周回するコーナークューブ反射器を搭載した衛星に向けて地上からレーザーパルスを発射し、その往復時間を測定する。これを基に人工衛星の軌道を高精度に求めることで、地球重力場モデルを更新していく。後述の LAGEOS (LAsER GEodynamics Satellite) とは、高度6000 km を周回する SLR 専用の NASA の衛星である。日本の測地衛星 Ajisai は1986年に打ち上げられ、高度1300 km を周回している。

一般に、衛星追尾技術としての SLR の計測精度はほかのどの手法をも凌駕する。しかし、地上局が偏在し、晴天時の観測に限られることが問題である。原理的には、低高度にするほど短波長の重力場が求まるが、大気抵抗による非保存力が効いてくるため軌道決定が難しくなる。

### 2.1.2 衛星高度計

SLR よりも細かい空間分解能で地球重力場 (正しくはジオイド) の推定を可能にしたのが衛星高度計である。衛星と海水面間の距離を測るだけのもので、(地球楕円体座標における) 衛星の軌道が既知ならば、ジオイドの高さ (地球楕円体からのジオイド面の高さ) にあたる量が直接観測できる。実際には、流れとほぼ地衡流平衡の関係にある海面の起伏も加わっているため、観測量からジオイド高データを求めるには、ある程度長期間の平均を取っている。逆に、こうして求まるジオイドの高さのデータがあれば、海洋物理的な変動シグナルを捉えることが可能になる。

衛星高度計の空間分解能は SLR よりも遥かに良く、海洋上の重力場 (ジオイド) を一様精度で広域に

推定することができるようになった意義は大きい。この衛星高度計のアイディアは1960年代に遡り、SEASAT、GEOS3などと続き、本格的な実用化は Topex/POSEIDON 衛星でなされたといえよう。

軌道決定の精度がこの衛星データの価値を左右するため、Topex/POSEIDON には電離層遅延を補正するための二周波高度計、水蒸気遅延を補正するためのラジオメータ (マイクロ波放射計)、SLR で地上から追尾するためのコーナークューブが搭載されている。実はさらに GPS (Global Positioning System) 受信機も搭載されており、これは後述の衛星間追尾の一種にあたる。なお、Topex/POSEIDON の後継機 Jason は2001年に打ち上げの予定である。

## 2.2 次世代の衛星重力計測

第1表は、米国の衛星重力計測委員会の報告書 (NRC, 1997) に示されている次世代の衛星重力ミッションのシナリオをまとめたものである。個々の説明に入る前に次世代型の重力ミッションとして、広い意味で二通りの技術があることを述べておく。すなわち複数衛星を用いる SST (Satellite-to-Satellite Tracking: 衛星間追尾) と単独の衛星による SGG (Spaceborne Gravity Gradiometer: 宇宙基地型重力偏差計) である。この表で先頭に SST (High-Low) と示されているものについては既実現されている。というのも EGM96 には、92年以降に得られた Topex/POSEIDON 衛星 (Low 衛星: 高度1300 km) に積まれていた GPS (High 衛星: 高度20000 km) の搬送波位相データが利用されているからである。同様のデータは、宇宙基地型の GPS 気象学衛星である Micro-lab 1 (高度740 km)、電波天文用の衛星 EP/EUVE (高度525 km) からのも得られている。CHAMP は同種の SST (High-Low) 型のミッションで、CHAMP 衛星ではより高度が低くなる (約400 km)。後述の GRACE は、Low-Low 型の SST 技術によるものである。

### 2.2.1 衛星間追尾技術 SST

CHAMP は今年中に打ち上げ予定のドイツの GFZ

(GeoForschungsZentrum Potsdam) による多目的型の地球観測衛星である。GRACEは2001年打ち上げ予定の米国とドイツ共同のミッションで、重力計測に特化したものである。SST技術のアイデアは1960年台に既に世に出されていた。もし地球重力場が均一であれば、2台以上の衛星間の距離は不変で相対速度もゼロになる。重力場に不均一があれば、各衛星での重力ポテンシャルが変化するので、一方の衛星の他方に対する相対速度が変化する。これを利用して、衛星間の相対速度を測ることにより、その衛星が感じている重力場を推定するという原理である。

