Poisson方程式の高速数値解法
—PSOR法とマルチグリッド法の紹介—

石　井　正　好*・栗　原　和　夫**

1．はじめに

近年の計算機の発達とともに，数値モデルによるシミュレーションは大気や海洋の現象を研究するための重要な手段となり，また数値気象予報モデルは日々の天気予報の精度の向上に大きく貢献してきている．これら数値モデルの開発にあたっては，対象とする現象の再現性を高めることが第一であるが，しかしその一方で，モデルの計算効率を高めるための地道な努力も必要である．つまり計算機資源は有限であるから，解像度を上げ，対流や放射などのパラメタリゼーションスキームを高度化し，より現実的な大気や海洋現象をシミュレートするためには，計算効率を向上させることが不可欠なのである．セミインプリシットスキームやセミラグランジュスキーム（田宮，1995）など力学モデルの時間積分法における工夫はその一例である．

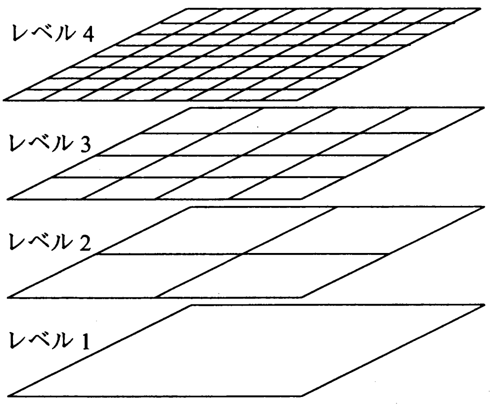
本稿では，最近の応用数学の分野で開発された，Poisson方程式をはじめとする楕円型偏微分方程式の高速解法を紹介する．従来Poisson方程式を数値的に解くために反復法が用いられてきたが，通常，反復法による解の収束は遅いため多くの計算時間が必要となる．このため，従来の逐次過緩和法を，複数の計算機を同時に使用し高速な計算を実現する並列計算に適応させた手法が，Xie and Adams（1999）によって提案されている．また，第1図のような複数の格子を用いるマルチグリッド法の開発にも著しい成果が認められる．

Dirichlet型，Neumann型の境界条件や周期境界条件を伴なうPoisson方程式は，大気や海洋の現象を記述する方程式の中に多く現われる．大気では，フィルタードモデルの渦度方程式がそれであり，また，大気大循環モデルとして幅広く用いられるプリミティブモデルで，時間積分にセミインプリシットスキームを採用する場合には，2次元のPoisson方程式を解くことになる（Haltiner and Williams, 1990）．また近年その発展が著しい非静力学モデルの非弾性系と呼ばれる方程式系からは，気圧についてのPoisson方程式が導かれる（Ogura and Phillips, 1962）．また非静力学モデルに弾性系方程式を導入しセミインプリシットスキームの時間積分法を採用した場合には，3次元のPoisson方程式を時間積分の毎ステップで解くことが必要になる（郷田・栗原，1991；斉藤，1999）．海洋では，rigid-lid近似された海洋大循環モデルの流線関数の計算がある（Bryan, 1969）．また，海面水温解析においては，衛星海面水温観測データの夜昼別のバイアスをblend法と称された手法でもって推定する際に，Poisson方程式を解いている（Reynolds and Smith, 1994）．上述した近年開発された手法は，これらの分野においても適用可能であり，数値モデルの高度化やモデルを用いた研究に大きく貢献することが期待される．例えば，これらの解法を気象庁の海洋大循環モデルに導入することで，モデル全体の実行時間が大幅に短縮されたという結果も既に得られている（Ishii and Kurihara, 2001）．

本稿では，先ず，従来の手法の簡単なレビューと並列計算向きの逐次過緩和法を紹介し（第2節），次に，各種手法を海洋大循環モデルに適用した結果を示す（第3節）．更に，これまでの大気や海洋の数値モデルの分野ではなじみがないと思われるマルチグリッド法については，第4節で紹介し，その適用例も示す．例題として海洋モデルを採用するが，手法の汎用性は高いので，以下の議論の一般性は損なわれないと考える．ただし，複雑な海陸分布を含む海洋モデル固有の問題については，以下適宜触れることにする．

* 気象庁気候情報課（ishii@naps.kishou.go.jp）．
** 気象庁気候情報課（現気象研究所物理気象研究部）．

—2001年12月27日受領—
—2002年6月11日受理—



第1図　マルチグリッド法で使用されるレベル

2．Poisson 方程式の解法

本稿で紹介する数値解法の対象は，空間 $\mathbf{x}$ の変量 $u(\mathbf{x})$ を未知数とする Possion 方程式のみならず，より一般的な楕円型偏微分方程式

$$\nabla\cdot\{\alpha(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})\}+\lambda(\mathbf{x})u(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}) \qquad (1)$$

である．ここで，∇は微分演算子，係数 $\alpha(\mathbf{x})$ と $\lambda(\mathbf{x})$，右辺の $f(\mathbf{x})$ は既知の関数であるとする．方程式の解が存在するための既知関数に要請される条件についての議論はここでは行わないが，我々の取り扱う問題の多くの場合，解の存在は保証されているであろう．上の問題を数値的に解く際には，適当な格子系を定義した上で（1）式を差分表現する．以下簡単化して，係数 $\alpha(\mathbf{x})$ と左辺の第2項は除外し，2次元空間で∇を5点近似したものを取り扱うことにする．グリッド $(i,\ j)$ とその周囲の点での値を用いて（1）式は，

$$4u_{i,j}-u_{i-1,j}-u_{i+1,j}-u_{i,j-1}-u_{i,j+1}=h^2f_{i,j} \qquad (2)$$

と近似表現される．h は格子間隔で，ここでは一定としている．(2) 式の左辺の u をベクトル $\mathbf{u}$，右辺の f を $\mathbf{f}$ とし，$\mathbf{u}$ の係数を行列 $\mathbf{A}$ にまとめると，

$$\mathbf{Au}=\mathbf{f} \qquad (3)$$

と表現できることから，Poisson 式の解を求める問題は連立1次方程式を解くことに帰着する．行列 $\mathbf{A}$ は，全格子点数の自乗の数の要素を含む大規模行列であるが，その各行について5つ以外の要素は零であるという疎行列でもある．

