

回答

藤 部 文 昭*

1. はじめに

頂いたご質問 (二宮 2011) のいくつかは、極値統計の根本的な問題に関連しています。個別の回答に先立ち、それらについての認識を述べさせていただきます。

①まず1つは、統計数理と現実の気候とのギャップです。統計理論の前提条件の単純さ (例えば分布の同一性やデータの独立性) に比べ、現実の現象ははるかに複雑であり、両者の間に大きな落差があります。ご質問には、解説書に数理統計と気象現象との関連が書かれていないという不満が述べられていますが、極値統計学はまだ両者を有機的に結びつけるところまで行っていないのだと思います。例えて言えば、今の極値統計学は線形理論で天気を予報しようとするようなところがあります。実際の天気予報は方程式を数値的に解くことでこの問題を克服したわけですが、極値統計において理論と現実のギャップをどう埋めていけばいいのか、知恵を絞る必要があると思います。

②もう1つは、データ自体が確率変量であることから避けがたく生ずる不確実性です。一般に統計解析では、解析の精密さと安定性 (信頼性) のトレードオフがあります。極値統計も例外ではなく、解析の数学的厳密さのみを追求することが信頼性の高い結果をもたらすとは限りません。近年は適合度に基づく分布関数の選択がよく行われますが、これは解析の精密さを指向するものであり、その有効性については上述の不確実性に照らした検討が必要だろうと思います。

上記の① ②については藤部 (2010 a) でも一言ずつ触れました (460ページ左 1~11行目, 右 6~16行

目。ただし論文という性格上、簡潔な記述にとどめました)。しかし、データが確率変量であることから来る不確実性と、適用する分布関数の違いから生ずるバイアスの大小関係を確認できていなかったため、②については腰の引けた書き方になっていました。その後、この問題について定量的な検討を行いました (藤部 2010 b)。その結果は稿を改めて論ずる予定です。また、一般化極値分布 (generalized extreme value distribution ; 以下 GEV) の適用の可否をめぐっては 2 (2) で議論します。

文献についてですが、Sumner (1988) では極値統計について定性的な説明しかなく、「興味のある読者は他の文献を見よ」となっています (8.4.1節)。また、Wilks (1995) でも極値統計の記述は1ページ半だけで、その内容は Gumbel 分布の簡単な紹介です。このことは、気象に関連する統計手法全体の中で、極値統計がマイナーな存在であることを象徴しています。その一方、極値統計はそれだけで1冊の本 (Coles 2001 ; Hosking and Wallis 1997など) ができるほど奥の深いテーマでもあります。極値統計に関して気象研究者間の議論を深めていくためには、最低限の共通基盤を作ることが望まれます。なお Wilks の第2版 (Wilks 2005) では極値統計の解説が5ページに増え、GEV とその適用限界に関する議論が書かれています。

2. 個別事項への質問と討論

(1) 「それ (=確率過程) に伴うランダムな変動 (確率変動) がデータに含まれるため」とは、その前の「年極値の現れ方が確率過程に支配され」を敷衍したものです。このように書き足したのは、「データ自体が確率変量である」ことを強調したかったからです。「ランダムな確率変動」は「想定した確率分布から

* 気象研究所予報研究部。

—2010年12月4日受領—

—2010年12月6日受理—

かけ離れたデータもある」という意味ではなく、「想定される確率分布に対応する変動」を意味します。

「確率変動」は英語では「stochastic variation」あるいは「probabilistic variation」が該当すると思います。

(2) GEV の適否については他の項でもコメントされていますが、ここでまとめて回答します。

年最大日降水量に GEV を適用するときの数学的な前提は、日々の降水量すなわち 1 年間 365 個の日降水量が「同一分布・独立・多数のデータ」と見なせるだろう、というものです。しかし藤部 (2010 a) に述べた通り、これらの要件が厳密に満たされることは期待できません。降水量は季節変化や総観変化に依存するので、日々の値が「同一分布」や「互いに独立」であるとは考えにくく、また、実質的な多雨期は夏季の数日ぐらいであることを考えると「多数」の要件が満たされるかどうかとも疑わしいからです。なお、データ数がいくつ以上なら「多数」と言えるかは、日降水量の確率分布によって違い、一概には言えないと思います。

