ノーマルモード・ロスビー波の最適励起について

福　田　純　也*・宮　原　三　郎**

要　旨

大気中に観測されるノーマルモード・ロスビー波の励起をL_2ノルム最適励起問題の立場から議論する．β平面上の線形準地衡風渦位方程式を用いて，ノーマルモード・ロスビー波に対応する固有モードを求める．次にその随伴モード（最適初期擾乱）を求めそれが対流圏に局在するモードであることを示し，そのモードが成層圏・中間圏に数日で伝播してノーマルモード・ロスビー波を形成することを示す．また，二次元ベクトルの斜交基底ベクトルによる表現を例にとり，L_2ノルム最適励起問題について，簡単な説明を試みる．

1．はじめに

ノーマルモード・ロスビー波はプラネタリー波の時間スケールを持った大気の自由振動モードである．静止した等温大気中では，この波はラプラスの潮汐方程式の固有値である等価深度（equivalent depth）がγHであるモードに対応している（Andrews *et al*. 1987；廣岡 1987）．ここでγは比熱比でありHは大気のスケールハイトである．現実的な帯状平均場を持った大気中のノーマルモード・ロスビー波については，Salby（1981a，b）が詳しい議論を展開している．大気中には，5日波，10日波，16日波などが存在することが観測やデータ解析により示されている（Madden and Julian 1972；Madden and Labitzke 1981；Hirota and Hirooka 1984；Ahlquist 1985；Hirooka and Hirota 1985）．

ノーマルモード・ロスビー波の励起については，幾つかの機構が提唱されている．一つは熱帯対流圏の湿潤対流加熱を励起源とするものである（Salby and Garcia 1987；Miyoshi and Hirooka 1999）．これとは異なる機構として，南極の地形による5日波の励起も提唱されている（Cheong and Kimura 1997）．これらの機構は大気に与えられるある周期を持った強制力に対して，大気が持つ散逸機構に打ち勝って共鳴的に励起される点では，共通の考え方に基づいている．

2日波については，共鳴励起とは異なり，傾圧不安定による励起機構がPlumb（1983）やPfister（1985）により提唱されている．これは2日波をノーマルモードとする考え（Salby 1981a, b；Salby 1984）とは根本的に異なっている．上部成層圏のデータの解析（Randel 1994）によると，この波は東風ジェットの中心付近のポテンシャル渦度の子午面微分の符号反転と対応しており，不安定波と解釈できる一方で，鉛直構造はSalbyの結果と類似しており，自由振動的である．また，UARS（Upper Atmosphere Research Satellite）搭載のHRDI（High-Resolution Doppler Imager）による観測では，中間圏から下部熱圏での構造は，傾圧不安定波の構造を持っていることが報告されている（Lieberman 1999）．

共鳴性や不安定性がたとえ存在しなくても，振幅が小さな初期擾乱から非定常プラネタリー波が成長する可能性が存在することがHeld（1985）により示され，Farrell（1988，1989）は最適励起の考え方を提唱し，傾圧大気にもこれを適用できることを示し，中

* 九州大学大学院理学府地球惑星科学専攻（現：気象庁）．

** 九州大学大学院理学研究院地球惑星科学部門.

—2009年1月26日受領—

—2010年1月8日受理—

立ロスビー波もこの考え方で説明できる可能性を示唆している．Mukougawa and Ikeda（1994）は，最適励起の考え方をEady問題に適用し，傾圧波の最適励起について論じている．Farrell（1988，1989），Mukougawa and Ikeda（1994）においては，ある値に設定された有限の時間において最大に発達する擾乱を与える初期値を最適励起擾乱と定義している．他方ある特定のモードに注目し，そのモードが任意の時間で最適に成長する初期擾乱は，そのモードの随伴モードであることが示されている．また，Mukougawa and Ikeda（1994）は，最適励起擾乱を定義する時間を無限大とした極限では最適励起擾乱は随伴モードとなることを指摘している．大気の問題ではないが，Hooper and Grimshaw（1996）はOrr-Sommerfeld方程式を用いて，基本場が安定な場合でも初期擾乱が成長できることを示し，最適励起問題にも言及している．

本論文は，β 平面上のノーマルモード・ロスビー波の励起について最適励起の考え方を適用する．Farrell（1988，1989），Mukougawa and Ikeda（1994）により提唱された考え方に従い随伴モード（最適初期擾乱）を求め，随伴モードを初期値として対流圏に局在する擾乱が数日で成層圏・中間圏に伝播しノーマルモード・ロスビー波を形成することを示すとともに，擾乱の成長機構について解析を行うことを目的としている．

2．モデルと最適励起問題

2.1　方程式系

本論文では，対数圧力座標系で記述された β 平面上の線形準地衡風渦位方程式を使用する．この方程式は帯状平均東西流 $\overline{U}(y,\ z)$ が存在する場では，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+r(z)+\overline{U}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\nabla_H^2\psi+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2\rho_0}{N_0^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right\}+\left\{\beta-\frac{\partial^2\overline{U}}{\partial y^2}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2\rho_0}{N_0^2}\frac{\partial\overline{U}}{\partial z}\right)\right\}\frac{\partial\psi}{\partial x}=0 \tag{1}$$

で記述される（Farrell 1989）．ここで，$r(z)$ はレーリー摩擦およびニュートン冷却係数（簡単のために両者は等しいと仮定），ψ は擾乱の流線関数，N_0 はブラント・バイサラ振動数であり，

$N_0^2(z)=R/H\left(dT_0(x)/dz+\kappa T_0(z)/H\right)$，$H=R\overline{T}/g$，

$\overline{T}=240$K（基本場の平均温度），ρ_0 は基本場の平均温度で定義される標準密度で，

$\rho_0(z)=\rho_0(0)\exp\left(-z/H\right)$ であたえられる．その他は通常使われる記号に従って表現されている．

擾乱が西向に位相速度 c，波数 k を持つと仮定し，次式のような流線関数を考えると，

$$\psi(x,\ y,\ z,\ t)=\Psi(y,\ z)\frac{e^{z/2H}}{\sqrt{\varepsilon}}e^{ik(x-ct)} \tag{2}$$

(1)は次式のように変形される．

$$\left(\overline{U}-\frac{i}{k}r(z)-c\right)\left\{\Psi_{zz}+\frac{1}{\varepsilon}\Psi_{yy}-\left(S^2-S_z+\frac{k^2}{\varepsilon}\right)\Psi\right\}+\left\{\frac{1}{\varepsilon}(\beta-\overline{U}_{yy})+2S\overline{U}_z-\overline{U}_{zz}\right\}\Psi=0 \tag{3}$$

ここで $\varepsilon=f_0^2/N_0^2$，$S=-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}-\frac{1}{H}\right)$ であり，下付き添字は偏微分を意味している．

この方程式を中央が北緯45°に位置する南北幅10,000 km，高度方向は地面から高度120kmのチャネルに適用する．

南北の壁での境界条件は，

$$\Psi=0 \quad \text{at} \quad y=0 \text{ and } 10{,}000 \text{ km} \tag{4}$$

で与える．

地表面では，エクマン収束による上昇流を仮定し，

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{RT_0}{f_0H}w=\frac{g}{f_0}\left(\frac{\nu}{2f_0}\right)^{1/2}\nabla_H^2\psi \quad \text{at} \quad z=0 \tag{5}$$

を課す．ここで，w は対数圧力座標鉛直 p 速度，また ν は渦粘性係数であり，その値は$10\mathrm{m^2s^{-1}}$を使用する．

上の境界面では，鉛直速度＝0と置き，

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{RT_0}{f_0H}w=0 \qquad \text{at} \quad z=120 \text{ km} \tag{6}$$

を使用する．

上下の境界条件において，対数圧力座標鉛直 p 速度 w を熱力学の式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+r(z)+\overline{U}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{\partial\overline{U}}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{N_0^2}{f_0}w=0 \tag{7}$$

を使用して消去すると，Ψ についての上下の境界条件として

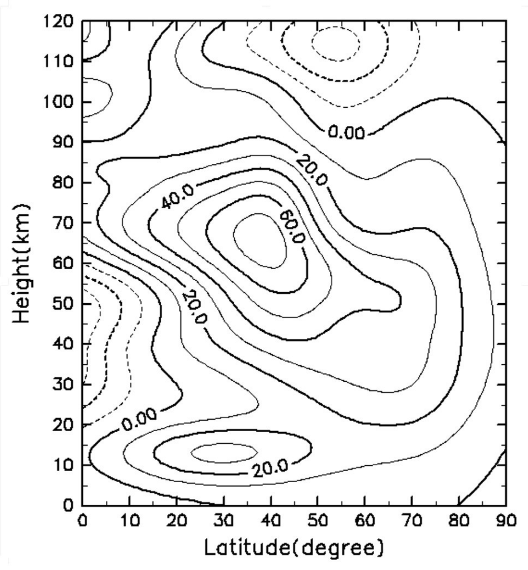
$$\left(\overline{U}-\frac{i}{k}r(z)-c\right)(\Psi_z+S\Psi)+c\frac{N_0^2H}{RT_0}\Psi-\overline{U}_z\Psi-\frac{\overline{T}}{T_0}\frac{if_0}{\varepsilon}\left(\frac{\nu}{2f_0}\right)^{1/2}\frac{1}{k}(-k^2\Psi+\Psi_{yy})=0 \quad \text{at } z=0 \qquad (8)$$

$$\left(\overline{U}-\frac{i}{k}r(z)-c\right)(\Psi_z+S\Psi)+c\frac{N_0^2H}{RT_0}\Psi-\overline{U}_z\Psi=0 \quad \text{at } z=120 \text{ km} \qquad (9)$$