CHAMP衛星は初期の高度470 kmの単独の衛星で、高度20000 kmのGPS衛星からの搬送波を利用するので、High-Low型のSST技術と呼ぶ：第1表ではSST (High-Low) と示した。一方GRACEは、高度450 kmの極軌道に2台の衛星を並べて一方の相対速度を測るLow-Low型のSSTで、第1表ではSST (Low-Low) と示した。直観的に明らかなように、CHAMPは低次数の重力場に対して感度をもち、GRACEの方が空間分解能は高い。CHAMPは、GRACEのためにより精度の高い重力場モデルを提供することを主目的としている。GRACEのミッション期間は5年間で予定されているので、重力場の季節変化や経年変動が得られるであろう。なお表にあるように、補助装置として加速度計を同時に搭載する。これは、地球の質量分布に起因する重力場だけを感じるようにするために、太陽輻射圧などによる動揺を補償する重要な役割を担う。

Low-Low型のSST技術を用いた衛星ミッションは、1980年代初頭に米国で提案されたことがあったが結局は承認されなかった。High-Low型については70年代からATS6やTDRSSといった静止衛星をHigh-Low型のHighの方に用いた実験はあったが、静止衛星のため必然的に見える領域が狭くなるという本質的な欠点があった。今日になってSST技術が復活した背景には、GPSによって高精度の測位が可能になったことが大きい。

CHAMP, GRACEにおける衛星間追尾ではマイクロ波が用いられるが、第1表でSSIとあるのは衛星間をレーザー干渉計でリンクするものである。現在の技術では難しいようだが、レーザーの利用によってさらに精度確度が高まることが期待され、将来の実現に向けて夢が膨らむ。

## 2.2.2 衛星重力偏差計SGG

次世代の重力場計測技術には、SSTのほかには衛星搭載型の重力偏差計 (Spaceborne Gravity Gradiometer, SGG)がある。重力偏差計の最初のものは、1890年にハンガリーのエトベスが発明したトーションバランス (ねじればかり) である。金属性の水平なビーム (さお) の両端におもりを下げて、真中を針金でつるす。重力の水平勾配があれば、一方のおもりは下がるであろう。針金を感じるねじれを測れば、重力の空間変化が分かるという原理である。重力偏差計はある観測点の重力そのものではなく重力勾配 (重力偏差) を測定するので、重力場をハイパスフィルターを掛けて観ることになり、微細な構造変化を検知できる。

宇宙空間での重力勾配の測定原理は、次のようなものである。すなわち、ある衛星が重力場のもとで軌道運動している時、純粹に自由落下の状態にあるのは、その重心のみである。この重心から少し離れたところにある加速度計は、重心を基準とした相対加速度を計ることができる。このような加速度計を対にしておけば、その基線方向の重力勾配が分かるという仕組みであり、互いに直交する3基線を組むことで重力偏差計ができあがる。なお第1表で、極低温と記してあるのは、液体ヘリウム (約4 K) を用いた超伝導技術を用いることを指す。実は、(重力偏差計ではなく)重力計については既に超伝導重力計が実用化されており、 $9.8 \text{ m/s}^2$ の1兆分の1の感度を持つと言われている。この高精度な計測技術を重力偏差計に応用しようというものである。話は横道にそれるが、わが国は8台もの超伝導重力計を保持する超伝導重力計大国で、超伝導重力計ネットワークによるGlobal Geodynamics Project (GGP) の中核を担っている。超伝導重力計の応用やGGPについては、Crossley *et al.* (1999) を参照されたい。

欧米ではこれまでに幾つかのミッション計画が提案され、データ解析手法に関する理論的研究も少なくない (Jekei, 1993; Nerem *et al.*, 1995)。しかしながら第1表にあるように精度の目的は達成できても、寿命が1年にも満たないのは重力の時間変動をみるためには致命的である。第1表には、5年程度の期間の運用に耐えるものとしてSGGEを載せてあるが、これはSGGの運用期間が延長できた場合の仮想的なもので、実現にはまだ技術的な課題が多いようである。

### 3. 環境科学のための重力計測

#### 3.1 重力場の時間変化

重力の時間変動の要因は、月・太陽による潮汐力、大気や海洋の運動に伴う質量再分配、地下水の流れや雪氷の厚さの変化、地震に伴う地殻物質の移動、氷河の消長による地殻のリバウンドや流体核の振動など多岐にわたる。一方、観測精度の高まる一方である重力計は、質量分布の変化にはなりふり構わず敏感に応答し、地球システムのあらゆる変動をまるごと捉える。まるごと捉えるという特徴は、しかし両刃の剣である。未知のシグナルを見るために、既知のシグナルを片っ端からモデル化して取り除かなければならないからである。この事実、GRACEで新しい種類のデータが得られても必ず何らかの形で遭遇する問題であろう。