以上のように、数学的な観点からすれば年最大日降水量へ GEV を当てはめることには疑義があります。しかし一方、1②で述べたようにデータ自体が確率変数であり、これに由来する不確実性があるため、GEV が正しいか（データの背後にあるべき母集団を正確に表現するか）どうかの厳密な検証は不可能です。GEV の適否は、データの確率変動に由来する推定誤差と、適用する分布関数の違いから生ずるバイアスとの大小関係を考慮しつつ、実用的な観点（分布関数の使いやすさなど）を含めて判断されるべきです。

前段落の最後のことを敷衍しますと、GEV はパラメーターを 3 つ持つ分布です (α, β, κ)。このことは、データに対して 3 次のモーメントまでフィットできることを意味します。従って、GEV の適合性が問題になるのは 4 次以上のモーメントに関してです。GEV の適否を論ずるに当たっては、データに確率変動が存在する中で、そういう高次の精度を追求する意味があるかどうかを見極める必要があります。

さらに別の言い方をしますと、データが確率変数であるが故に、真の (= 母集団の) 確率分布の正確な同定はできません。「日降水量の同一確率分布は確認されていません」というご指摘はその通りですが、厳密な確認がそもそも無理であることをご理解願います。

ついでですが、上記の論理からすれば分布関数が

GEV である必要はなく、3 つのパラメーターを持つ他の関数でもいいことになります。実際、気象庁の「異常気象リスクマップ」(小林 2006) に使われる 3 つの関数 (GEV, 対数ピアソン III 型分布, 対数正規分布) を対象にして、擬似データを使ったモンテカルロ・シミュレーションに基づく検討を行ったところ、異なる関数を適用することから生ずる再現期待値のバイアスは、その推定誤差の数分の 1 であることが見出されました (藤部 2010 b; もっとも、上記以外の 3 パラメーター関数についても同様のことが言えるかどうかは分かりません)。質問文に「年極値分布が近似的に GEV に従うとする経験的事実」とありますが、むしろ「極値解析に GEV がよく使われている」というのが経験事実だと言うべきだろうと思います。

一方、Hosking and Wallis (1997) や外山・水野 (2002) の地域頻度解析は、多くの地点のデータが同じ確率分布に従うという仮定の下に、複数地点のデータを合わせることによって 4 次までのモーメントを精度良く評価し、それに合う確率分布関数を見出そうとするものです。この方法の有効性、特にデータの確率変動に伴う不確実性と解析結果の精度との関係については、今後よく調べていく必要があると思います。

「極値」を年極値に限定する理由はありません。ただ一般論として、①極値の定義期間が短すぎると「多数」という GEV 成立の要件がますます成り立ちにくくなる、②定義期間を長くするとデータの個数が減って推定精度が悪くなる、ということが考えられます。いずれにしても、ある一定期間ごとの極値を対象にする方法では、その期間に極端な値が 2 つ以上観測されたときに、その中の最大のものしか解析対象になりません。その点、閾値解析は全期間の中から数居値 u 以上の観測値をすべて採用するため上記の問題はなく、極値の定義期間をどうすべきかという心配も無用です。しかし藤部 (2010 a) の結果によれば、データの確率変動から生ずる不確実性に比べて閾値解析の優位性はさほど目立ちませんでした。

(3) 5 日降水量や 10 日降水量も、それぞれのデータを「同一分布・独立・多数」の要件を満たすと見なせれば GEV が使えます。しかし一般論として、降水の時間スケールが長くなるほど「独立・多数」の条件が成り立ちにくくなるだろうと思います。実際には日降水量ですら、これらの要件を満たす保証がないことは前記の通りです。

(4) 対数の表記は流儀の問題です。Coles (2001),

Hosking and Wallis (1997), Pandey *et al.* (2001)などは自然対数を log で表記しています。

(5) 閾値解析では、①数居値 u を大きくしすぎると、使えるデータ数が少なくなってしまう、②しかし u が小さすぎると一般化パレート分布 (generalized Pareto distribution; 以下 GPD) が成り立たなくなる、という二律背反があります。従って u を大きくもせず小さくもしない、適当な値に設定することが求められます。 u の値の決め方は Coles (2001) や本城・篠田 (2008) に解説されています。

ただし、藤部 (2010 a) はこの問題に正面から取り組むことを避け、大ざっぱな考察で $M \leq 3$ としました。

(6) そうです。パラメーターの計算方法は上記の直前部分 (451ページ式 (7) ~ (14)) に明記したところです。

(7) モンテカルロ・シミュレーションにおける「繰り返し計算」とは、何かを収斂させるための「繰り返し」ではなく、多数の計算結果を得て統計的な信頼性を高めるための手続きです。回数を増やせば、それだけ結果の統計的信頼性が高まります。