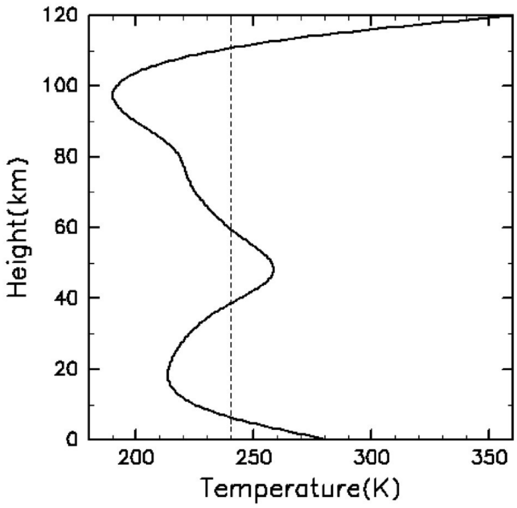
が得られる．

2.2　基本場

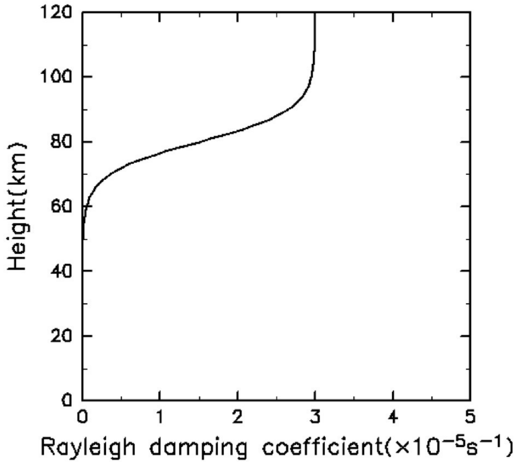
帯状平均東西風 $\overline{U}(y,\ z)$ は，第１図に示す分布を使用する．この分布は，中層大気標準大気としてしばしば使用されるCIRA86（1990）の12月から２月までの３ヶ月平均の場を基にして作成した．第２図に示す緯度平均基本場の温度分布 $T_0(z)$ は同じくCIRA86（1990）の緯度帯（30°Nから60°N）の３ヶ月平均温度を基にして作成した．なお，基本場の温度分布は第１図に示す帯状平均東西風と温度風平衡の関係を保っており，基本場の温度の南北傾度は熱力学の式(7)に，鉛直シアの形で移流項に取り入れられている．第２図に示した温度分布はブラント・バイサラ振動数の鉛直分布の計算に使用されている．レーリー摩擦係数は中間圏より上層で急激に大きくなる分布とし，Farrell（1989）と同じ値を用いる．これにより，中間圏での擾乱の減衰が実現され，また高度120 kmの人工的な境界条件による波の反射の影響も緩和される．第３図にレーリー摩擦係数の高度分布が示されており，下部熱圏で $3\times10^{-5}\mathrm{s}^{-1}$ の値となる．先にも述べたように，簡単のためにニュートン冷却係数も同じ値を用いている．



第１図　帯状平均東西風の緯度高度分布（CIRA86，12月～２月平均より作成）．実線が西風，破線が東風を表し，等値線間隔は10ms^{-1}．β 平面の $y=0$ km～10,000kmを０°～90°Nに対応させている．以下の図における緯度表示も同様.



第２図　基本場の温度の鉛直分布（CIRA86，12月～２月，30°～60°N平均より作成）．



第３図　レーリー摩擦係数の鉛直分布（ニュートン冷却係数も同じ値を使用）．

2.3　差分モデルと固有値問題

方程式(3)および境界条件(4)，(8)，(9)を y 方向に $(M-1)$，z 方向に $(N+2)$ のグリッド点をとり中央差分で差分表現すると $(M-1)\times(N+2)$ 元連立一次方程式が得られる．二次元のグリッド点での流線関数の値を1列に並べた列ベクトル $\overrightarrow{\Psi}$ を用いて，この連立一次方程式を表現すると，

$$\mathbf{B}\overrightarrow{\Psi}=c\mathbf{D}\overrightarrow{\Psi} \tag{10}$$

が得られる．ここで $\mathbf{B}$ および $\mathbf{D}$ は $(M-1)(N+2)\times(M-1)(N+2)$ の正方行列である．$\mathbf{L}\equiv\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}$ と置くことにより，(10)は，

$$\mathbf{L}\overrightarrow{\Psi}=c\overrightarrow{\Psi} \tag{11}$$

の形の固有値問題に定式化できる．

この固有値問題を解くことにより，$(M-1)\times(N+2)$ 個の固有値 c_l とそれに属する固有ベクトル $\overrightarrow{\Psi}_l$ が得られる．このようにして得られた固有ベクトルに(2)のファクター $\frac{e^{z/2H}}{\sqrt{\varepsilon}}$ を取り込んで実際の流線関数の意味を持つ列ベクトル $\overrightarrow{E}_l$（固有モード）を定義する．したがって，固有モード $\overrightarrow{E}_l$ に対する射影係数を α_l とおくと，擾乱を記述する流線関数ベクトル $\overrightarrow{\psi}(t)$ の時間発展は，

$$\overrightarrow{\psi}(t)=\sum_{l=1}^{(M-1)(N+2)}\alpha_l\overrightarrow{E}_l e^{ik(x-c_l t)} \tag{12}$$

で与えられる．ここで射影係数 α_l は与えられた初期擾乱と次式の関係で結ばれている．

$$\overrightarrow{\psi}(0)=\sum_{l=1}^{(M-1)(N+2)}\alpha_l\overrightarrow{E}_l e^{ikx}=\mathbf{E}\overrightarrow{\alpha}e^{ikx} \tag{13}$$

ここで，$\mathbf{E}$ は各列が固有モード $\overrightarrow{E}_l$ で構成される正方行列，$\overrightarrow{\alpha}$ は射影係数 α_l で構成される列ベクトルである．固有モードが直交系をなしていれば，射影係数は直交性を利用して容易に決定できるが，いまの固有値問題では行列 $\mathbf{L}$ はエルミート行列ではなく，その共役転置行列 $\mathbf{L}^{\dagger}$ は $\mathbf{L}^{\dagger}\neq\mathbf{L}$ となり，固有ベクトルの直交性は成り立たない．

固有値問題(11)の共役固有値問題

$$\mathbf{L}^{\dagger}\overrightarrow{\Phi}=\sigma\overrightarrow{\Phi} \tag{14}$$

の固有値 $\sigma_m(m=1,2,3,\cdots,(M-1)\times(N+2))$ は，(11)の固有値 c_l の複素共役 c_l^* と等しい値を持ち，$\sigma_l=c_l^*$ となるように順序を並べ替えることが可能である．σ_l に属する固有ベクトル $\overrightarrow{\Phi}_l$ は，(11)の固有ベクトルと $\overrightarrow{\Phi}^{\dagger}{}_l\overrightarrow{\Psi}_j=0$，$(j\neq l)$ の双直交な関係をもつ．この $\overrightarrow{\Phi}_l$ にファクター $\left(\frac{e^{z/2H}}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{-1}$ を取り込んで，固有モード $\overrightarrow{E}_l$ の随伴モード $\overrightarrow{F}_l$ を定義する．固有モードと随伴モードの間にも $\overrightarrow{F}_l{}^{\dagger}\overrightarrow{E}_j=0$，$(j\neq l)$ の双直交な関係が成り立つ．この双直交の関係を利用して，初期擾乱が与えられれば(13)に $\overrightarrow{F}_l(l=1,2,3,\cdots,(M-1)\times(N+2))$ を内積することにより射影係数 α_l を一意に決定することができる（Farrell 1988, 1989；Mukougawa and Ikeda 1994）．

2.4　最適励起問題

固有値問題により得られた $(M-1)\times(N+2)$ の固有モード中の n 番目の固有モード $\overrightarrow{E}_n$ を最適励起する初期擾乱について考える．ここでは最適励起を次のように定義する．$t>0$ の任意の時刻において固有モード $\overrightarrow{E}_n$ への射影係数の絶対値 $|\alpha_n e^{-ikc_n t}|$ が最大となるような初期擾乱を最適初期擾乱と定義する．(13)に示されているように射影係数は初期擾乱および固有モードで一意に決定されるので，初期擾乱の $|\alpha_n|$ が最大になるような初期擾乱を決定すればよい．Farrell（1988，1989）によれば，最適初期擾乱を求めるには n 番目の射影係数を $\alpha_n=1$ に固定した拘束条件のもとで，初期擾乱の L_2 ノルム $\|\overrightarrow{\psi}(0)\|_2$ を最小にする射影係数ベクトル $\overrightarrow{\alpha}$ をラグランジュの未定乗数法により求めれば良い．この方法によると，

$$\overrightarrow{\alpha}=-\lambda\mathbf{A}^{-1}\overrightarrow{n} \tag{15}$$

となり，$\alpha_n=1$ となるように λ を決定すれば $\overrightarrow{\alpha}$ が求まる．ここで行列 $\mathbf{A}$ は，$\mathbf{A}\equiv\mathbf{E}^{\dagger}\mathbf{E}$ で定義される正方行列であり，$\overrightarrow{n}$ は n 番目成分のみが1の単位ベクトルである．この方法により求めた最適初期擾乱は固有モード $\overrightarrow{E}_n$ の随伴モードとなる（Farrell 1988，1989）．また，Hooper and Grimshaw（1996）によれば，最適初期擾乱は固有モード $\overrightarrow{E}_n$ への射影係数の絶対値 $|\alpha_n|$ が最大となるような $\overrightarrow{\alpha}$ を，初期擾乱の L_2 ノルム $\|\overrightarrow{\psi}(0)\|_2=1$ の拘束条件のもとにラグランジュの未定乗数法により求めればよい．両者は数学的に同等である．この論文では，(15)により随伴モード（最適初期擾乱）を求める．Eady 問題に関して Mukougawa and Ikeda（1994）も，ある一つの固有モードを最も効率的に励起する初期値は随伴モードであることを示している．