重力の時間変化に着目した研究でよく知られたものは潮汐に関するものである。重力データの時系列において潮汐のシグナルは既知の周波数をもつので直ちにそれと同定できるが、これには固体地球の潮汐変形(月・太陽の直接の引力による変形)だけでなく海洋潮汐の寄与(海洋の潮汐荷重による変形)も含まれている。固体地球の変形応答(特に非弾性の効果)を調べたい場合、月・太陽の引力は高精度に既知とすることができ、もう一つの原因である海洋潮汐がどの程度の寄与をもたらすかが分からないため、折角の高精度な重力データがあっても固体地球の非弾性に関する研究は進まなかった。しかし海面高度計の発達で信頼のおける海洋潮汐モデルが得られるようになって、固体地球の非弾性変形の議論もなされるようになってきた(Ray *et al.* 1996)。もちろん、気圧変動に伴う重力変化の影響も補正されている。

グローバルな空間スケールをもち、年以上の時間スケールで現れた重力の時間変化としては、Yoder *et al.* (1983)による報告が知られている。地球重力場ポテンシャルの展開係数のうち次数2の帯状成分をJ2と呼ぶ(扁平率に相当する；付録及び第4図参照)。彼らは測地衛星LAGEOSのSLRによる追尾データから、J2が永年的に減少していることを報告した。これは従来から知られていた大陸氷河の消長に伴うマントル物質のリバウンドのシグナルと解釈され、それを衛星測地学的に検証したものとされている。

ところで、人工衛星を使ったJ2そのものの決定は1958年に遡り、60年代から70年代には既にJ2の季節変動の理論的予測がなされていた。しかし当時の観測精度はそれを捉えるまでには達しておらず、80年代に

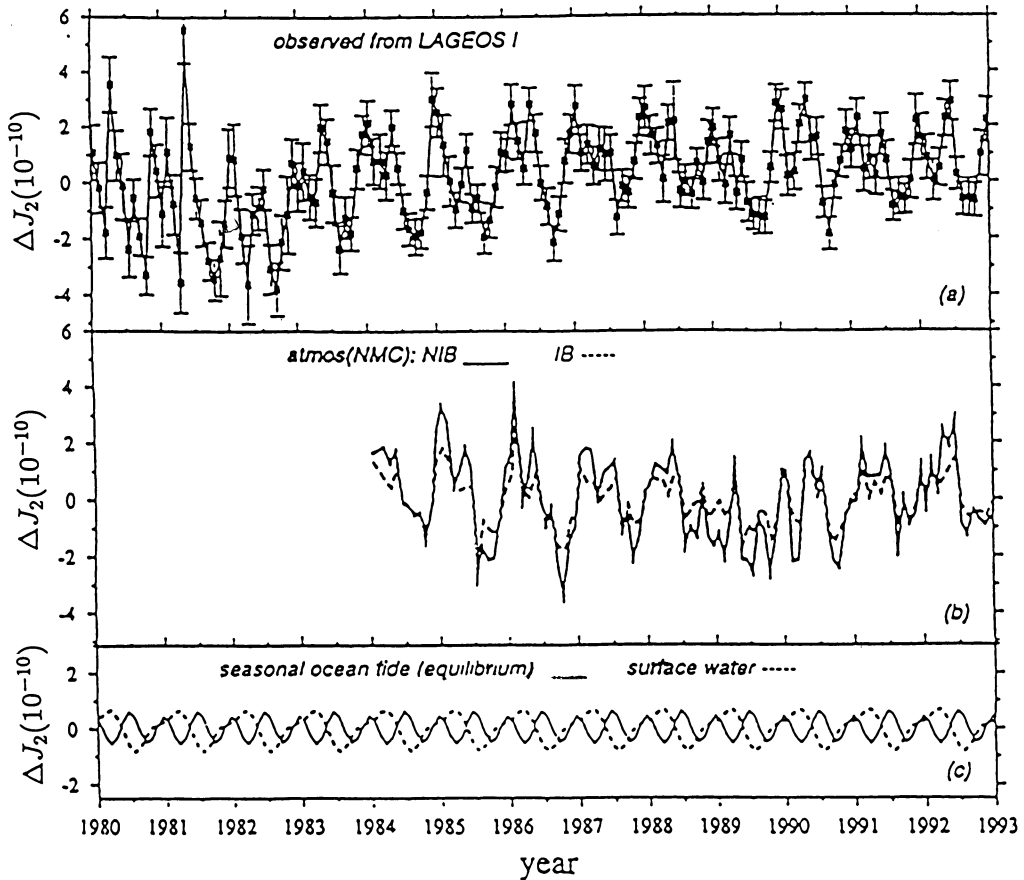
入ってようやく前記の永年的なシグナルが得られた。衛星の追尾技術はその後さらに進歩を遂げていた。J2やJ3に期待される季節変動は全球大気客観解析データによっても見積られていたが(e.g., Chao and Au. 1991)、実際にLAGEOSの軌道解析からJ2やJ3の季節変動が捉えられたのはごく最近のことである(e.g., Nerem *et al.*, 1993)。こういったグローバル測地学の世界的な進展が、地球回転変動を大気水圏の寄与で説明する研究(例えば、内藤, 1988)と同時進行であったことは偶然ではないが、その必然性についてはこれ以上立ち入らないことにする。