楕円型偏微分方程式の解法として，1）直接法，2）繰り返し法，3）多重格子法がある．次節で，従来より用いられきた直接法と繰り返し法について簡単にレビューする．3番目の多重格子法の1つとしてマルチグリッド法がある．マルチグリッド法は従来の解法を組み合わせて構成されるが，呼称にあるように，複数の格子を使用して高速に解を求めることができる．我々の使用したマルチグリッド法は節をあらためて紹介する．本稿で Poisson 方程式の解法の代表的なものとして紹介する手法の一覧を，第1表にまとめた．

2.1　直接法

未知数の数が少なければ Gauss の消去法をはじめとする直接法が有効であるが，一般には，大規模行列の各要素を計算機のメモリ上に展開することはできない．未知数の数の制限を受けない直接法として cyclic reduction（例えば Swarztrauber and Sweet，1996）がある．Botta *et al*.（1997）によれば，1995年の時点で cyclic reduction は Laplace 方程式の最も高速な解法であるが，適用可能な問題は制限されている．例えば，一様な格子間隔を持つ格子上での定式化された Poisson 方程式には適用可能である．一方，格子間隔が異なる場合や，（1）式の $\alpha(\mathbf{x})$ が $\mathbf{x}$ に依存する場合などは，適用が困難になる．限定的ではあるが，cyclic reduction 法などの4種の直接法を海洋モデルの流線関数計算に適用した例が O'Brien (1986) に紹介されている．

2.2　繰り返し法

大規模連立方程式の解法である繰り返し法には，緩和法と勾配法がある．

緩和法は，Jacobi 法，Gauss-Seidel 法，逐次過緩和法 (SOR：Successive OverRelaxization) に分類される．Jacobi 法と Gauss-Seidel 法は，それぞれ，Richardson 法と Liebman 法と参照されることもある (Chow，1983)．いずれも，近似式の (2) 式によって，$u_{i,j}$を周囲の値の算術和で更新するというアルゴリズムを繰り返しながら正解に近づける．このとき，$u_{i,j}$の更新の際に使用する周囲の値の使いかた，つまり既に更新された周囲の値を使用するか否かによって Jacobi 法，Gauss-Seidel 法と呼ばれる解法に分類される．既に更新されている値を利用する後者の方が一般に収束は速い．それでも上述の緩和法は収束が遅いため加速パラメータを導入した逐次過緩和法も広く使用されている．これらの手法でもって解が収束するための条件や最適な加速パラメータについての数学的な議論は，森ほか（1994）などの文献に詳しい．

勾配法は，各回の繰り返しの際の最も良く解を改善

第1表　本稿で紹介する Poisson 方程式の解法の特徴．用語，記号等の詳細は本文を参照のこと．

大分類	解法	特徴
直接法	Gauss 消去法	**A** が正則で数値計算上も安定であれば正確な求解が可．
	cyclic reduction 法	高速．前処理に時間がかかるので，**A** が毎回変わるような場合は不向．**A** が対称の場合，適用は容易．
緩和法	Jacobi 法	繰り返し法．アルゴリズムは単純であるが収束は遅い．ベクトル計算可．並列計算適．
	Gauss-Seidel 法	Jacobi 法を高速化．ベクトル計算不可．並列計算不適．
	SOR 法	Gauss-Seidel 法に加速パラメータを導入し更に高速化．ベクトル計算不可．並列計算不適．
	Red/Black 法	Gauss-Seidel 法や SOR 法を演算順序を工夫しベクトル計算・並列計算向きにアレンジ．
	PSOR 法	並列計算向きの SOR 法．並列計算での通信を少なくし並列効率を高める．ベクトル計算不可．
勾配法	勾配法	繰り返し法の別種．アルゴリズムは行列とベクトルの演算で構成されるためベクトル計算に適．一般に **A** が対称でないと計算が不安定．並列計算適，ただしベクトルの内積計算に通信の負荷がかかる．
	勾配法加速型 Gauss-Seidel 法	勾配法と Gauss-Seidel 法を組み合わせて収束を加速．**A** は対称．
	Orthomin 法	**A** が非対称の場合にも適用可．
多重格子法	マルチグリッド法	解像度の異なる複数の格子を使用して高速に求解．各格子で直接法や繰り返し法の解法を使用．

する方向を示す探査ベクトルの共役性と残差ベクトルの直交性を利用して構成されている．繰り返し計算のアルゴリズムは，ベクトルと行列に関する演算で構成されているためベクトル計算[†1]に適しているが，反面，繰り返し計算の回数とともに丸め誤差の影響が大きくなるとか，**A** が非対称の場合収束が遅いまたは収束に失敗するなどの欠点もある．行列 **A** の固有値を1に近づけるような前処理（preconditioned）を施すことで，収束を速くするなどの工夫もなされる．勾配法に関する数学的な議論は，先と同様に森ほか（1994）などの文献にあたって頂きたい．勾配法には，幾つかの変形があり，本稿では，行列 **A** が対称な場合に安定して動作する最も基本的な勾配法，勾配法加速型 Gauss-Seidel 法，探査方向として2つのベクトルを用いる，一般に Orthomin と呼ばれる勾配法を使用する．2番目と3番目の方法は，Douglas（1995）を参考にした．3番目の方法は **A** が対称でない場合にも安定して動作する．

