

## 球面上の偏微分方程式解に関するワークショップ2009の報告\*

榎本 剛・富田 浩文

標記ワークショップから既に1年以上が経過し、次のワークショップが2010年8月に開催されてしまった。投稿の機会を逃してしまったのだが、日本人があまり行かない会議報告を楽しみにしているという同僚の話に勇気づけられ、投稿することにした。

2009年のワークショップは、4月27～30日に米国ニューメキシコ州サンタフェで開催された。我々は最寄りの空港のあるアルバカーキから、シャトルバスに乗った。1時間少々の道中、乗り合わせた日本人女性観光客に、サンタフェがアメリカを代表する画家ジョージア・オキーフゆかりの街であることを教えてもらった。すると、後ろの席からも英語でオキーフについての会話が聞こえてきた。サンタフェは、オキーフ美術館があり、目抜き通りにギャラリーが数多く立ち並ぶアートの街である。また、米国最古の教会がある歴史の街という顔もある。到着後、鉄道に詳しい山田広幸さん(海洋研究開発機構)にサンタフェにいますとメールを送ったところ、すぐさま「由緒正しき Santa Fe railway の起点駅があるところですね。今は Santa Fe southern railway と名を変えて観光列車が走っているそうですぞ」との返答が即座にきた。一日に数本しかないようだが、アルバカーキからその列車に乗ってきたという参加者もいた。

今回の日本からの参加者は、本稿の著者2名だけである。会議の話題は、大気だけでなく、海洋、さらにはマントル対流等「球面上の偏微分方程式解」一般を

対象とし、手法も多岐にわたっている。40件を超えるすべての話題をもれなく伝えるのは著者の能力を超えるので、各自の発表と関心を持った研究にコーヒーブレイクや食事の際に聞いた話題等を交えて報告する。著者2名の興味に偏ることをご容赦いただきたい。

## 1. 放射状基底函数

球面上の偏微分方程式を解く際、球面調和函数を基底函数として物理量を展開し、東西波数と全波数とを同じ値で切断(三角形切断)すれば、実空間での解像度が全球一様となる。これは長所でもあるが、柔軟性に欠ける点では短所でもある。基底函数として、距離のみに依存する放射状基底函数(RBF)を用いれば、地理的に柔軟に格子を配置しつつ、誤差を切断波数と共に指数関数的に収束させることができる。

N. Flyer (NCAR) は、3次元マントル対流の計算をRBFを用いて行い、先行研究とほぼ同じ結果を少ない格子点数(水平4096点、鉛直51層)で得ている。彼女は、鉛直にはChebyshev展開を用いていたが、比較対象として、水平には球面調和函数で離散化、鉛直には差分を用いたものや、陰陽格子を用いた計算例も挙げていた。後者の計算は、格子数が2桁くらい大きいもので、以前同僚だった亀山真典氏(愛媛大)が地球シミュレータ上で行ったものである。

RBFに関連して、E. Lehto (ウプサラ大)は適合格子生成法、G. B. Wright (ボイズ州立大)はベクトル場の内挿法について発表した。J. P. Boyd教授(ミシガン大)は、球面上の順圧渦度方程式を解いた例を示し、渦に伴う微細構造に応じて格子を配置できるRBFの利点を強調した。

富田さんは、基底函数の直交性が確保されていないのに精度が保てるのだろうかと話していた。私(榎本)は、計算コストが問題にならないければ、陸や海底

\* Report of Solutions of Partial Differential Equations on the Sphere 2009 (PDEs 2009).

\*1 Takeshi ENOMOTO, 海洋研究開発機構地球シミュレータセンター. eno@jamstec.go.jp

\*2 Hirofumi TOMITA, 理化学研究所計算科学研究機構. htomita@riken.jp

© 2011 日本気象学会

地形のために通常のスペクトル法の適用が困難な海洋モデルには向いているかもしれないと感じた。また、非一様に分布した観測データから格子点値を計算する場合にも利用できそうである。(榎本)

## 2. 高周波のフィルタリング

スペクトル変換法とともに従来から使われてきたセミ・インプリシット法に代わる手法として、M. Restelli (MPI-M) は速度や圧力に滑らかな値を用いる方法 (regularization) を ICON の浅水モデルに適用した。滑らかな値の計算さえ済めば、陽的な時間積分法が適用できること、保存性がよく数値的なエネルギーのカスケードが生じていないことを利点として挙げていた。この手法は海洋大循環モデル POP に適用されている。一方、C. Clancy (ダブリン大) は、ラプラス変換を用いた高周波フィルタを適用すれば、ケルビン波の位相が正しく表現され山岳での共鳴が発生しないという研究を発表した。(榎本)

## 3. テストケース

C. Jablonowski (ミシガン大) は、3次元モデル用のテスト一揃いを提案し、サマースクールで受講生とともに10の力学コアを評価した結果を紹介した。最初のテストは平衡が保たれた定常状態におけるモデルの挙動を調べるもの、次は傾圧不安定波の表現を確認するものである。オイラー法を用いたスペクトルモデルは、前者に関してはほぼ完璧であるが、後者では波状のノイズが現れる。正二十面体格子や立方体格子を採用したモデルでは、定常状態のテストでノイズが出るが、傾圧不安定波のテストでは比較的滑らかに表現されていた。実際は、拡散を使うのでどちらもノイズは目立たなくなるのだが、力学コアの特性を知る上でこのような評価を行うことは重要であると思われる。3番目は、鉛直移流を考慮したトレーサ移流、残りは大気波動に関するケースで Rossby-Haurwitz 波、山岳波、重力波である。