3．ノーマルモード・ロスビー波の最適励起

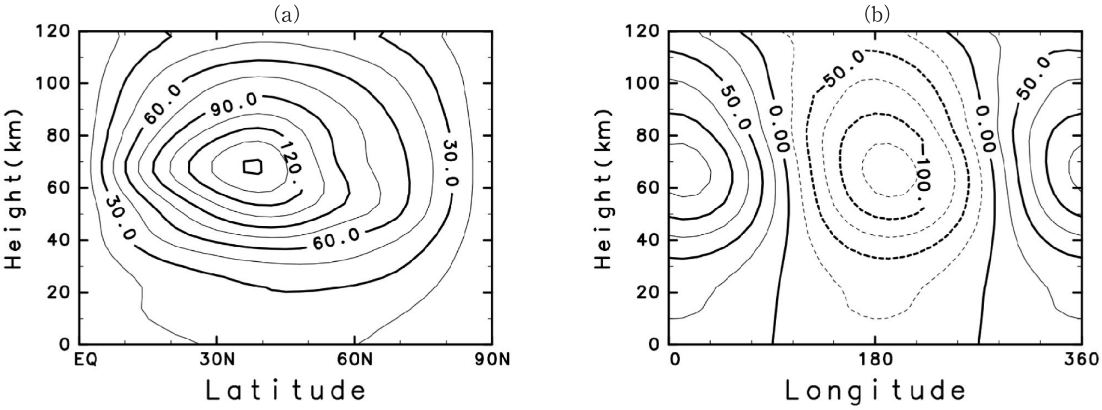
3.1　最適初期擾乱と擾乱の時間発展

本研究ではβ平面近似を使用しているので，全球で定義される球面上のノーマルモード・ロスビー波は記述できない．そこで，β平面北半球モデルで得られるノーマルモード・ロスビー波に対応する固有モードを，議論の対象とする．東西波数kは中緯度での東西波数1の擾乱に対応させるため，東西波長30,000kmとなるように，$k=2\pi/(3.0\times10^7\mathrm{m})$にとる．また，差分点の数として，$M=30$，$N=30$をとる．南北および鉛直方向とも緩やかに変化するモードを対象とするので，この差分点数で充分に擾乱の振る舞いが記述可能である．

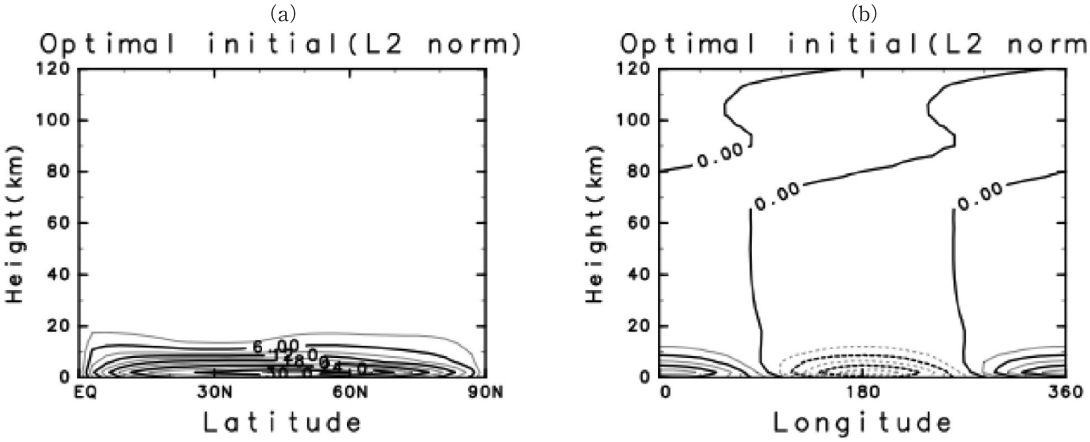
第4図に固有値問題⑾を解いて得られたノーマルモード・ロスビー波（5日波）に対応する固有モードの緯度高度および経度高度分布を示す．この固有モードの固有値（位相速度）は，$c=-64.9-4.58i$であり，西向きの位相速度は$64.9\mathrm{ms^{-1}}$であり，e-folding timeが12.1dayの減衰モードである．周期は5.35日であり，位相は鉛直方向に殆ど変化せず，ノーマルモード・ロスビー波の構造を良く現している．ちなみに，全ての固有モードの中で一番成長率が大きい不安定モードは高度60km，70°N付近に最大振幅を持つが，その成長率は1/(168day）程度で大変弱い．

⒂の方法で求めたこの固有モードに対する随伴モードの緯度高度および経度高度分布は，第5図に示すように対流圏下層に集中した振幅分布を持っており，対流圏から成層圏にかけて殆ど位相の高度変化はみられない．この随伴モードの時間発展を⑿に従って求める．第6図にL_2ノルムおよび全エネルギーの時間発展を示す．この図は，それぞれの値の初期値を1に規格化して示している．L_2ノルムは時間の経過とともに増大し，$t=192\mathrm{h}$頃に極大（初期値の約2300倍）となり，その後は減少に転ずるが$t=288\mathrm{h}$付近で再び増大に転じ，$t=336\mathrm{h}$では初期値の約1100倍となる．この間，全エネルギーは増大傾向がみられ，初期値の1.77倍にまで増大している．擾乱の緯度高度および経度高度分布の初期の時間変化を8時間間隔で第7図に示す．$t=0\mathrm{h}$には対流圏に捕捉されていた擾乱（随伴モード）が時間の経過とともに成層圏・中間圏に伝播していき，48時間後には成層圏界面に最大振幅を持つ擾乱となっている．より長時間での擾乱の振る舞いを48時間間隔で第8図に示す．96時間後には，第4図に示した固有モードと類似した，鉛直方向に位相があまり変化しない構造が成層圏から中間圏にかけて現れることが分かる．なお，$t=288\mathrm{h}$では70°N付近に振幅の極大が現れ，この傾向は$t=336\mathrm{h}$ではより顕著なっている．この振幅極大は，先に述べた成長率最大モードの振幅分布と類似しており，不安定モードの現れとも考えられる．しかし，本論文の主題であるノーマルモード・ロスビー波とは直接関係しないので，これ以上は言及しないこととする．

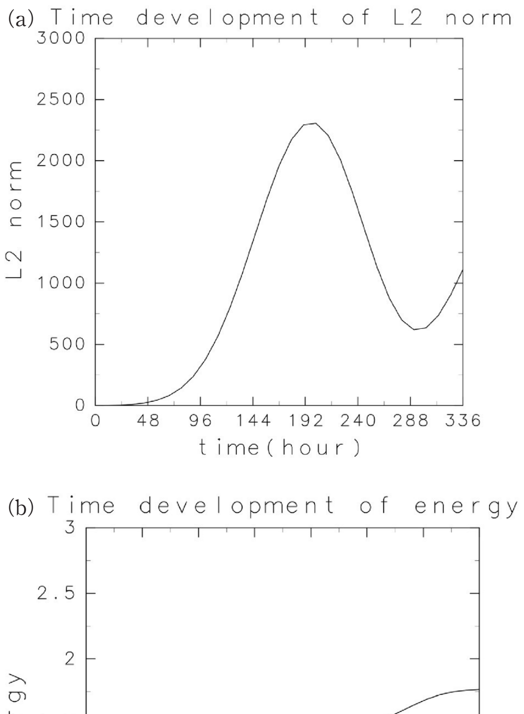
次に，擾乱のエネルギー収支について解析を行う．ここではエネルギーはすべて全領域についての積分値について議論する．帯状平均場および擾乱の運動エネルギーをK_Z，K_P，帯状平均場および擾乱の有効位置



第4図　ノーマルモード・ロスビー波に対応する固有モード（流線関数ψ，以後の図も擾乱は全て流線関数ψを示す）の(a)振幅の緯度高度分布および(b)経度高度分布（45°N断面）．$x=0\,\mathrm{km}$〜30,000kmを経度0°〜360°に対応させて表示している．以下の図における経度表示も同様．単位は$\mathrm{m^2s^{-1}}$．



第5図　随伴モード（最適初期擾乱）の(a)振幅の緯度高度分布，および(b)45°N における経度高度分布．単位は m^2s^{-1}.