#### 3.2 環境科学への貢献

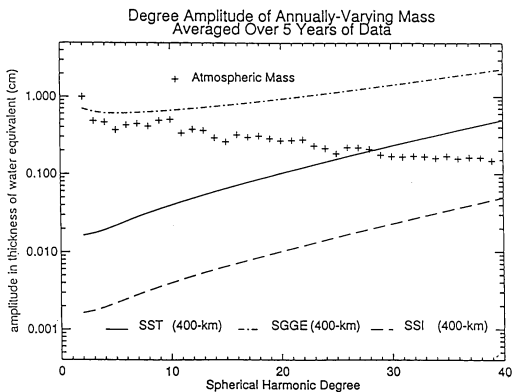
前述のJ2やJ3の季節変動を、地表での大気水圏の質量再分布によるものとする定性的な解釈は容易である。Dong *et al.* (1996)は、J2, J3の季節変化(第1図a)が、固体地球が弾性変形するという仮定のもとで、大気(第1図b)と海洋と陸水の収支(第1図c)で概ね説明できることを示した(第1図)。この定量的な説明によって、宇宙技術で示される重力場の時間変動から、大気水圏に起因する質量分布の時間変化を捉えるという道筋が見えてきた。

J2ほどに空間スケールが大きいと、大気・海洋・陸水の三者からの寄与を考慮しなければならない。J2のような長波長(次数2から3程度)の重力場推定に限られたのは、地上から高度6000 kmのLAGEOSや1300 kmのAjisaiのような測地衛星を追尾するSLRによっていたためである。もっと空間スケールの小さい重力場の時間変化が得られたならば、陸上では大気と陸水、海洋では大気と海洋という二者を考慮することで済むであろう。

前述したGRACEミッションで行われることは、第1図aよりさらに高波数(100 km程度)の展開係数の推定であって、それを2週間から1か月程度の頻度で更新していくというものである。第2図は、第2節の3つの計測技術それぞれの誤差レベルを球面調和関数の波数を横軸にして、等価的な水の厚さで示したものである(第1表参照)。第2図には併せて、大気圧変動の季節変化が重力場にどの程度の変動をもたらすかも示してある。先に空間スケールの小さい重力の時間変化の原因は、陸上では大気と陸水、海洋で大気と海洋と述べたが、2週間から1か月の時間スケールでの大気の質量分布変動は、SST技術とは独立に信頼の精度で算出して取り除くことができる。というのも、大気の質量は地表気圧に反映されるので、現存する客