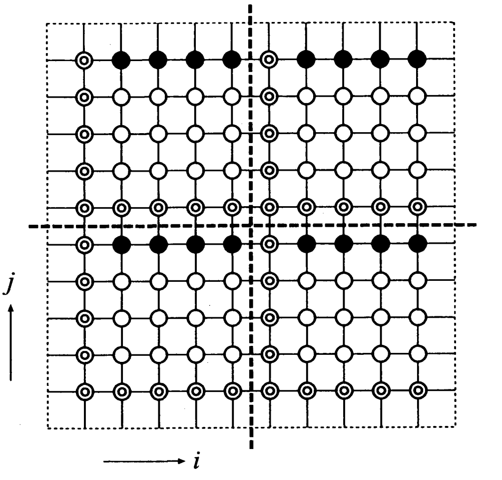
†1 ベクトルプロセッサを備えた計算機では，FORTRAN の DO ループ内部に展開される各配列要素の処理を高速に行うことができる．ここでベクトル計算が有効になるために，ループ内での配列要素の更新と参照の関係に満たすべき条件がある．詳しくは，東京大学大型計算機センター（1998）などを参照のこと．通常，スーパーコンピュータと呼ばれる大型の計算機ではベクトル計算が可能である．これに対して，パーソナルコンピュータにはベクトル計算の機能はない．

2.3　並列計算向け繰り返し法

並列計算では，一塊の処理をなるべく均等に分割して，複数の計算機に分担，同時計算させて，高速に処理を完了させることができる．この一群の計算機はネットワークで接続され，個々の計算機はノードと呼ばれる．並列計算では，ノードとノードの間のデータ交換のためのノード間通信が必要となる．したがって，並列計算に適したアルゴリズムとは，各ノードで計算を同時に行なえるもので，加えてノード間通信の回数や交換するデータ量が少ないものであるといえる．

以下では，並列計算によって Poisson 方程式の解を高速に求める解法について紹介する．

Gauss-Seidel 法や SOR 法のアルゴリズムは，あるノードの担当領域の計算が終了しても，その他のノードが担当する領域の計算の完了を待つ必要があるため並列計算には適していない．そこで，これらの解法を並列計算に適合させたものとして Red/Black 法が提案された（例えば森ほか，1994）．Red/Black 法のアルゴリズムはベクトル計算にも対応している．Poisson 方程式の解を並列計算の Red/Black 法で求めるとき，あるノードの担当領域計算には，その領域境界のデータが必要になる．このため，境界データは近傍の領域を担当するノードとの間で共有されていなければならない．Red/Black 法のアルゴリズムでは，境界領域のデータ交換に，繰り返し計算1回につき2回の通信が必要である．



第 2 図　PSOR 法の格子と分割領域：太い破線の示すように 4 つの領域に分割する．格子点上の各記号の意味については本文を参照のこと．

1. 領域南側境界 ◎ での計算

$$u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} + \omega(u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i+1,j}^{(k+1)} + u_{i,j-1}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + h^2 f_{i,j})/4 - u_{i,j}^{(k)}$$

2. 領域西側境界 ◎ での計算

$$u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} + \omega(u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k+1)} + u_{i,j+1}^{(k)} + h^2 f_{i,j})/4 - u_{i,j}^{(k)}$$

3. ◎ での結果を近傍のプロセッサへ転送

4. 領域内部 ○ での計算

$$u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} + \omega(u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k+1)} + u_{i,j+1}^{(k)} + h^2 f_{i,j})/4 - u_{i,j}^{(k)}$$

5. 領域北側境界 ● での計算

$$u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} + \omega(u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k+1)} + u_{i,j+1}^{(k+1)} + h^2 f_{i,j})/4 - u_{i,j}^{(k)}$$

6. ●と東側境界の結果を近傍のプロセッサへ転送

第 3 図　PSOR 法のアルゴリズム：添字 i, j は，それぞれ第 2 図の東西，南北方向の格子点番号で，k はステップ番号である．

勾配法の場合の並列計算への対応は容易である．ただし，勾配法アルゴリズムはベクトルの内積の計算をいくつか含んでいる．この内積計算のために，各ノードで計算された内積の総和を計算し，その計算結果を各ノードに返すという，全ノードを対象にした通信を行わなければならない．この種の通信は一対一のノード間通信に比べて，より多くの経過時間を必要とする．このため勾配法では，繰り返し回数が多くなると並列効率の低下が生じる可能性が高くなる．

Red/Black 法とは別に，SOR 法をさらに並列計算に適合させたものが Xie and Adams (1999) によって提案された．彼らの呼称に倣い，この手法を PSOR 法として以下参照する．