第6図　(a) L_2 ノルムおよび(b)全エネルギーの時間発展．それぞれの値は，初期値で規格化されている．

エネルギーを A_Z，A_P とする．また，各々のエネルギー間の変換率を $C(K_Z,\ K_P)$，$C(A_Z,\ A_P)$，$C(A_P,\ K_P)$ とする．ここで例えば，$C(A_Z,\ A_P)$ は A_Z から A_P への変換率を表す．さらに，レーリー摩擦およびニュートン冷却による擾乱のエネルギー散逸率を $F(K_P)$，$N(A_P)$ とする．これらを用いると，擾乱の運動エネルギーおよび有効位置エネルギーの時間変化率は，以下のように表される．

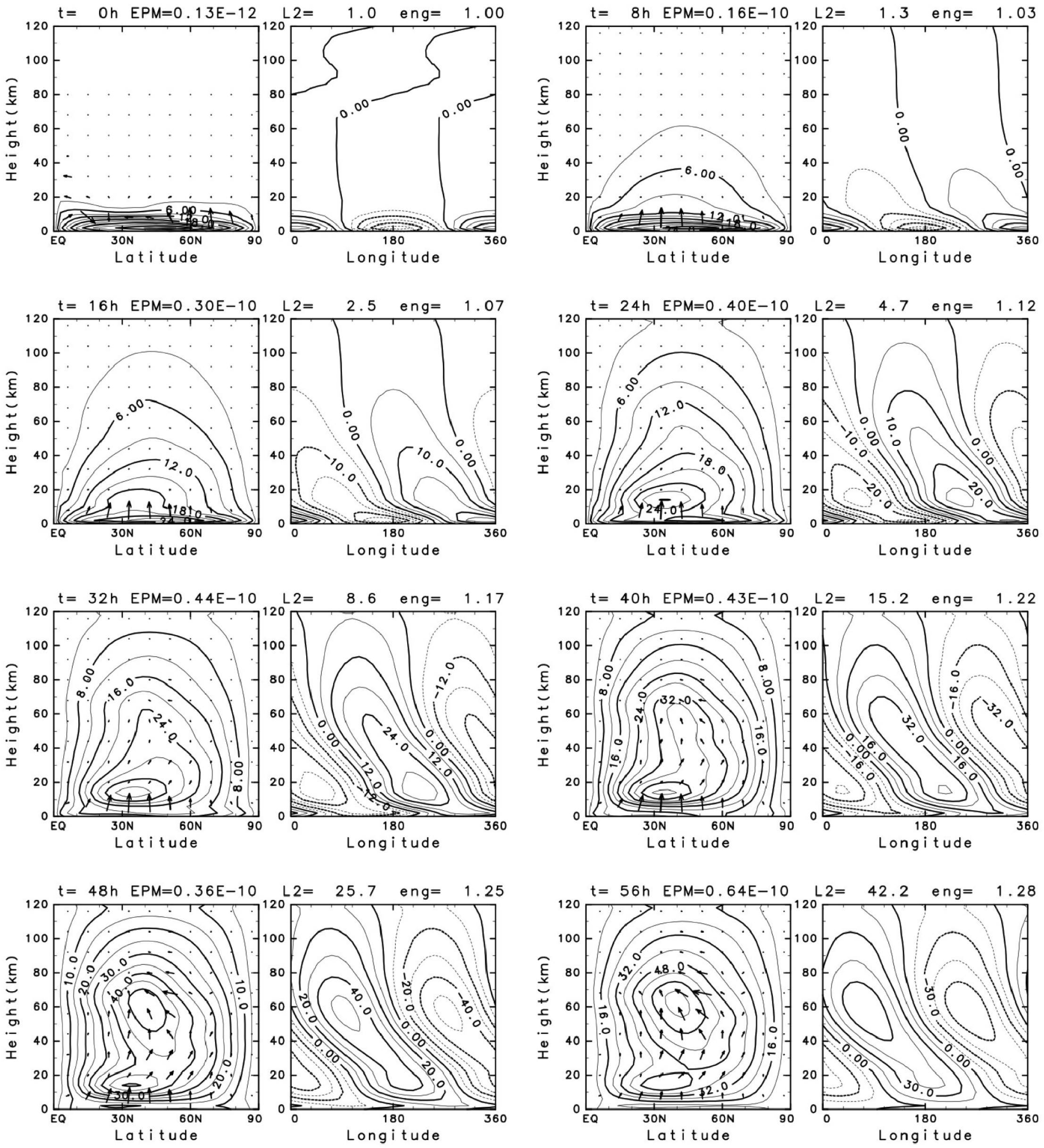
$$\frac{dK_P}{dt}=C(K_Z,\ K_P)+C(A_P,\ K_P)-F(K_P) \tag{16}$$

$$\frac{dA_P}{dt}=C(A_Z,\ A_P)-C(A_P,\ K_P)-N(A_P) \tag{17}$$

また，擾乱の全エネルギー $(E_P=K_P+A_P)$ の時間変化率は，

$$\frac{dE_P}{dt}=C(K_Z,\ K_P)+C(A_Z,\ K_P)-F(K_P)-N(A_P) \tag{18}$$

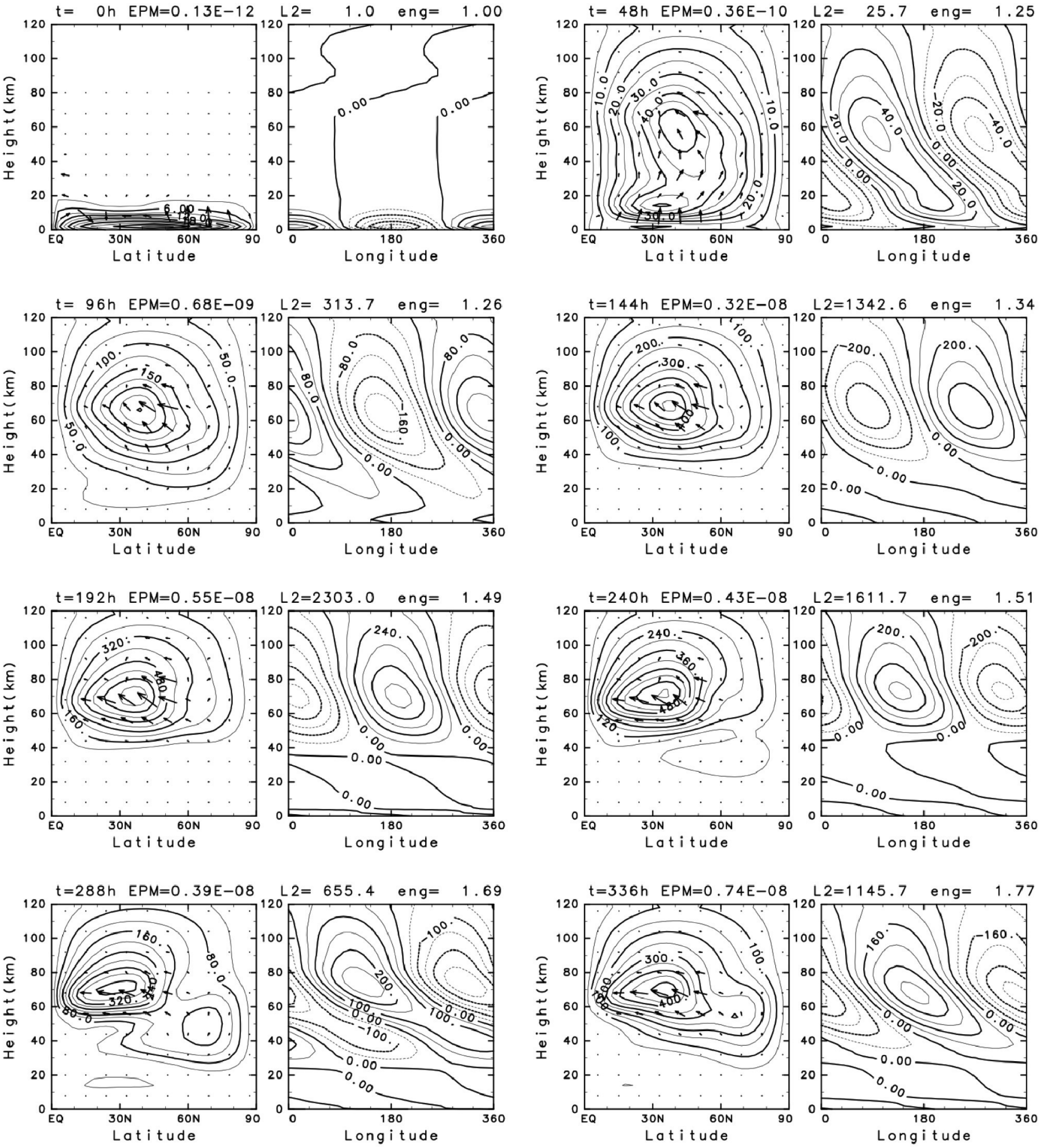
と表される．擾乱の L_2 ノルム増大時，ピーク時，減少時の代表として，$t=144$h，192h，240h における，エネルギー解析の結果を第1表に示す．各時刻において，擾乱の全エネルギーの約90％は有効位置エネルギーであり，運動エネルギーは10％程度に過ぎない．また，擾乱の有効位置エネルギーの増加は基本場の有効位置エネルギーからの変換 $C(A_Z,\ A_P)$ によってもたらされている．擾乱の運動エネルギーの増加は擾乱の有効位置エネルギーからの変換 $C(A_P,\ K_P)$ によっている．$C(K_Z,\ K_P)$ は負の値となっており，帯状平均場のシアは擾乱のエネルギー源にはなっていないこ



第7図　随伴モード（最適初期擾乱）の時間発展．振幅の緯度高度分布，および45°N における経度高度分布．単位は m^2s^{-1}．矢印は E-P Flux ベクトルを表示．L2は規格化した L_2 の値，eng は規格化した全エネルギーの値，EPM は E-P Flux の最大値（単位 m^2s^{-2}）を示す．

とを示している．以上の結果は，擾乱エネルギーの増加は，基本場の有効位置エネルギーからの変換によることを示している．しかし，第6図に示した L_2 ノルムと擾乱エネルギーの時間発展の振る舞いは，並列的ではなく，L_2 ノルムの増加の原因を基本場の有効位置エネルギーからの変換に求めることは難しいように思われる．