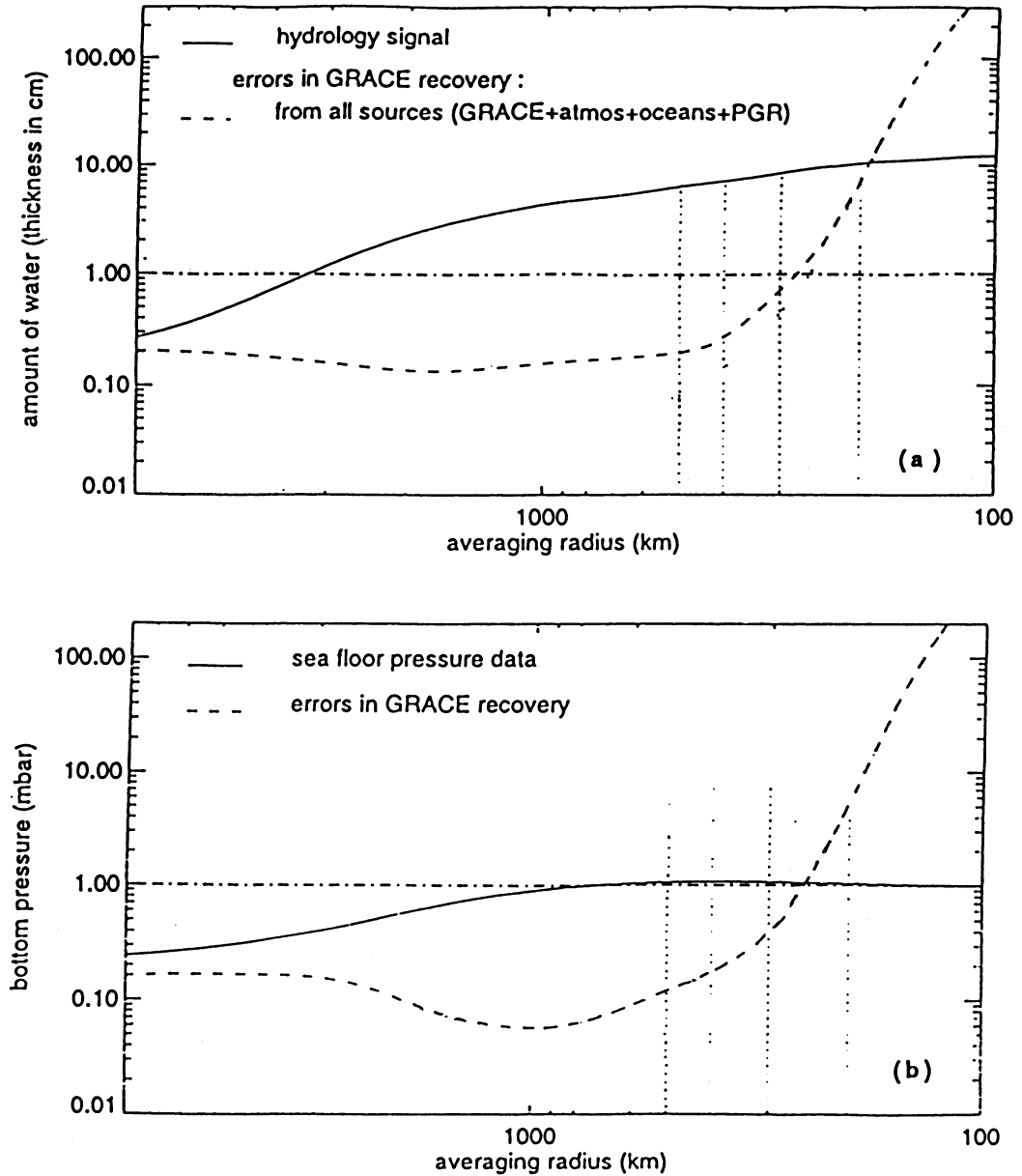
第1図 (a) LAGEOSで観測された  $J_2$  の時間変化 (月平均値), (b) 大気質量分布による  $J_2$  の時間変化 (海底でも海面と同じ気圧変化をする NIB モデル (実線) と海洋が瞬時に気圧変化を補償とする IB モデル (破線) の二つ; 現実とは中間), (c) 年周海洋潮汐モデル (実線) と陸水モデル (破線) (Dong *et al.*, 1996).



第2図 等価的な水の厚さで示した3つの衛星重力技術 (SST, SGGE, SSI) の誤差レベルと大気質量分布の年周変化 (+) のそれぞれの空間分解能依存性を、いずれも球面調和関数の最大展開次数 (横軸) の関数として表示. 5年間の平均を想定している (NRC, 1997).

観解析の気圧データが使えるからである. 客観解析における地表気圧は季節変化の周波数で0.1-0.3 hPaの精度を持つので, GRACEで得られる重力の時間変化への大気の寄与はこの精度で除去できる. つまり, これを水の高さに直した1-3 mmよりも大きな海水や陸水の変動が捉えられることを意味する.

Wahr *et al.* (1998) は, 5年間の GRACE で想定されるこの状況を具体的にシミュレートしている. 第3図は, (a) アマゾン川流域での陸水 (土壌水分) と (b) 北太平洋 (北緯30度, 東経180度) での海底圧力の変動が, 空間スケール (averaging radius) の関数としてどれほどの変動幅を持っていて (実線), それらが GRACE で得られる重力データから, どの程度の確度で再現されるかを推定したものである (破線). GRACE が捉えられるのは, 実線が破線を上回る空間



第3図 (a) アマゾン川流域の陸水と (b) 北太平洋の質量分布変動が GRACE で再現される状況のシミュレーション (Wahr *et al.*, 1998 の第4c 図と第6c 図を本稿のために修正)。まず、大気、海洋、土壌水分のグローバルなモデルデータを用いて、GRACE で得られるような重力場モデルの展開係数を人工的に作成する。これを用いると原理的には任意のある地点の質量分布変化が計算できるが、展開係数は有限個であり、高次になるほど誤差も大きいため信頼性が損なわれる。これを回避するため、その地点の周辺で空間的な平滑化を施す。横軸の averaging radius とは、平滑化の特徴的長さで、概ね空間スケールを表す (対数表示)。実線は、(a) 陸水と (b) 海洋の質量分布がどれほどの変動幅を持つかを示すもので、合成した展開係数とは独立に計算される。破線は、GRACE による再現値の確度を推定したもので、実際の変動 (実線) と合成 GRACE データによる再現値との差の根二乗平均 (RMS) が示してある。GRACE が捉えられるのは、実線が破線を上回る空間スケールでの変動である。(a) の PGR とは Post Glacial Rebound (後氷期リバウンド) のことで、北米などで顕著な氷河の融解に伴う重力変化を考慮したことを示している。