PSOR 法では第 2 図の太い破線が示すように分割された各領域で，第 3 図に示された手順で解いていく．

PSOR 法の手順は従来の SOR 法と比べてやや複雑な構成となっている．いま，k ステップ目の計算結果が得られているとして $k+1$ ステップ目の計算を行うとする．各分割領域では，最初に，領域南側境界の格子点（◎）での $k+1$ ステップ目の値 $u_{i,j}^{(k+1)}$ を，東，北，南側の点では k ステップ目の値を，西側の点では既に更新されている $k+1$ ステップ目の値を用いて計算する．次に，西側境界の点（◎）では，既に更新された南側の値を用いて値が更新される．格子点◎での計算結果は，計算終了後直ちに近傍のノードへ転送される．次に領域内部の点（○）と北側境界の点（●）での計算を順次行い，最後に北側と東側の境界データをノード間で交換し，$k+1$ ステップ目の計算が完了する．ここで，ω は SOR 法の加速パラメータである．各点での値を更新する際，$k+1$ ステップ目の更新済みの値を，可能なかぎり使用するようにアルゴリズムが構成されていることに注意されたい．

第 3 図の 4 番目の計算は，3 番目の通信の終了を待たずに実行可能である．つまり，格子点○の値を更新している間に格子点◎のデータ交換を行うことができる．このことから，通信に要する時間と計算に要する時間をオーバラップさせ計算を効率化することができる．また，PSOR 法では近似解を更新する 1 ステップあたりに必要な通信の回数は Red/Black 法の場合の半分で，並列計算において通信が律速段階となる状況の発生頻度が低くなる．PSOR 法が従来の SOR 法と同等の収束特性を持つことが Xie and Adams (1999) によって証明されている．反面，Red/Black 型でない SOR 法と同様の方法で値を更新するためベクトル計算には不適である．

筆者らは，各分割領域の東端の点を○の領域から分離させ，●の領域の計算を終了した後，周囲の更新済みの値を使用して東端の点の値を更新する，という手順を採用した．この場合，既に更新されている値を使用することで解の収束は一層加速され，計算時間が短縮する．これを，PSOR2法として以下参照する．

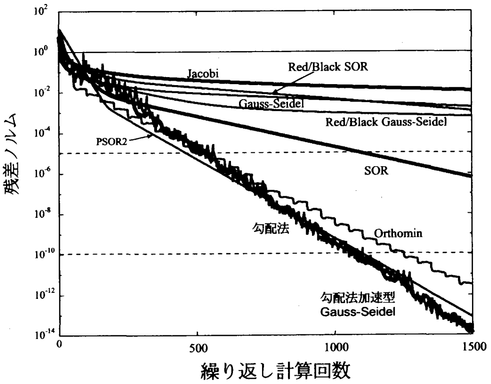
3．繰り返し法の収束特性

上述した全ての繰り返し法の例題として，ここでは気象庁の現業用全球海洋大循環モデル (Kimoto *et al.*, 1997) に現れる楕円型偏微分方程式をとりあげる．

rigidlid タイプの海洋モデルは，海面に固い蓋をした状態で運動場を順圧成分と傾圧成分に分けて計算する．この順圧成分を表す流線関数について，(1) 式のような楕円型偏微分方程式があらわれる．海洋モデルでは海陸の分布を考慮するため，陸または島の縁で一定であるという境界条件の下に問題を解くことになる．また全球海洋モデルであるから，計算領域の東端と西端が連続しているという周期境界条件も経度方向に設定される．ここでの海洋モデルの水平の格子数は，144×108個（経度×緯度）である．

各繰り返し法を例題に適用したときの，解の収束の速さを示したのが第4図である．横軸は繰り返し回数，縦軸は格子点数（N）で規格化した残差ノルム（$\|\mathbf{f}-\mathbf{Au}\|/N$）である．ここで，SOR 法などの加速型の解法の加速係数は，異なる係数の値をいくつか試みたのち最適なものを選んでいる．いずれの手法もはじめの100回くらいまでは優劣をつけ難いが，400回を超えたあたりから歴然とした差が生じている．Jacobi, Gauss-Seidel, SOR 法などの場合，400回以降の収束は悪く，1500回にして残差ノルムは10^{-3}程度である．これに対して，3種類の勾配法と PSOR2法は収束が速く，500回から600回程度で残差ノルムが10^{-5}となっている．現行の海洋モデルに採用されている SOR 法は，これらの中間に位置している．ちなみに，使用した海洋モデルの実際の運用にあたっては，収束判定を残差が10^{-5}以下となった時としている．およそ，その解法が提案された年代順に速くなっているが，この速さの順位や収束の様相は，取り扱う問題によって異なるので注意が必要である．

勾配法では数十回おきにアルゴリズムのリスタート，つまり，それまでに得られている近似解を初期値としてアルゴリズムの初めから繰り返し計算を再開するということを行っている．リスタートを行った方が，この問題に関しては収束が2～3倍速くなっていた．前節で述べたように，この勾配法は $\mathbf{A}$ が対称である場合に安定して動作する．例題の $\mathbf{A}$ は対称ではないが，リスタートの有無にかかわらず，解は正常に求められていた．Orthmin ではリスタート後の収束が芳しくないため，階段状の収束特性が得られている．これは，陸付近に位置する，ある特定の海域での収束の悪さが影響しているためである．勾配法加速型 Gauss-Seidel 法の収束特性は勾配法のものとほとんど一致しているが，残差ノルムの大きさが，繰り返し回数とともに小さく振動している．



第4図　各手法の収束速度：9つの繰り返し手法を海洋モデルの問題に適用した場合の残差のノルム（縦軸）を示す．横軸は繰り返し計算の回数である．各手法については本文参照．