L_2 ノルムの増加の原因をさらに詳しく調べるために E-P flux 解析を実行した．E-P flux は流線関数 ψ を用いて，



第8図　時間間隔を除いて，第7図と同様.

$$\vec{F}\equiv(0,\ F^{(y)},\ F^{(z)})=\left(0,\ \rho_0\overline{\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}},\ \rho_0\varepsilon\overline{\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial z}}\right) \qquad (19)$$

で与えられる（Andrews *et al*. 1987）．第7および8図に(19)で与えられるE-P fluxの値を密度 ρ_0 で除したものを矢印で示す．このE-P flux分布は基本的に対流圏から成層圏・中間圏の擾乱振幅が大きい領域への波の伝播を示している．この解析結果は，随伴モードから固有モードに類似した擾乱が形成される過程は，対流圏に捕捉された初期擾乱が上方へ波動として伝播し，基本場の密度が小さい成層圏・中間圏で大きな振幅を持つ擾乱が形成される過程として解釈できることを示している．

この鉛直伝播を非定常ロスビー波の鉛直伝播として

考えてみよう．ここで対象にしている波動のスケールに基づいて，東西波長30,000km，南北波長20,000km，鉛直波長100kmのロスビー波が鉛直伝播すると仮定すると，中緯度β平面近似下のロスビー波の分散関係より，この波の鉛直群速度は$C_{gz}=1.6\times10^{-1}$ ms^{-1}となる．この波動が鉛直方向に50km進むに要する時間は約3.6dayとなり，96時間程度でノーマルモード・ロスビー波に類似した構造が作られる時間スケールと調和的である．

対流圏から伝播してきたロスビー波によって形成された擾乱の中に，実際にどの程度ノーマルモード・ロスビー波に対応する固有モードが含まれているかを調べるために，擾乱の時空間フーリエ解析により，西進5.35日周期成分を抽出することを試みた．ここでは，24h，48h，72h，96h，120h，144h，168hおよび192hを初期時刻とする5.35日の8個の窓を設定した．それぞれの窓に対応する時系列データについて，初期値と最終値を結ぶ直線からのずれを擾乱成分として定義することにより長周期成分の影響を抑え（linear trendの除去），この擾乱成分の5.35日周期$\sin\omega t$，$\cos\omega t$成分および経度方向の$\sin x$，$\cos x$成分により，西進5.35日周期成分を合成した．第9図にそれぞれの時間帯（窓）における西進5.35日周期成分の振幅の緯度高度分布および経度高度分布を示す．以下の議論では，それぞれの時間帯で得られた擾乱の構造を，時間帯の中央時刻付近での構造と考えることにする．時間が進行するにつれて擾乱の構造が変化し，160h，184h付近で振幅は最大250m^{2}s^{-1}程度に達し，擾乱の振幅位相分布ともに，第4図に示した固有モードと酷似していることがわかる．それ以後の時刻では振幅は減少に転じるとともに，高度40km以下での位相の東への傾きが顕著になる．図には示していないが時刻350h付近では，最大振幅は約80m^{2}s^{-1}程度となる．振幅が最大となる160h付近では，その最大振幅は第8図に示した擾乱の振幅の約35%に当たる．

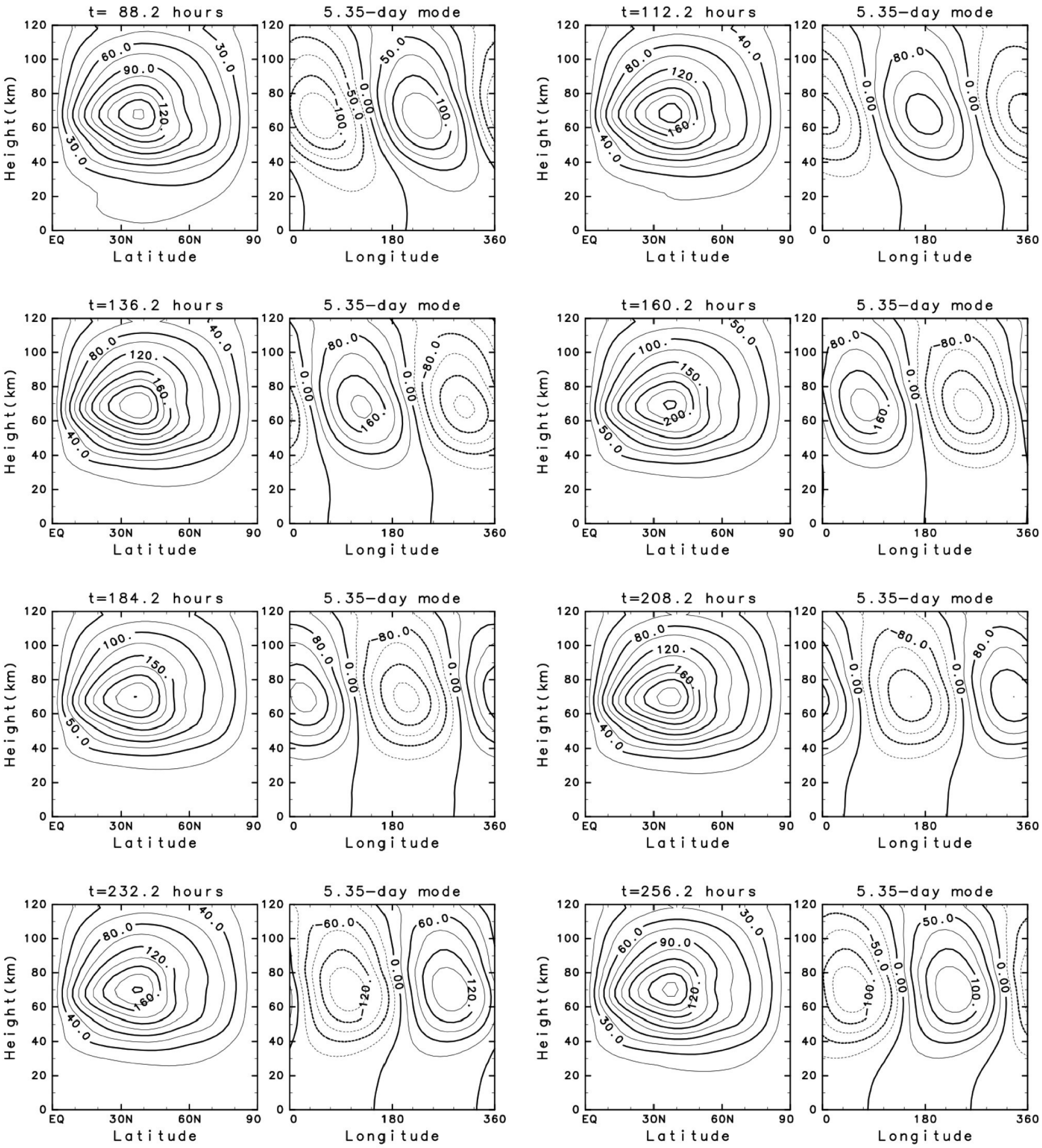
第7および8図に示した時間発展の様子は，Farrell（1988）のバロトロピック中立ロスビー波の場合についてのL_2ノルム最適励起問題の結果（第1図，第2図）と形態的には類似しているが，増大の物理過程は大幅に異なっている．Farrellの場合には，平均場のシアの存在が固有モードの直交性を破る原因であり，随伴モードから固有モードが成長することを可能にしている．これに反して，我々の問題では上に述べたように，平均場からのエネルギー変換も存在はする

第1表　t=144h，192h，240hにおけるエネルギー解析の結果一覧．単位はエネルギーについてはJm^{-1}，時間変化率，変換項，散逸項についてはWm^{-1}である．

t(hours)	144	192	240
E_P(Jm^{-1})	1.814E+01	2.027E+01	2.046E+01
K_P	1.490E+00	2.116E+00	2.172E+00
A_P	1.665E+01	1.816E+01	1.829E+01
dE_P/dt(Wm^{-1})	1.703E−05	2.590E−06	7.219E−06
dK_P/dt	2.574E−06	2.341E−06	1.706E−07
dA_P/dt	1.446E−05	2.489E−07	7.048E−06
$C(K_Z, K_P)$	−1.269E−06	−1.342E−06	−3.477E−07
$C(A_Z, A_P)$	1.919E−05	9.854E−06	1.407E−05
$C(A_P, K_P)$	4.659E−06	9.452E−06	6.866E−06
$-F(K_P)$	−4.430E−07	−8.392E−07	−6.811E−07
$-N(A_P)$	−7.441E−08	−1.530E−07	−1.526E−07

が，それが増大の主因ではなく，対流圏に局在した随伴モードが大気密度の低い成層圏・中間圏にロスビー波として伝播することにより密度成層の効果で振幅が増大することが主因と考えられる．このことを確かめるために基本場の傾圧不安定性が存在しない$\overline{U}(y, z)=0$とした場合についての結果を次に示す．第10図は成層圏・中間圏で卓越するノーマルモード・ロスビー波（5日波）に対応した固有モードであり，固有値は，$c=-62.4-4.37i$であり，西向きの位相速度は62.4ms^{-1}であり，周期が5.56日，e-folding timeが12.6dayの減衰モードである．第11および第12図に，$\overline{U}(y, z)\neq0$の場合と同じ方法によって求めた随伴モード†（図中の$t=0$hの分布）から擾乱が鉛直伝播する様子を示す．t=96hには成層圏界面付近に最大振幅を持つ擾乱が成層圏・中間圏に形成され，t=288h付近でL_2ノルムは最大値1600程度に達しその後は減少に転じている．この間，擾乱のエネルギー供給源が存在しないため全エネルギーは常に減少しており，t=336hでは初期値の93%まで減少している．また，基本場のシアが無く，且つβ平面チャネルモデルであるため，E-P Fluxは完全に鉛直上方を向いており擾乱は対流圏から鉛直上向きに伝播していることが分かる．