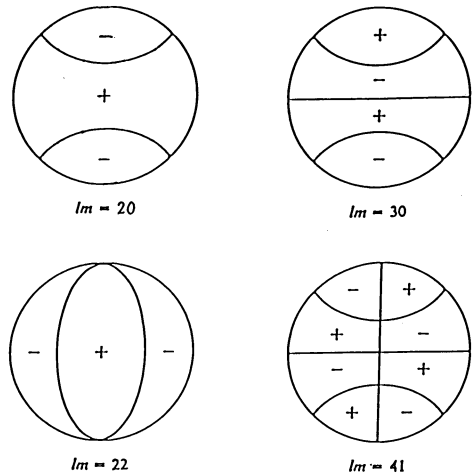
スケールでの変動である。第3図からそのスケールを読み取ると、(a)と(b)でそれぞれ200 km, 300 kmである。したがってGRACEは、アマゾン川流域では200 km以上のスケールの帯水層質量センサーとなり、北太平洋では300 kmスケールの海底圧力計になることがわかる。数百 km スケールとはいえ、こうして得られるデータは海面高度計データと組み合わせられて海洋循環のデータ同化において刷新的なデータとなるであろうし、長期的な気候変動予測において重要とされる土壌水分変化の監視にも貢献するものと思われる。

CHAMPやGRACEの斬新性は、初めから重力の時間変動の把握をターゲットにしている点である。しかし、これら衛星ミッションによるスタティックな重力場モデルの高精度化にも大きな意義がある。現在の最高精度を行くEGM96のジオイド高の標準偏差(誤差)は次数20程度以上になると10 mmほどある。これがGRACEミッションでは、次数40程度で一気に3桁、次数80程度でも1桁以上の向上が見込めるという(NRC 1997; Dickey *et al.*, 1998)。海水面のダイナミックな変動を捉えるにあたって、EGM96モデルでは次数10以下の長波長の変動までしか捉えられなかった。CHAMPやGRACEの重力ミッションの後には、次数20以上の海水面のダイナミックな変動を捉えるほどにジオイドの精度が向上するであろう。Topex/POSEIDON後継機のJasonがデータをもたらすところには、より細かな空間スケールの海水面変動が見えてくることが期待できる。

4. おわりに

今後の衛星重力計測は、一様精度で広い範囲を高時空間分解能で測るということを目指して、一層の高精度化・高度化の道を辿るだろう。それで得られる成果は地球科学の多くの分野に波及していく筈である。従来型の地上船上の重力計測は、次世代にはground (sea) truthとして重要視されるであろう。

1997年のメルボルンでのIAMAS (国際気象学大気科学協会)/IAPSO (国際海洋物理科学協会)では測地学に関するセッションが3つあって、そのうちの2つであるGPS気象学と角運動量収支については本誌に報告された(高橋ほか, 1998)。本稿で紹介したGRACEに関するものが残りの1つである。測地学の道具であったGPSが水蒸気情報や温度プロファイルを提供する形で気象学に貢献しつつあるが、重力というこれまた測地学の一分野が、環境科学に新風を吹き込む日



第4図 球面調和関数の例。m=0のときは赤道面に平行に輪切りにしたパターン(帯状成分), m=lのときは極軸を含む面で輪切りにしたパターンになる。lm=20は本文のJ2(偏平率), lm=30はJ3に各々対応する。

もそう遠くはなからう。

謝辞

匿名査読者と編集委員の中村 尚博士から頂いた多くのコメントは、初稿の改稿に際して極めて有意義でした。ここに記して、感謝の意を表します。

付録一 球面調和関数一

ニュートンの万有引力の法則より、距離rだけ離れた質量m, Mの2つの粒子の間には、次の力Fが働く:

$$F = G \frac{mM}{r^2} \tag{1}$$

これをニュートンの第2法則と合わせると、質量mの粒子の2つの粒子の重心に対する加速度aは、

$$a = \frac{GM}{r^2} \tag{2}$$

である。この加速度ベクトルは次のようなポテンシャルVの勾配として表せる:

$$\mathbf{a} = \nabla V \tag{3}$$

ここで 
$$V = \frac{GM}{r} \tag{4}$$

質量  $M$  の粒子が点ではなく、密度分布  $\rho(x, y, z)$  を持った連続体の場合には式 (4) は次のようになる:

$$V = G \iiint \frac{\rho(x, y, z)}{r(x, y, z)} dx dy dz \quad (5)$$

加速度ベクトル  $\mathbf{a}$  の  $x$  成分は、

$$a_x = \frac{\partial V}{\partial x} = -GM \frac{x}{r^3} \quad (6)$$

であり、さらにもう 1 回微分すると次式が得られる:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = GM \left( -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} \right) \quad (7)$$