SOR 法に比べて，勾配法や PSOR2法の収束速度は高々2倍強で，依然として数百回もの繰り返しが必要である．これら手法の実行に要する計算時間の長短で比較した場合，その順位は，概ね，繰り返し回数の多寡に比例する．ただし，計算時間は手法のアルゴリズムの複雑さや，ベクトル計算や並列計算への適合の度合にも依存する．著者らの経験を一例として挙げれば，第4図では Red/Black SOR 法は SOR 法よりも収束特性は悪いが，ベクトル計算対応の計算機で実行時間を比較するとその順序が逆転していた．次節では，より高速な解法であるマルチグリッド法を紹介し，計算時間を比較しながら，実際の状況に則して手法の評価を試みる．

4．マルチグリッド法

Poisson 方程式の解を求めるマルチグリッド法では，解像度の異なる複数の格子を導入して，各格子で上述した直接法や繰り返し法を用いて近似解を計算する．さらに，この手続きを何度か繰り返して最終的に最も細かい格子での解を求める．この手続きは，絵を描くときの，初めに輪郭を決める下絵を描きそのあと細部を描いていく様を想起させる．マルチグリッド法にはいくつかの方法がある (Wesseling, 1991) が，本稿では Douglas (1992) の提案にならいマルチグリッド法を構成し，第3節の例題に適用した結果も示す．

4.1　手法

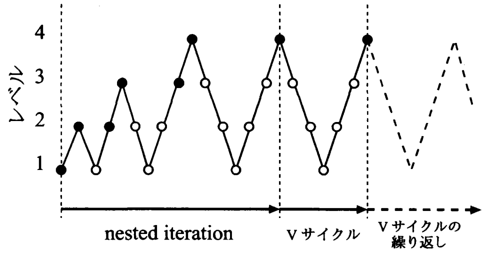
第1図に示したように，複数の格子を用意する．図ではレベル4からレベル1まであるが，それらの縦横

の格子間隔は下位のレベルに向って2倍ずつ大きくなっている．求めるべき解は，レベル4の最も細い格子でのものである．各レベルで差分化したPoisson方程式が定義され，繰り返し法や直接法でその近似解が求められる．

求解にあたって各レベルでの近似解をどのように活用するかにはいくつかの方法がある．Douglas (1992) では，Vサイクル，Wサイクル，nested iteration による求解手順を紹介している．本稿では，第5図に示すように，nested iteration とVサイクルを組合せた方法を採る．Vサイクルなどの呼称は，その形状に由来している．第5図に示した手順の詳細は以下の通りである．まず，nested iteration の最初の●では，最も粗い格子レベル1で解を求める．次に，その解をレベル2の格子へ内挿し，内挿された値を繰り返し法の初期値としてレベル2での近似解を求める（2番目の●)．ただし，ここでは繰り返し計算を一定回数行うだけとし，どれだけ解が収束したかは特段問題としない．その後，レベル2での近似解 ($\tilde{\mathbf{u}}$) の残差 ($\delta\mathbf{u}$) をレベル1へ内挿して，残差についての方程式 $\mathbf{A}\delta\mathbf{u}=\mathbf{f}-\mathbf{A}\tilde{\mathbf{u}}$ をレベル1で解く(3番目の○)．その残差分についての解をレベル2へ内挿し近似解に加え，レベル2での近似解の改善を行なう．4番目の●では，改善された近似解を初期値として，再び，繰り返し法のアルゴリズムを一定回数だけ行う．以下同様に，図示した順序で，●では，該当レベルでの方程式の解を繰り返し法により求め，○では，上位レベルの残差についての方程式の解を求める．残差についての方程式を解くレベルからさらに下位のレベルに向う場合には，その残差方程式についての残差方程式を構成して解を求めることになる．上記のように，Vサイクルや nested iteration は，各レベルでの連立1次方程式を再帰的に解きながら Poisson 方程式の解を求める手順を表している．

最も解像度の高いレベル4では，一定回数の繰り返し計算を実行した後，近似解の収束判定を行う．nested iteration を経て解が未だ収束していない場合は，Vサイクルにより解の残差分についての方程式を解き，レベル4での近似解の改善を行うことを繰り返す．

繰り返し法の初期値に適当なものがないという状況では，nested iteration を選択するのが良いとされている．また，最も粗い格子では，Gauss 消去法などの直接法により正確に解を求めた方が収束は速い．



第5図　マルチグリッド法のアルゴリズム：レベルについては，第1図を参照のこと．

4.2　適用例

以下に海洋モデルを実行させたときの計算時間を示すが，その計算はベクトル計算が可能な日立製作所製 SR8000と Alpha PC を複数台数(VT 社製5台と HIT 社製4台）をネットワーク接続した Alpha PC クラスターで行う．両者とも並列計算が可能となっているが，後者ではベクトル計算は不可能である．Alpha PC クラスターでは，各計算機は通信容量100Mbps（毎秒1億ビット）のネットワークケーブル（100BaseT）で接続されている．気象庁の海洋モデルは，高度情報科学技術研究機構の協力のもとで並列計算向けに対応がなされており(荒川ほか，1999)，本稿では，これに若干手を加えたものを使用する．

マルチグリッド法の収束特性が良いことが，第2表から見てとれる．表には，各レベルで使用した解法の4通りの組合せについて，海洋モデルを5日間積分したときに要した経過時間を示してある．各組合せは，試行錯誤ののち計算時間の短かいものを選んだ．最も粗いレベル1では，全ての組合せにおいて，疎行列用に構成された Gauss の消去法を使用した．表中の勾配法は，第2節で紹介した最も基本的な勾配法である．比較のために，PSOR2法と SOR 法の場合の時間も示してある．また，各レベルで採用した繰り返し法の名称の箇所に，アルゴリズムの繰り返し回数を括弧付きで記している．ここで，レベル2から4で採用された繰り返し解法の回数が少ないことに注目されたい．解が収束するまでの netsted iteration の後のVサイクルの回数は，いずれの組合せの場合でも数回に留まっていた．したがって，レベル4での全繰り返し回数は高々数十回であったことになる．一方，繰り返し法を単独で使用した場合は，数百回の繰り返し回数を必要とした(第4図)．著者らの経験によれば，マルチグリッドの場合には各レベルでの繰り返し法のアルゴリズム