† $\overline{U}(y, z)=0$とした場合には，固有モードは直交系をなすと思われがちであるが，この場合にも直交系をなさず随伴モードとの間に双直交の関係が成り立つことを付録に示す．

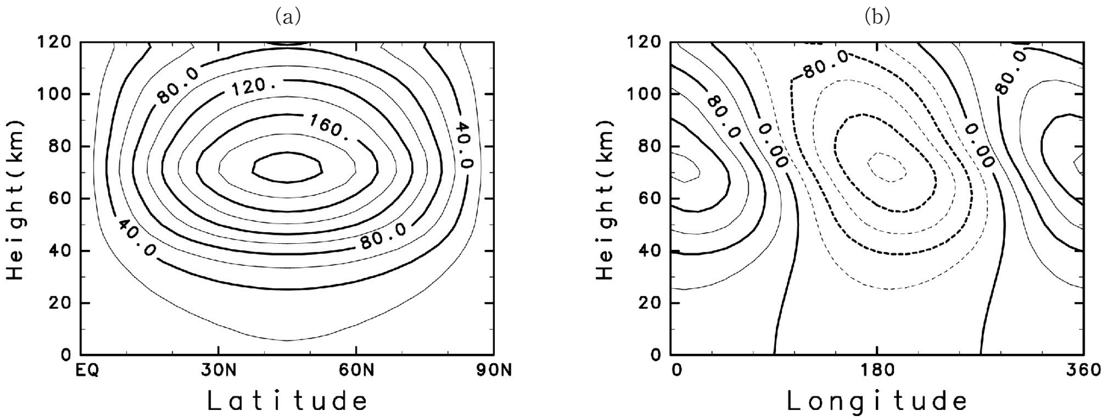


第９図　西進5.35日周期成分の振幅の緯度高度分布および45°N における経度高度分布．単位は m²s⁻¹．図中の時刻は，窓の時間帯の中央の時刻を表示．

基本場の傾圧不安定性が存在する場合の擾乱の振る舞いは，ここで示した擾乱の振る舞いと大筋では定性的に一致している．この結果は，基本場の傾圧不安定性が存在する場合の擾乱の増大は，基本的には対流圏に偏在する随伴モードを初期値として，密度が小さい成層圏・中間圏にロスビー波が伝播することにより形成されることを示している．

3.2　L_2 ノルム最適励起問題の簡単な説明

第２章で述べたように，L_2 ノルム最適初期擾乱は，対象とする固有モードの随伴モードであることがこれまでの研究で示されている．前節ではノーマルモード・ロスビー波に対応するモードは減衰モードで



第10図　$\overline{U}(y,\ z)=0$ の場合のノーマルモード・ロスビー波に対応する固有モードの(a)振幅の緯度高度分布および(b)経度高度分布（45°N 断面）．単位は m^2s^{-1}．

あるにも関わらず，その随伴モードを初期値とした場合，擾乱の L_2 ノルムが時間とともに増大し，ノーマルモード・ロスビー波に類似した擾乱を形成することを示した．これは物理的には対流圏に局在した随伴モードが大気密度の低い成層圏・中間圏にロスビー波として伝播することにより密度成層の効果で振幅が増大することが主因であることを示した．この節では，減衰モードにも関わらず L_2 ノルムが増大することがあり得ること，および L_2 ノルム最適初期擾乱は対象とする固有モードの随伴モードであることを，二次元空間のベクトルを斜交基底ベクトルで表現する場合を例にとって視覚的に捉え易い形で説明することを試みる．

二次元空間のベクトルで与えられる初期ベクトル $\vec{A}$ を二つの斜交正規基底ベクトル $\vec{x}_1$，$\vec{x}_2$ で表現する場合を考えよう．ここで，基底ベクトルへの射影 A_1，A_2 は斜交正規基底ベクトル $\vec{x}_1$，$\vec{x}_2$ の随伴ベクトル $\vec{y}_1$，$\vec{y}_2$ を使って次式により一意に決定される．

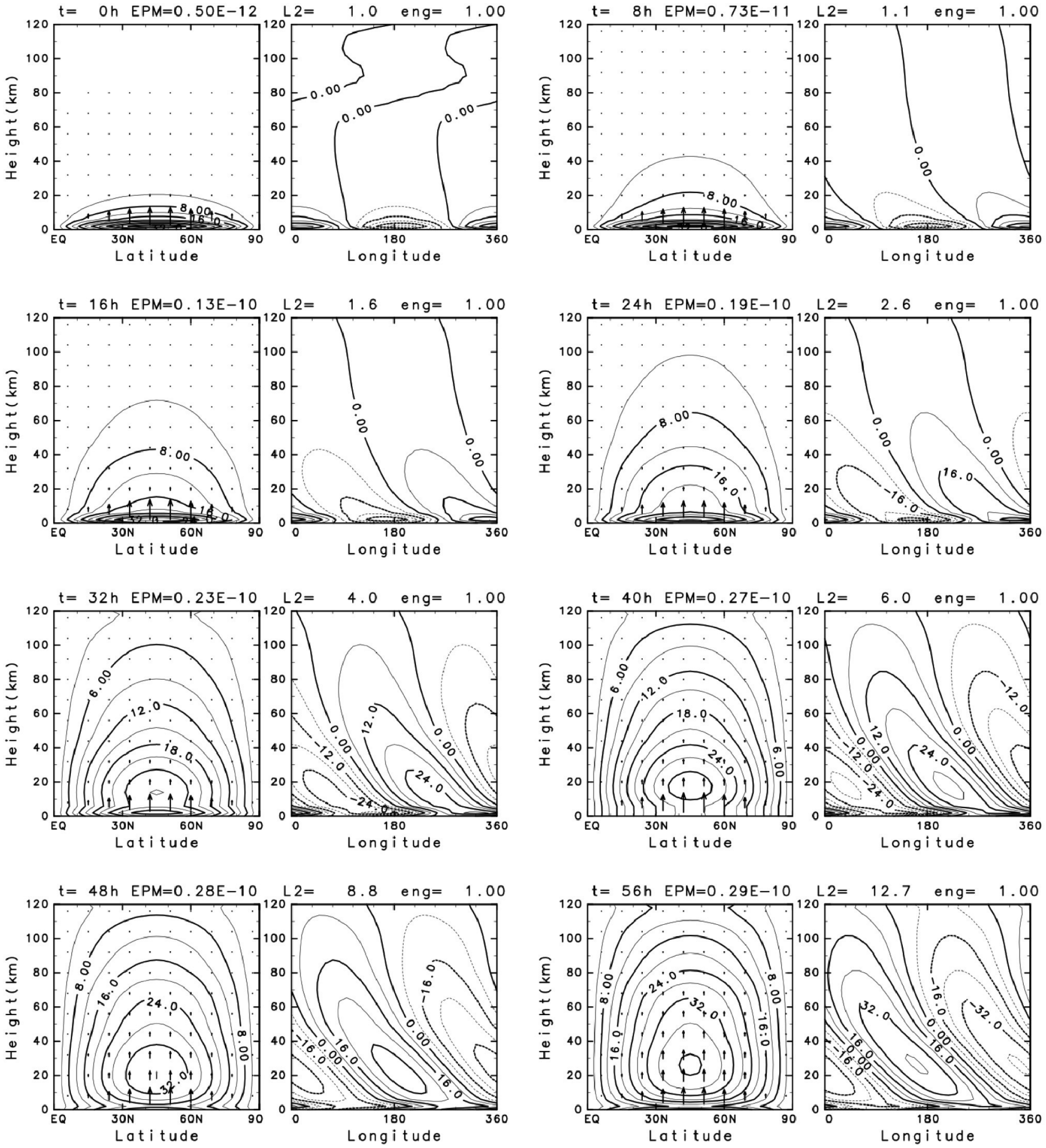
$$A_i=\frac{\vec{y}_i\cdot\vec{A}}{\vec{y}_i\cdot\vec{x}_i},\ (i=1,\ 2) \tag{20}$$

これは，2.3節で引用した，双直交の関係を利用して初期擾乱の射影係数が一意に決定される（Farrell 1988，1989；Mukougawa and Ikeda 1994）ことの二次元ベクトル版であることは言うまでもない．斜交正規基底ベクトル $\vec{x}_1$，$\vec{x}_2$ への射影が，ここで問題としている固有モードの場合のように時間とともに減衰する場合でも，第13図に示される場合のように L_2 ノルムは増大する場合があり得る（水島・藤村 2003）．

また，L_2 ノルム最適初期擾乱は，対象とする固有モードの随伴モードとなることの視覚的説明を第14図に示す．初期ベクトル $\vec{A}$ の L_2 ノルムを一定に保ったまま任意の方向に変化させた場合に，基底ベクトル $\vec{x}_i$ への射影が最大になるのは，初期ベクトル $\vec{A}$ の向きが基底ベクトル $\vec{x}_i$ と一致する場合ではなく，随伴ベクトル $\vec{y}_i$ の向きに一致した場合であることが容易に理解できる．基底ベクトルが直交する場合には，自己随伴となるので，L_2 ノルム最適初期擾乱は基底ベクトル $\vec{x}_i$（固有モード）と同じ向きになる．