他の 2 成分についても同様の 2 階微分を施して足し合わせると、次式が得られる:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (8)$$

これをラプラス方程式と呼ぶ。式 (5) から同じ式が得られる。

地球はほぼ球とみなせるので、球座標系によるのが便利である。すなわち  $x, y, z$  の 3 成分を、座標原点からの距離  $r$ 、緯度  $\phi$ 、経度  $\lambda$  を用いて表す。球座標系でのラプラス方程式は、次式のようになる (以下では結果のみ記し、詳しい導出は Kaula (1966) などを参照されたい):

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (9)$$

式 (9) の解のうち、 $r$  が無限大でも発散しない解は、

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{l+1}} P_{lm}(\sin \phi) [C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda] \\ = \sum_{i=1}^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{1}{r^{l+1}} S_{lmi} \quad (10)$$

となる。ここで  $S_{lmi}$  を球面調和関数とよび、ルジャンドル陪関数  $P_{lm}(\sin \phi)$  と (添字の  $i$  で示した) 三角関数  $\sin m\lambda$  ( $i=1$  に対応) または  $\cos m\lambda$  ( $i=2$  に対応) との積の形で表わされる。 $C_{lm}$  と  $S_{lm}$  は数学的には任意定数であるが、これは本文中で述べる展開係数に対応する。添字の  $l$  と  $m$  を、それぞれ次数 (degree)、位数 (order) とも呼ばれる。

以上をまとめると、重力ポテンシャル  $V$  はラプラス方程式を満たし、球座標系でのその解は式 (10) のように表現される。では、重力ポテンシャルをこのような一見複雑な関数で表現したのは何故か。それは球面調和関数  $S_{lmi}$  が直交性という便利な性質を持つからである。すなわち球面上での  $S_{lmi}$  どのの積の積分 (すなわち内積) は、 $d\sigma$  を微小な面積要素、 $\delta_{ij}$  をクロネッカーのデルタとすると、

$$\int_{\text{球面上}} S_{lmi} S_{hki} d\sigma = 0, \text{ for } l \neq h, m \neq k, i \neq j \\ \int_{\text{球面上}} S_{lmi}^2 d\sigma = \left( \frac{(l+m)!}{(l-m)! (2l+1) (2-\delta_{0m})} \right) 4\pi$$

のようになり、3 組の添字が等しいときのみ 0 (ゼロ) にならない。これは三角関数の積の積分が、等しい波長のものどののときに 0 にならないことと同等である。

球面調和関数の例を示した第 4 図を眺めてみる。球面調和関数  $S_{lmi}$  は、子午線に沿って  $(l-m)$  個のゼロ点を持ち、経度方向の 180 度の間に経線に平行な  $m$  本のゼロ線がある。このような各種の球面調和関数を用いると、ちょうど 1 次元の時系列が色々な波長の三角関数の和で展開 (フーリエ級数展開) できたように、球面上に分布する関数を、第 4 図のような各種のパターンの重ね合わせとして表現できる。そして各パターンの振幅は、展開係数  $C_{lm}$  や  $S_{lm}$  で与えられる。これらの展開係数の値は、座標系をどう設定するかに依存しているが、次数分散 (degree variance) と呼ばれる量、

$$\sigma_l^2 = \sum_{m=0}^l (C_{lm}^2 + S_{lm}^2) \quad (11)$$

は座標系の設定に依存せず、次数  $l$  を指定すれば決まる量である。第 2 図はこれの平方根に相当する。次数  $l$  で示される空間波長  $\lambda_l$  は、40,000/ $l$  km ほどである。

式 (10) のように重力ポテンシャルが展開されると、係数の  $C_{lm}$  や  $S_{lm}$  は (長さ) <sup>$l+1$</sup>  の次元を持つことになる。測地学で通常用いられるのは、これを避けるように展開係数を無次元化した次式である;

$$V(r, \phi, \lambda) = \frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left( \frac{a}{r} \right)^l P_{lm}(\sin \phi) \times [C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda] \right\} \quad (12)$$