(8) 後半から先にお答えします。実データでは年極値が必ず存在します (欠測がない限りは)。しかし藤部 (2010 a) のモンテカルロ・シミュレーションでは、極値の擬似データを「GPD に従う NM 個のデータを作り、それらの1つ1つをどれかの年にランダムに振り当てる」という方法を使って作りました。このやり方をしますと、データがたくさん振り当てられる年ができる一方、 M が小さいと値を1つも割り当てられない年が出てきて、年極値解析を行えないという問題が起こり得ます (後のご質問3 (c) にあるように、毎日の擬似データを作るという方法を使えば、この問題は起きません)。

$M=20$ とすることは、擬似データが GPD に従うことを前提とする以上は問題ありません。実データでは $M=3$ ぐらいが限界ですが、それは1年が365日しかない (実質的な降雨期間の日数はもっと少ない) からです。しかし、モンテカルロ・シミュレーションにおいては1年間の日数についての制約はありません。擬似データが GPD に (厳密に) 従うという前提は、暗黙に1年間の日数が ∞ であることを意味し、従って M に任意の値を設定することができます。

(9) 藤部 (2010 a) では結果のばらつきの尺度として 99% 幅を使っています。地点が10000個あれば、99%

幅の正負側にそれぞれ50個のデータがありますので、99%幅を見積もるに十分な数だと思います。

(10) 読者の判断を求める意図はありません。

再現期間の推定 (452ページ右④) など使われる x は、① x に定数を与える方法の場合はその値、② x を個別に計算するときはその推定値 \hat{x} 、③ x 平均法ならその空間平均値 \bar{x} です。ご指摘の記述は、これらを適宜 \hat{x} という表記で代表させるという意味です。「文脈」という言葉が良くなかったかも知れません。

(11) そうです。

「想定している」という意味は、 $N=107$ で $n=51$ 、 $N=45$ で $n=308$ 、 $N=29$ で $n=808$ という“地点”数と年数を持つ擬似データが、それぞれ気象官署・区内観測・アメダスのデータに模したものだという趣旨です。

(12) 第3図の縦軸は真数です。図の説明文に「対数平均値」とあるのは、平均値を求める際には対数を使ったという意味であり、図自体は真数を表示しています。今読み返してみると誤解を招く書き方だったと反省しております。

(13) 母集団の非定常性と確率変動とは別です。確率変動の大きさに比して母集団の非定常性が目立つ例としては気温が挙げられます。年間最高気温は年々の差が比較的小さい (すなわち、確率変動が小さい) 一方、温暖化が進めば高温側へドリフトしていくはずで (母集団の非定常性)。

母集団の定常性の検証に関しては、3 (a) で議論します。

(14) 彦根豪雨の再現期間は「非現実」というより (そういう言葉は使っておりません)、今の極値統計手法の手には負えない、と言った方がいいと思います。

一般に、データの年数を超えた再現期間の推定は分布関数の外挿を伴い、信頼性が低くなります。北野ほか (2008) は外挿による再現期間推定の限界を考察しており、その結果に従うと彦根豪雨の再現期間は不明 (評価不能) であることとなります。

しかし気がかりなのは、今後彦根豪雨のようなことが起きたとき、社会やマスコミから「この豪雨は何年に1度ぐらいのことなのか」を問われることです。そういう場合、「今回の豪雨は統計理論の適用範囲外だ」という答で納得してもらえとは思えません。かと言って、何十万年という再現期間の計算値をそのまま伝えるのも誤解を生じます。科学的な正しさを失わ

ず、かつ社会の理解と信頼を得られる説明をどうすべきなのか、知恵を出し合う必要があると思います。

3. 基本的な疑問

(a) 前半に関しては2(2)で回答しました。

後半に関してですが、「同一分布・独立・多数」の成否と「母集団の定常・非定常」とは、別問題です。以下「母集団の定常・非定常」について私見を述べさせていただきます。

母集団の実体は、極値統計の対象となる気象要素(例えば降水量)の変動を作り出す気候システムだと思います(かなり漠としたイメージではありますが)。母集団が定常であるということは、日々・年々の気象変動をもたらす気候システムが定常であることを意味します。しかし現実の気候システムは定常ではありません。これは多言を要しないと思います。この非定常性のもとでは、定常性を前提にした解析は近似的な意味しか持ちません。