4．まとめ

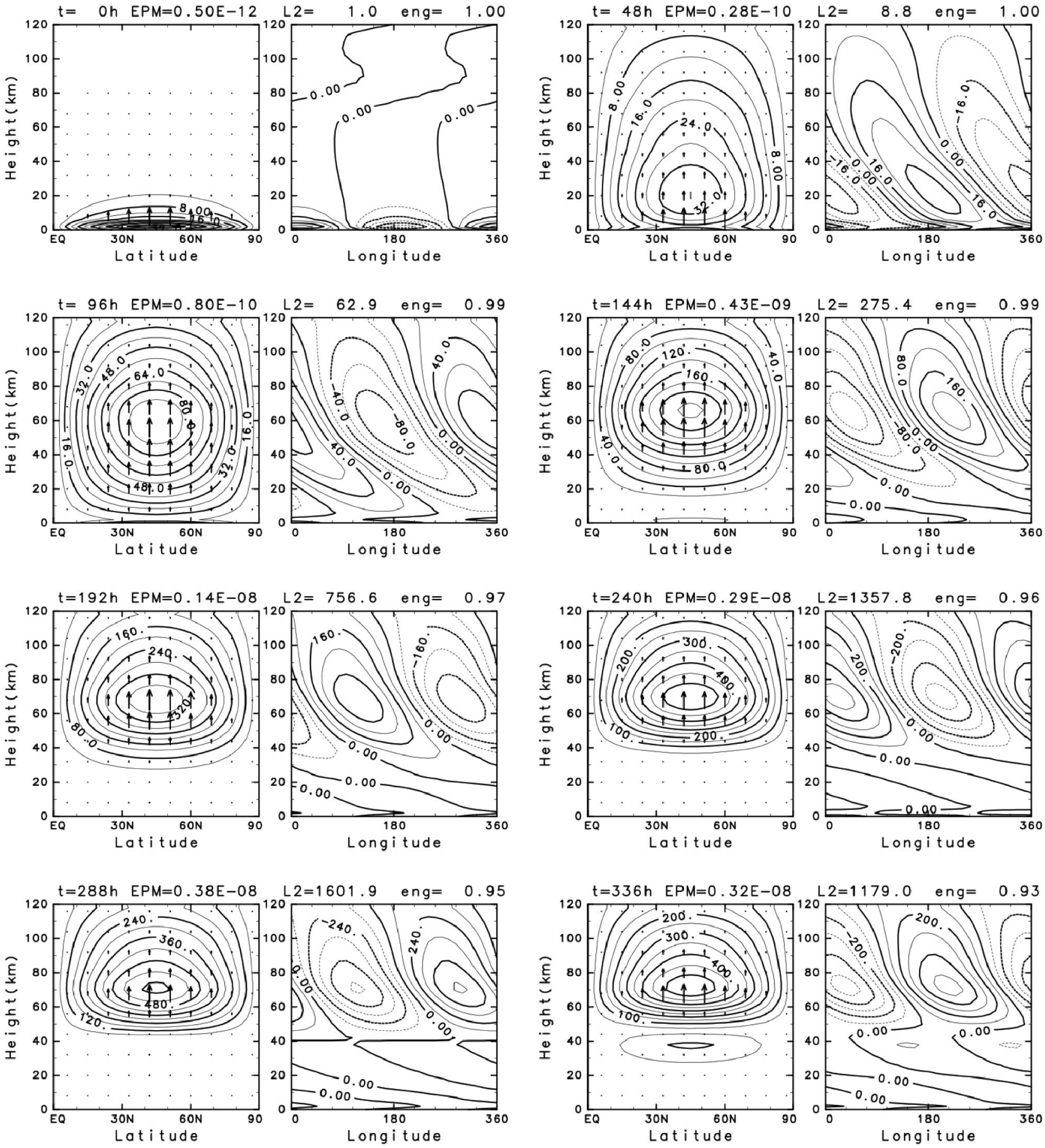
ノーマルモード・ロスビー波の励起を L_2 ノルム最適励起問題として捉え，β 平面上の線形準地衡風渦位方程式を使用して問題を解いた．L_2 ノルム最適初期擾乱は，Farrell（1988，1989），Mukougawa and Ikeda（1994），Hooper and Grimshaw（1996）に示されているように，対象とする固有モードの随伴モードとなる．ノーマルモード・ロスビー波の場合には，随伴モードは対流圏に局在したモードとなる．この随伴モードを初期値とした場合，擾乱は時間の経過とともに数日の時間スケールで成層圏・中間圏に鉛直伝播して，ノーマルモード・ロスビー波を振幅比で35％程度含む擾乱を形成することが示された．この鉛直伝播の時間スケールは，ここで問題としているスケールのロスビー波の鉛直群速度から推定される鉛直伝播の時間スケールと調和的である．この場合，基本場からの



第11図　$\overline{U}(y,\ z)=0$ を除いて，第7図と同様.

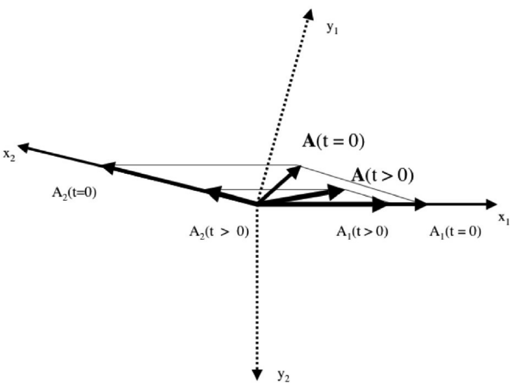
エネルギー変換は振幅増大の主因ではないことが，平均帯状流が無い場合について解くことにより示された．また，L_2ノルム最適励起問題を，二次元ベクトルを斜交基底ベクトルで表現する場合を例にとり，視覚的に捉え易い形で説明することも試みた.

ここで示したように，最適な初期擾乱分布が与えられれば，その時間発展解としてノーマルモード・ロスビー波が現れる．このことは，大気中のノーマルモード・ロスビー波が共鳴的な外力が無い場合でも，適切な初期値分布があれば励起される可能性があることを示唆している．第5図に示した随伴モードの最大振幅は対流圏で約30m²s⁻¹であり，この初期擾乱から，第9図に示されているように，250m²s⁻¹程度の振幅を持つ西進5.35日周期モードが形成される．この振幅比

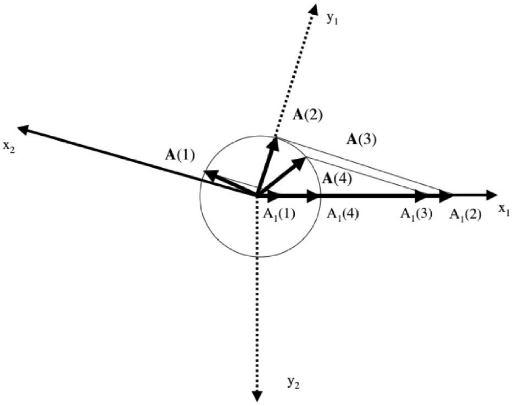


第12図　$\overline{U}(y,\ z)=0$ を除いて，第８図と同様.

を考慮すると，Hirota and Hirooka (1984) に示されているような１hPa 面で100m 程度のジオポテンシャル高度振幅を持つような５日波を，ここで示したような随伴モードで励起するためには，対流圏で10m 程度の最大振幅を持つ随伴モードが必要である．この振幅は地表面付近では1.5hPa 程度の圧力擾乱であり，十分に存在可能な振幅である．しかし，第９図に示したように，この機構で励起されるモードの持続時間は10日程度であり，Hirota and Hirooka (1984) で示されたような一月半程度持続するような５日波の励起をこの機構で説明することは困難であり，持続する励起機構，例えば共鳴的励起源を必要とすると考えられる．しかしながら，最適励起機構によっても10日程度の持続時間を持つ擾乱の急激な励起が可能である



第13図 二次元斜交基底ベクトル $\vec{x}_1$，$\vec{x}_2$ と随伴基底ベクトル $\vec{y}_1$，$\vec{y}_2$．初期ベクトル **A** の基底ベクトル $\vec{x}_1$，$\vec{x}_2$ への射影の時間変化と **A** のノルムの変動．



第14図 同じノルムを持つ初期ベクトル **A**(1)，**A**(2)，**A**(3)，**A**(4)の $\mathbf{x}_1$ への射影の変化．**A**(2)の場合，つまり $\mathbf{x}_1$ の随伴基底に向きが一致した場合に，$\mathbf{x}_1$ への射影は一番大きくなることが分かる．

ことをこの論文の結果は示している．

ここで用いたモデルは β 平面準地衡風近似モデルであり全球的なノーマルモード・ロスビー波について議論するためには，球面座標系を用いたプリミティブモデルによる議論が必要である．また，波動の持続時間に大きく関係する散逸についても単純な鉛直プロファイルを仮定しており，より現実的な散逸過程が擾乱の振る舞いにどのような影響を与えるかも，今後に残された課題である．実際の大気中のノーマルモード・ロスビー波の励起が最適励起的に起こっている場合の有無については，現実大気の詳細なデータ解析と数値モデルの両面から追求する価値がある問題と考えられる．

謝　辞

論文作成に当たり，コメントをいただいた九州大学大学院地球惑星科学部門流体圏講座のメンバーに感謝します．特に伊藤久徳教授には結果の解釈について貴重なコメントをいただきました．この場を借りて感謝致します．初稿を精読いただいた二人のレフェリーによる建設的コメントは，原稿の改訂に多いに役立ちました．二人のレフェリーに感謝致します．図の作成にあたっては，地球流体電脳ライブラリを使用しました．

参　考　文　献

Ahlquist, J. E., 1985：Climatology of normal mode Rossby waves. J. Atmos. Sci., **42**, 2059-2068.