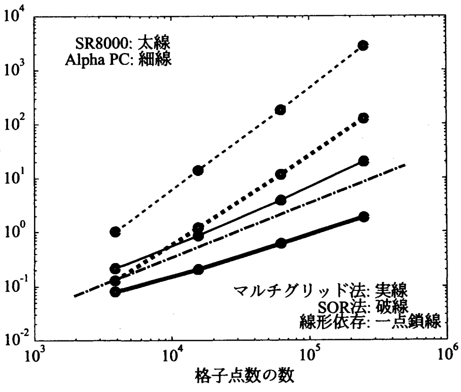
第2表　海洋モデルに適用したマルチグリッド法での繰り返し法の組と経過時間：レベル4からレベル2で採用された手法の組と，その組み合わせで例題を解いたときに要した計算時間を示した．比較のためにPSOR2法とSOR法のみを使用した場合の時間も表示してある．レベルについては，第1図を参照のこと．

レベル4	レベル3	レベル2	時間
Gauss-Seidel(5)	勾配法(4)	Red/Black SOR(3)	35
Orthomin(6)	PSOR2(3)	PSOR(2)	40
勾配法(8)	R/B SOR(5)	勾配法(5)	41
PSOR2	—	—	128
SOR	—	—	320

の回数は高々10回未満に留めておき，Vサイクルを繰り返すことで解を収束させた方が結果的には収束は速い．解法の組合せにおいては，第4図で解法単体の性能の高いものが必ずしも選ばれているわけではない．以上の計算は単体のAlpha PCで行われた．

例題の海洋モデルをSR8000で実行させたとき，SOR法による順圧成分の計算にモデル全体の計算時間の半分近い時間を浪費する．マルチグリッド法を導入すると，計算時間が最も短い組合せの場合で，順圧成分の計算時間はSOR法に比べて1/9に短縮される．実際にマルチグリッド法で海洋モデルを積分すると，順圧成分の計算に要する時間は全体の数%に留まっていた．

従来の繰り返し法では，モデルの解像度が高くなりPoisson方程式の未知数が増えると計算時間が大きく増大し，解法の実用が困難な状況が生じる．そこで次に，マルチグリッド法の場合の，モデル格子のサイズを変えた場合の計算時間への影響を調べてみる．例によって海洋モデルを使用する[†2]が，ここでは海洋モデルの解像度を半分，1倍，2倍，4倍にした4つの場合を考える．ただし，各解像度での海洋モデルを構成し積分することは作業量が多くなるので，現行モデルの解像度での問題に使用される入力値を各解像度へ線形内挿して，(1) 式に相当する計算のみを行うことにする．各解像度で使用するレベル数は，それぞれ3，4，5，6である．さらに，使用する解法の組み合わせは，Jacobi法，Gauss-Seidel法，Red/Black SOR法，勾配法を適当に組み合わせたものとした．計算は単体のAlpha PC (細線) と1ノードのSR8000 (太線) で行った．その結果は第6図に，対数目盛の横軸に未知数の数，対数目盛の縦軸にCPU時間として実線で示されている．比較のためにSOR法を使用した場合の結果を破線で表示してある．図中の1点鎖線は，解像度に比例した計算時間を表す．マルチグリッド法の場合の計算時間は，格子点数の増加に対してほぼ比例して時間が延長するという結果が得られた．更に，ベクトル計算機のSR8000では，格子点数の増加とともにベクトル計算効率が高まり，その分の計算時間が短縮しているということが読み取れる．これに対してSOR法の場合は，格子点数の増加に伴い加速度的にCPU時間が増大している．



第6図　解像度依存性：海洋モデルの解像度を半分，1倍，2倍，4倍にしたときの，計算に要する時間の変化を，マルチグリッドの場合 (実線) とSOR法の場合 (破線) について示す．横軸は未知数の数，縦軸が計算時間である．また，太線はSR8000で，細線はAlpha PCクラスタでそれぞれ計算した場合の結果である．一点鎖線は，計算時間が解像度に比例する場合の勾配を表している．

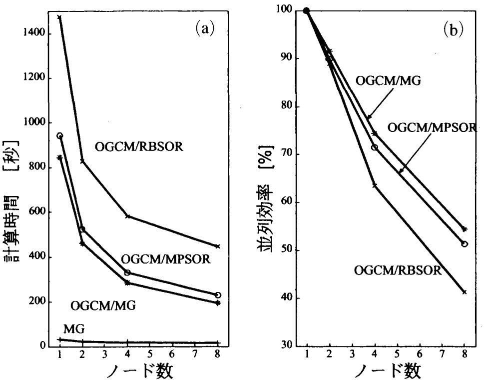
4.3　並列計算

マルチグリッド法を並列計算で行う場合，各レベルで使用する繰り返し法で必要な通信に加えて，レベル間でグリッド値の内挿を行う際の通信が余計に必要になる．このため，単一計算機用のアルゴリズムをそのまま並列計算に適用しても，期待どおりの結果は得ら

[†2] 高解像度rigid-lidモデルの流線関数計算においては，Poisson方程式の解の計算の他に，もう1つ別の問題がある．それはrigid-lid海洋モデルの流線関数計算の最終段階で，島の数に相当する未知数についての連立1次方程式を解かなければならないということである．海洋モデルの解像度を高くすると，当然，表現すべき島の数が増え，その取り扱いも繁雑になるが，ここでの計算では，島の数は格子サイズによらず一定としている．