本文中の 0 次成分に対応する次数 0 の項、 $GM/r$  は和の中から括り出してあるが、これは球対称な質量分



布によるポテンシャルである。また和が次数2から始まるのは、地球の質量中心を座標原点となるような座標設定をすると次数1の項が消えるためである。また本文中に現れた  $J_2$ ,  $J_3$ などは展開係数の  $c_{20}$ ,  $c_{30}$ などのことである。

### 参考文献

- Chao, B. F. and A. Y. Au, 1991 : Temporal variation of the Earth's low-degree zonal gravitational field caused by atmospheric mass redistribution : 1980-1988, *J. Geophys. Res.*, **94**, 6569-6575.
- Crossley, D., J. Hinderer, G. Casula, O. Francis, H. T. Hsu, Y. Imanishi, G. Jentzsch, J. Kaarianen, J. Merriam, B. Meurers, J. Neumeyer, B. Richter, K. Shibuya, T. Sato and T. van Dam, 1999 : Network of superconducting gravimeters benefits a number of disciplines, *EOS Trans. AGU.*, **80**, 121, 125-126.
- Dickey, J. O., C. R. Bentley, R. Bilham, J. A. Carton, R. J. Eanes, T. A. Herring, W. M. Kaula, G. S. E. Lagerloef, S. Rojstaczer, W. H. F. Smith, H. M. van den Dool, J. M. Wahr and M. T. Zuber, 1998 : Satellite Gravity : Insights into the solid earth and its fluid envelope, *EOS Trans. AGU.*, **79**, 237.
- Dong, D., R. S. Gross and J. O. Dickey, 1996 : Seasonal variations of the Earth's gravitational field : An analysis of atmospheric pressure, ocean tidal, and surface water excitation, *Geophys. Res. Lett.*, **23**, 725-728.
- Ray, R. D., R. J. Eanes and B. F. Chao, 1996 : Detection of tidal dissipation in the solid Earth by satellite tracking and altimetry, *Nature*, **381**, 595-597.
- Jekeli, C., 1993 : A review of gravity gradiometer survey system data analyses, *Geophys.*, **58**, 508-514.
- Kaula, W. M., 1966 : *Theory of Satellite Geodesy*, Blaisdell, Waltham, Massachusetts, 124pp.

- Lemoine, F. G., S. C. Kenyon, J. K. Factor, R. G. Trimmer, N. K. Pavlis, D. S. Chinn, C. M. Cox, S. M. Klosko, S. B. Luthcke, M. H. Torrence, Y. M. Wang, R. G. Williamson, E. C. Pavlis, R. H. Rapp and T. R. Olson, 1998 : The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96, NASA Technical Paper-1998-206861, 575 pp.
- 内藤勲夫, 1988 : 地球回転と大気水圏力学—その新しい連携—, *天気*, **35**, 291-311.
- National Research Council, 1997 : *Satellite Gravity and the Geosphere—contributions to the study of the solid Earth and its fluid envelope*, National Academy Press, Washington, D. C., 112pp.
- Nerem, R. S., B. F. Chao, A. Y. Au, J. C. Chan, S. M. Klosko, N. K. Pavlis and R. G. Williamson, 1993 : Temporal variations of the Earth's gravitational field from satellite laser ranging to Lageos, *Geophys. Res. Lett.*, **20**, 595-598.
- Nerem, R. S., C. Jekeli, and W. M. Kaula, 1995 : Gravity field determination and characteristics : Retrospective and prospective, *J. Geophys. Res.*, **100**, 15053-15074.
- 高橋勲, 他13名, 1998 : IAMAS/IAPSO'97合同国際会議の報告, *天気*, **45**, 35-42.
- Yoder, C. F., J. G. Williams, J. O. Dickey, B. E. Schutz, R. J. Eanes, and B. D. Tapley, 1983 : Secular variations of Earth's gravitational harmonics  $J_2$  coefficient from Lageos and nontidal acceleration of Earth rotation, *Nature*, **303**, 757-762.
- Wahr, J., M. Molenaar and F. Bryan, 1998 : Time variability of the Earth's gravity field : Hydrological and oceanic effects and their possible detection using GRACE, *J. Geophys. Res.*, **103**, 30205-30229.

## A New Remote Sensing Technique of Fluid Mass Distribution —Satellite Gravimetry and Its Role in the Next Generation—

Masato Furuya\* and Isao Naito\*\*

\* (Corresponding author) Earthquake Research Institute, The University of Tokyo, Tokyo 113-0032, Japan.

\*\* Division of Earth Rotation, National Astronomical Observatory

(Received 8 November 1999 ; Accepted 6 April 2000)