Andrews, D. G., J. R. Holton and C. B. Leovy, 1987：Middle Atmosphere Dynamics. Academic Press, 489 pp.

Cheong, H.-B. and R. Kimura, 1997：Excitation of the 5-day wave by Antarctica. J. Atmos. Sci., **54**, 87-102.

CIRA 86, 1990：CIRA 1986, Part II：Middle Atmosphere Models. Rees, D., J. J. Barnett and K. Labitzke, (Eds.) Advances in Space Research (COSPAR), 10.

Farrell, B., 1988：Optimal excitation of neutral Rossby waves. J. Atmos. Sci., **45**, 163-172.

Farrell, B., 1989：Optimal excitation of baroclinic waves. J. Atmos. Sci., **46**, 1193-1206.

Held, I. M., 1985：Pseudomomentum and the orthogonality of modes in shear flows. J. Atmos. Sci., **42**, 2280-2288.

廣岡俊彦，1987：大気中のプラネタリー・ロスビー波．気象研究ノート，(156)，93-127.

Hirooka, T. and I. Hirota, 1985：Normal mode Rossby waves observed in the upper stratosphere. Part II：Second antisymmetric and symmetric modes of zonal wavenumbers 1 and 2. J. Atmos. Sci., **42**, 536-548.

Hirota, I. and T. Hirooka, 1984：Normal mode Rossby waves observed in the upper stratosphere. Part I：First symmetric modes of zonal wavenumbers 1 and 2. J. Atmos. Sci., **41**, 1253-1267.

Hooper, A. P. and R. Grimshaw, 1996：Two-dimensional disturbance growth of linearly stable viscous shear flows. Phys. Fluids, **8**, 1424-1432.

Lieberman, R. S., 1999：Eliassen-Palm fluxes of the

2-day wave. J. Atmos. Sci., 56, 2846-2861.
Madden, R. A. and P. Julian, 1972：Further evidence of global-scale, 5-day pressure waves. J. Atmos. Sci., 29, 1464-1469.
Madden, R. A. and K. Labitzke, 1981：A free Rossby wave in the troposphere and stratosphere during January 1979. J. Geophys. Res., 86, 1247-1254.
Miyoshi, Y. and T. Hirooka, 1999：A numerical experiment of excitation of the 5-day wave by a GCM. J. Atmos. Sci., 56, 1698-1707.
水島二郎，藤村　薫，2003：流れの安定性．流体力学シリーズ５，日本流体力学会編，朝倉書店，245pp.
Mukougawa, H. and T. Ikeda, 1994：Optimal excitation of baroclinic waves in the Eady model. J. Meteor. Soc. Japan, 72, 499-513.
Pfister, f., 1985：Baroclinic instability of easterly jets with applications to the summer mesosphere. J. Atmos. Sci., 42, 313-330.
Plumb, R. A., 1983：Baroclinic instability of the summer mesosphere：A mechanism for the quasi-two-day wave?. J. Atmos. Sci., 40, 262-270.
Randel, W. J., 1994：Observations of the 2-day wave in NMC stratospheric analyses. J. Atmos. Sci., 51, 306-313.
Salby, M. L., 1981a：Rossby normal modes in nonuniform background configurations, Part I：Simple fields. J. Atmos. Sci., 38, 1803-1826.
Salby, M. L., 1981b：Rossby normal modes in nonuniform background configurations, Part II：Equinox and solstice conditions. J. Atmos. Sci., 38, 1827-1840.
Salby, M. L., 1984：Survey of planetary-scale traveling waves：The state of theory and observations. Rev. Geophys. Space Phys., 22, 209-236.
Salby, M. L. and R. R. Garcia, 1987：Transient response to localized episodic heating in the tropics. Part I：Excitation and short-time near-field behavior. J. Atmos. Sci., 44, 458-498.

付　録

帯状平均流 $\overline{U}(y,\ z)=0$ で，渦粘性，レーリー摩擦，ニュートン冷却もない，等温静止非散逸大気の場合においても固有モードは直交系をなさないことを示す．この場合，問題は非常に簡単化され変数分離により解析解を容易に求めることができる．(2)の代わりに

$$\psi(x,\ y,\ z,\ t)=\Psi(z)\frac{e^{z/2H}}{\sqrt{\varepsilon}}\sin(ly)e^{ik(x-ct)} \qquad \text{(A1)}$$

とおくことにより(3)は

$$\Psi_{zz}-\left(\frac{k^2+l^2}{\varepsilon}+\frac{1}{4H^2}\right)\Psi=\frac{\beta}{\varepsilon c}\Psi \qquad \text{(A2)}$$

と表現される．等温静止非散逸大気に適合するよう変形した上下の境界条件(8)，(9)を適用すると，鉛直方向の解 $\Psi(z)$ は次式のように定めることができる．

$$\Psi_n(z)=\cos(m_n z)+\frac{1}{m_n H}\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)\sin(m_n z)$$

$$m_n=\frac{n\pi}{z_{\max}},\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \text{(A3)}$$

および，

$$\Psi(z)=\exp\left(\frac{\kappa}{H}-\frac{1}{2H}\right)z \qquad \text{(A4)}$$

ここで，$z_{\max}$ は大気の上端高度，$\kappa=\dfrac{\gamma-1}{\gamma}$ である．

(A3)で与えられる解は，上下に境界が存在することにより現れる内部波固有解であり，(A4)で与えられる解が，等価深度 $h=\gamma H$ の自由モードに対応する．また，南北の境界条件(4)を満足するよう l を定めると，南北方向の固有関数は

$$\sin\left(\frac{j\pi}{D}y\right),\ (j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \text{(A5)}$$

となる．ここで D は南北のチャネル幅である．(A3)，(A4)，(A5)で与えられる固有解を(A2)に代入することにより，位相速度 c（固有値）を容易に決定することができる．

以上をまとめて記述すると，
固有モードは，

$$\psi(y,z)=\begin{Bmatrix}\cos(m_n z)+\dfrac{1}{m_n H}\left(\kappa-\dfrac{1}{2}\right)\sin(m_n z)\\ \exp\left(\dfrac{\kappa}{H}-\dfrac{1}{2H}\right)z\end{Bmatrix}\frac{e^{z/2H}}{\sqrt{\varepsilon}}\sin\left(\frac{j\pi}{D}y\right)$$

$$m_n=\frac{n\pi}{z_{\max}},\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots), \qquad \text{(A6)}$$

位相速度 c（固有値）は，

$$
\begin{aligned}
c_{jn}&=-\frac{\beta}{\varepsilon}\frac{1}{m_n^2+\dfrac{k^2+\left(\dfrac{j\pi}{D}\right)^2}{\varepsilon}+\dfrac{1}{4H^2}}\\
c_j&=-\frac{\beta}{\varepsilon}\frac{1}{\dfrac{k^2+\left(\dfrac{j\pi}{D}\right)^2}{\varepsilon}-\dfrac{\kappa\gamma}{H^2}}
\end{aligned}
\qquad \text{(A7)}
$$

となる．

また，随伴モードは

$$
\Phi(y,\ z)=\begin{Bmatrix}\cos(m_nz)+\dfrac{1}{m_nH}\left(\kappa-\dfrac{1}{2}\right)\sin(m_nz)\\ \exp\left(\dfrac{\kappa}{H}-\dfrac{1}{2H}\right)z\end{Bmatrix}\left(\frac{e^{z/2H}}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{-1}\sin\left(\frac{j\pi}{D}y\right) \qquad \text{(A8)}
$$

$$
m_n=\frac{n\pi}{z_{\max}},\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)
$$

で定義される．

(A6)は異なる j については直交するが，異なる m_n および $\exp\left(\frac{\kappa}{H}-\frac{1}{2H}\right)z$ の解は，基本場の密度成層による $e^{z/2H}$ の存在により互いに直交せず，固有モードは直交系をなしていない．他方，随伴モード(A8)との間には，直交関係が成り立っていることが容易に確かめられる．

大気が無限遠まで続いている場合には，(A6)は

$$
\psi(y,\ z)=\begin{Bmatrix}\cos(mz)+\dfrac{1}{mH}\left(\kappa-\dfrac{1}{2}\right)\sin(mz)\\ \exp\left(\dfrac{\kappa}{H}-\dfrac{1}{2H}\right)z\end{Bmatrix}\frac{e^{z/2H}}{\sqrt{\varepsilon}}\sin\left(\frac{j\pi}{D}y\right) \qquad \text{(A9)}
$$

となり，m は離散値ではなく $m>0$ の連続固有値となる．この連続モードは $z=0$ の境界条件は満足しているが，大気領域全体で積分したエネルギーが無限大となるので，物理的に意味がある固有モードではなく，大気の固有モードとしては採用されず，

$$
\psi(y,\ z)=\exp\left(\frac{\kappa}{H}-\frac{1}{2H}\right)z\frac{e^{z/2H}}{\sqrt{\varepsilon}}\sin\left(\frac{j\pi}{D}\right)y \qquad \text{(A10)}
$$

つまり，$h=\gamma H$ に対応するモードのみが固有モードとなる．

On Optimal Excitation of Normal Mode Rossby Waves

Junya FUKUDA* and Saburo MIYAHARA**

* *Department of Earth and Planetary Sciences, Graduate School of Sciences, Kyushu University* (*Present affiliation*: *Japan Meteorological Agency*).

** *Department of Earth and Planetary Sciences, Faculty of Sciences, Kyushu University, Fukuoka 812-8581, Japan.*

(Received 26 January 2009; Accepted 8 January 2010)