れない．そこで Jones (1999) や Mitchell (1997) の示唆にならい，周囲の分割領域と重複する境界領域を広くとることにする．こうすることで，レベル4以外では繰り返し法に伴う通信を行わず，内挿に伴う通信もレベル4とレベル3の間だけとすることができる．ただし，粗いレベルでの繰り返し計算において，担当領域外のデータを参照しないために，領域境界付近での解の収束が遅くなり，この分だけ繰り返し計算が更に必要となるというのが難点である．上述したように下位レベルでの通信を一切行なわないため，iteration は採用せずに V サイクルで計算を進めていく．前掲の文献では，境界を広くとることを extended overlap と呼んでいる．本稿では，彼らのアイデアを上記したような最も単純な方法で実現している．

並列計算の結果を第7図に示した．海洋モデルを計算機の数（ノード数）1，2，4，8個（横軸）で5日間積分したときの全経過時間（左，秒）と並列効率（右，%）をプロットしてある．並列効率は，1ノードの場合に要した時間を，ノード数とそのノード数の場合に要した時間の積で割ったものとして定義されている．また，海洋モデルの領域は緯度方向にのみ分割し，経度方向には分割を行なっていない．計算は Alpha PC クラスターで行なった．使用した解法は，Red/Black SOR 法，PSOR2法，そしてマルチグリッド法である．図中，それぞれ OGCM/RBSOR，OGCM/MPSOR，OGCM/MG と略記している．マルチグリッド法による順圧成分の計算に要した経過時間も示してある (MG)．この時間は全体のそれ (OGCM/MG) に比べて僅かであることが一瞥して分かる．PSOR2法とマルチグリッド法の場合は，Red/Black SOR 法に比べて2倍程度速くなっている．これらの差は楕円型偏微分方程式の計算方法を変えただけの相違から生じており，またこの結果は，Poisson 方程式の解法の選択によりモデル全体の計算効率が大きく左右されることを示す適例でもある．ノード数を増したときの PSOR2法とマルチグリッド法の並列効率は，4ノードで70%以上，8ノードで50%以上となっている．モデルの解像度が粗いことと，Alpha PC クラスターのネットワークの性能が高くはないこともあり，8ノードでは，ネットワークの負荷が計算時間のそれに比べて実質的に大きいと判断される．この例の場合には，海洋モデルを2から4ノード位で並列計算するのが実用上は適当であろう．ただし，使用した海洋モデルでは，データの入出力部は並列計算用に最適化されていないなど



第7図 並列計算結果：海洋モデルを1，2，4，8ノードで5日間並列計算したときの計算時間（(a)，秒）と並列効率（(b)，%）を示す．海洋モデルの順圧モードの計算に，マルチグリッド法（OGCM/MG），PSOR2法（OGCM/PSOR2），Red/Black SOR 法（OGCM/RBSOR）をそれぞれ使用した場合の結果を比較している．図中 MG は，マルチグリッド法のみに費やされた計算時間である．

の改善の余地がいくつか残っている．

5．まとめ

以上，Poisson 方程式の高速数値解法として，従来の解法について簡単にレビューし，PSOR 法やマルチグリッド法という新しい解法の紹介を行ってきた．また，各手法を気象庁の海洋モデルの流線関数計算に適用し，その結果を示した．Poisson 方程式は我々の分野において頻繁に現れ，大気や海洋の大循環モデルでも不可避な問題である．Poisson 方程式の解の数値計算に多くの計算時間を要している現状を解決するためには，ベクトル計算や並列計算に適した手法を選択し導入すべきである．単一計算機の場合には，ベクトル計算に適した勾配法や高い収束速度を持つマルチグリッド法の計算効率は高い．並列計算では，PSOR 法やマルチグリッド法が有効であろう．ただ，高速処理の必要性があまり高くなければ，アルゴリズムが単純な勾配法や PSOR 法を選択することでも良いだろう．

本稿では，ハードウェアによる Poisson 方程式の解法の高速化の手段として，ベクトル計算による方法と並列計算によるものを紹介した．その記述は，一般的なベクトル計算対応の計算機や並列計算対応の計算機において有効である点を示すに留めた．各種ある計算機でどのように計算効率を高めるかについては，それ

ぞれのケースで対応することが必要である．例えば，中央演算装置（CPU）が高速にアクセスできる記憶装置（キャッシュ）を搭載する計算機では，キャッシュを効果的に使用するプログラムを書くことも最適化作業の1つとなるだろう．Douglas(1992)は，キャッシュを有効利用するRed/Black法を紹介し，これにより25—40%の高速化が得られると述べている．

例題として用いた海洋モデルの流線関数の計算の結果から，マルチグリッド法は，解像度を変えても1格子点あたりの計算時間がほぼ一定であるという，良い特性を持つことが分かった．このことから，マルチグリッド法は，近年の並列計算やモデルの大型化において，その使用に耐えうる数少ない手法の1つではないかと思われる．使用される粗格子や解法の選択，また効率の高い並列計算方法などの点において，マルチグリッド法の発展の余地が認められるため，今後，この分野の研究者と情報交換が大事であると思われる．

謝 辞

本稿に述べた調査は，平成10年度ならびに平成13年度の3年間科学技術振興調整費の助成を受けて行われた．また，SR8000での計算にあたっては東京大学気候システム研究センターの協力を得た．本稿の改稿にあたり，査読者から多くの貴重なコメントを頂いた．

参 考 文 献

荒川 隆，長谷川直之，山中吾郎，1999：気象庁大気海洋結合モデル「空海」の並列化（海洋部分），日本気象学会1999年度秋季大会講演予稿集．

Botta, E. F. F., K. Dekker, Y. Notay, van der Ploeg, C. Vuik, F. W. Wubs and P. M. de Zeeuw, 1997：How fast the Laplace equation was solved in 1995, Applied Numerical Mathematics, **24**, 439-455.