母集団の非定常性を極値解析に反映させる手段として、分布関数のパラメーターに時間変化項を入れる方法があります。酢谷・水野(2010)はその例です。しかし、これを行うとパラメーターが増え、推定の安定性が損なわれる可能性があります。ここでもまた、データの確率変動に由来する不確実性のため、推定の精密さには限界が生じます。言い替えると、推定の精密さと安定性のバランスを見極める必要があります。

(b) これも1②と2(2)で議論しました。

(c) きちんと考えたわけではありませんが、ある単純な確率分布(正規分布など)を使ってランダムな日別データを作るだけなら、藤部(2010a)の方法と実質的な差はないだろうと思います。やるとすれば、現実の降水の季節変化や総観変化の特性をちゃんと反映する擬似日降水量データを作るべきでしょうが、それを作ること自体が大仕事です。気候モデルによるシミュレーションに統計的ダウンスケーリング手法を組み合わせる方法が考えられますが、極端な降水をどこまで現実的に再現できるかを見極める必要があると思います。

4. さらに理解を深めたい問題

(a) 極値統計の本やサイトを見たところ、波高や工業製品の腐食深などの例がありました。

また、「1000回サイコロを振って合計点を取る」ことを毎日繰り返した場合、年間の最高得点は良い精度

でGEVに従うだろうと思います。

(b) ご指摘の箇所は「GEVよりも他の分布関数のほうがデータにより良く適合するかも知れないから、いくつかの関数の中からデータに一番よく適合するものを選ぶ」という発想を紹介したものです。具体的な考え方や手順は各引用文献(Hosking and Wallis 1997; 外山・水野 2002; 三浦・水野 2005; 小林 2006など)に詳述されています。

ただ、1②と2(2)で述べたように、関数の適合性の検討に当たっては、データが確率変量であることから来る不確実性と解析の安定性を考慮した扱いが求められると思います。

(c) 後半はその通りだと思います。今はそういうアプローチの研究が不足しています。

前半は2(2)で議論しました。補足しますと、ご指摘のことに関連するものとして、風の極値解析とときどき使われるmixed climate(混合気候)の考え方があります(例えばBrabson and Palutikof 2000; 山口・石原 2009)。風速の極値は、「季節風や温帯低気圧による比較的高頻度・低風速の事象」と「台風による低頻度・高風速の事象」のように、原因による強さや頻度の系統的な違いが比較的是っきりしています。mixed climateの発想は、このことを念頭に置いて風速の極値を複数の確率分布関数の合成で表現しようとするものです。

降水についても、いろいろな擾乱や時間スケールによる事象を概念的には区別できます。その意味で、mixed climateは数理と現実気候の落差(1①)を縮める有望な発想かも知れません。しかし、実際のデータにおいて極端な降水の「原因」を区分けするのは簡単ではなく、具体的なやり方はこれからの研究課題だと思います。

(d) 1①に述べた通り、数理と実際の現象との落差は極値統計における根本的な問題であり、その克服が今後の課題です。

謝辞

極値分布関数の外挿による再現期間推定の数学的限界(2(14)関連)について、間瀬 肇准教授(京大防災研)と北野利一准教授(名古屋工大)からご教示頂きました。ここに感謝致します。

参考文献

藤部文昭, 2010a: 極端な豪雨の再現期間推定精度に関する

- る検討. 天気, 57, 449-461.
- 藤部文昭, 2010 b: 極値分布関数の適合度評価に関する検討. 日本気象学会予稿集, (98), B111.
- 北野利一, 森瀬喬士, 喜岡 涉, 高橋倫也, 2008: 確率波高に対する推定の可否を決定づける新たな指標の提案. 海岸工学論文集, 55, 141-145.
- 二宮洸三, 2011: 「極端な豪雨の再現期間推定精度に関する検討」(藤部 2010) に対する質疑. 天気, 58, 143-145.
- 酢谷真巳, 水野 量, 2010: トレンドモデルにより経年変化を考慮した気温極値解析. 天気, 57, 573-588.
- Wilks, D. S., 2005: Statistical Methods in the Atmospheric Sciences, 2nd ed., Academic Press, 627 pp.
- 山口 敦, 石原 孟, 2009: 台風シミュレーションと気象解析を利用した設計風速評価手法の提案. 第31回風力エネルギー利用シンポジウム, 173-176.
- 上記以外は藤部 (2010 a) と二宮 (2011) 参照.

Reply

Fumiaki FUJIBE*

* *Meteorological Research Institute, Tsukuba 305-0052, Japan. E-mail: ffujibe@mri-jma.go.jp.*

(Received 4 December 2010 ; Accepted 6 December 2010)