Bryan, K., 1969：A numerical method for the study of the circulation of the world ocean, J. Comput. Phys., **4**, 347-376.

Chow, C.-Y., 1983：An Introduction to Computational Fluid Mechanics, John Wiley & Sons, 396pp.

Douglas, C. C., 1992：A review of numerous parallel multigrid methods, SIAM News, **25**.

Douglas, C. C., 1995：Madpack：A family of abstract multigrid or multilevel solvers, Comput. Appl. Math., **14**, 3-20.

郷田治稔，栗原和夫，1991：非静力学モデルの開発，数値予報課報告・別冊第37号，気象庁予報部，67-82.

Haltiner, G. J. and R. T. Williams, 1990：Numerical Prediction and Dynamic meteorology (2nd edition), John Wiley and Sons, 477pp.

Ishii, M. and K. Kurihara, 2001：Parallel iterative and multigrid solvers for elliptic equations of a rigidlid ocean model, The 3rd International Workshop on Next Generation Climate Models for Advanced High Performance Computing Facilities. (Tokyo, 28-30 March, 2001).

Jones, J. E., 1999：A Parallel Multigrid Tutorial, 1999 Copper Mountain Conference on Multigrid Methods, http：//www.mgnet.org/mgnet/Conferences/CopperMtn99/Tutorials/.

Kimoto, M., I. Yoshikawa and M. Ishii, 1997：An ocean data assimilation system for climate monitoring, J. Meteor. Soc. Japan, **75**, 471-487.

Mitchell, W. F., 1997：A parallel mutigrid method using the full domain partition, ETNA, **6**, 224-233.

森 正武，杉原正顕，室田一雄，1994：線形計算，岩波講座応用数学8，岩波書店，121pp.

O'Brien, J. J., 1986：Advanced Physical Oceanographic Numerical Modelling, Reidel Press, 186pp.

Ogura, Y. and N. A. Phillips, 1962：A scale analysis of deep and shallow convection in the atmosphere, J. Atmos. Sci., **19**, 173-179.

Reynolds, R. W. and T. M. Smith, 1994：Improved global sea surface temperature analyses using optimum interpolation, J. Climate, **7**, 929-948.

斉藤和夫，1999：非静力学モデル，気象研究ノート，(196)，日本気象学会，195pp.

Swarztrauber, P. N. and R. A. Sweet, 1996：The Fourier and cyclic reduction methods for solving Poisson's equation, Handbook of Fluid Dynamics and Fluid Machinery, John Wiley & Sons 2776 pp.

田宮久一郎，1995：セミラグランジュ法，天気，**42**，315-316.

東京大学大型計算機センター，1998：センターニュース（1998年7月号），111-123.

Wesseling, P., 1991：An Intrduction to Multigrid Methods, John Willey & Sons, 284pp.

Xie, D. and L. Adams, 1999：New parallel SOR method by domain partitioning, SIAM J. Sci. Comput., **20**, 2261-2281.

Fast Poisson-Equation Solvers
—An Introduction to Advanced Methodologies：PSOR and Multigrid—

Masayoshi ISHII* and Kazuo KURIHARA**

* *Climate Prediction Division, Japan Meteorological Agency, 1-3-4, Otemachi, Chiyoda-ku, Tokyo, 100-8122, JAPAN.*
** *Climate Prediction Division, Japan Meteorological Agency, (Present Affiliation：Meteorological Research Institute)*

(Received 27 December 2001；Accepted 11 June 2002)

情報 File

アジア太平洋地域を中心とした豪雨予報モデルの高度化に関する専門家会議

日　時：平成15年2月4日(火)10：00～6日(木)12：30
場　所：気象庁講堂（東京都千代田区大手町1-3-4）
主　催：気象庁
参加料：無料
内　容：豪雨の予測精度を向上させるための数値予報モデルおよびモデルの初期値作成手法の高度化を目的として，豪雨予測モデル開発や豪雨研究に係わるアジア太平洋地域主要国と欧米の専門家を招聘し，豪雨予測のための数値予報技術高度化のための各国活動の紹介と討論を行います．シップ・アンド・オーシャン財団の平成14年度海外交流基金による国際交流事業の一環として行われます．以下のようなセッションが持たれる予定ですので，豪雨予測に興味のある幅広い方々の参加を期待します．

・アジア太平洋地域における豪雨災害
・各国豪雨予測システムの現状と計画
・豪雨予測のためのモデルの高度化（力学フレーム）
・豪雨予測のためのモデルの高度化（物理過程）
・豪雨予測のための観測とデータ取得
・豪雨予測のためのデータ同化
・豪雨予測のためのアプリケーション
・総合討論と提言，国際協力

申し込み締め切り：11月15日
予稿提出締め切り：1月15日
詳細案内は数値予報研究開発プラットホームホームページ http：//pfi.kishou.go.jp/ に随時掲載していく予定です．
問い合わせ先：気象庁予報部数値予報課
（東京都千代田区大手町1-3-4）　担当　斉藤和雄
Tel（直通）：03-3211-8408
E-mail：ksaito@npd.kishou.go.jp