N. Wedi (ECMWF) は、半径を小さくした小惑星を用いた非静力学コアのテストについて報告した。彼が用いたのは、フランス気象局が開発した非静力学コアを ECMWF の予報モデル IFS に導入したものである。小惑星実験では、静力学と非静力学との差が明瞭に現れることを示した。水平に伝播する山岳波が、静力学平衡を仮定すると鉛直に伝播してしまう。また、鉛直に伝播する重力波の実験では、静力学平衡を仮定

すると重力波の碎波や反射がうまく再現されず、臨界層を突き抜けてしまう。講演後、ニュートン冷却を入れると、そのようなことはないのではないかと聞いてみたが、現在は非線形的な碎波が主たるメカニズムで、波の飽和は重要ではないと考えられているとのことだった。

最後に、水平解像度約10 km に相当する TL2047 (T は三角切断、L は切断波数の約2倍の東西格子数を用いる線型格子を示す) での計算例を示した。この解像度では、静力学と非静力学との顕著な差は見られない。非静力学版は繰り返し計算が必要で静力学版の最低2倍のコストがかかることから、この解像度では静力学版で十分であるとの見解を示した。この結果によれば、せいぜい水平解像度10 km スペクトルモデルの非静力学化を急ぐ必要はないのだが、小惑星実験等で経験を積むことは重要であると感じた。なお、全球1 km 格子の TL20000 は、TL2047 の300倍のコストでできると見積っているそうである。(榎本)

## 4. 経路探索

アメリカとカナダの予報現業モデルに関する発表は、共にセミ・ラグランジュ移流の経路探索に関するものであった。

H.-M. Juang (NCEP) は、中間点を格子上におく経路探索法を考案した。従来の経路探索では、到着点を格子上におくので、そこでの内挿は必要無いが、繰り返し法で見つける中間点では内挿が必要となる。この手法では中間点を格子上に置くので、そこでの内挿は不要となるが、到着点での内挿が必要となる。到着点での内挿は、単調性の確保を容易にするために、次元を分離して1次元で行う。次元分離の影響は、今のところ認められていないが今後よく確認したいとのことだった。

J. Côté (カナダ環境省) は、2タイムレベルスキームを安定化させる手法である SETTLS (Hortal 2002) に関し、大円上の等角速度運動を用いた経路探索法 (Côté 1988) を一定の加速度を考慮した場合に拡張した。ECMWF 等が用いている、Ritchie (1987) の方法では、デカルト座標に変換して接平面上で上流点を探索し、運動を球面上に制約するパラメータをかける。これに対し、等角速度円運動を考慮すれば、向心力により円周上に当然引き戻される。Enomoto (2008) では、Ritchie (1987) に従ったが、Côté (1988) の方が簡単で美しい。思い起こせば、

最初に入学した大学の応用物理学科の推薦入試問題がこれだったのだから、高校生にも分かる方法である。最初からこちらで提案されていたとしても不思議ではない。

どちらも既存の方法を熟知しているベテランによる研究であるが、既存の方法にとらわれない柔軟な発想を持ち続けていることに感服した。(榎本)

### 5. スペクトル双3次補間

榎本(筆者)もセミ・ラグランジュ移流の改良につながる研究成果を発表した。セミ・ラグランジュ移流に用いられる内挿法は、3次のラグランジュ補間等格子点値を用いるものが主流である。精度を高めるには、より多くの点を利用することになる。これに対して、エルミート補間やその2次元版である双3次(バイキュービック)補間等は、格子点値だけでなく微分を利用する。利用する格子点値と微分は、内挿する点が含まれる格子を形成する4点の値だけで良いので、コンパクトである。Enomoto(2008)では、球面調和関数を使って正確に計算した微分値を双3次補間に利用する手法をスペクトルモデルに適用した。今回は、この内挿法を用いたセミ・ラグランジュ移流をNCARの浅水モデルに適用し、一連のテストケースを実行した結果について報告した。定常状態ではオイラー移流に劣るものの、500 hPaの解析場からの予報実験ではオイラー移流を凌駕する精度を示したこと等を紹介した。とくに、同じ格子数で切断を東西格子数の約半分まで緩めた場合(線型格子)は、さらに精度が向上した。多くのセミ・ラグランジュ移流で用いられている3次のラグランジュ内挿は、線型格子にしたときの感度は小さかった。スペクトル双3次補間では切断の緩和により微分がより正確になったために精度が向上したものと思われる。微分計算のためのルジャンドル変換を避けるために、東西はフーリエ変換で計算した微分値を用い、南北には5次のラグランジュ補間を用いると同程度の精度が得られることも報告した。

発表の後、J. P. Boyd教授に話しかけたところ、精度と計算効率のバランスがとれた方法だと思うとのコメントをいただいた。G. B. Wrightは、ルジャンドル変換を用いない場合にもコンパクトさを維持するために、高精度のコンパクト差分を用いて南北微分を計算してはどうかと提案し、関連する文献を紹介してくれた。また、H.-M. Juangから、水蒸気等の移流に

は単調エルミート補間が向いているのではないかとの指摘も受けた。(榎本)

### 6. 球面一様格子

全球モデル(特に大気モデル)では、通常の緯度経度格子に見られる極問題を避けるために、出来るだけ一様に格子を配置したいという要求がある。そこで、様々な準一様格子が考案されてきて、過去の本ワークショップでもひとつの論点であったが、最近では立方体格子、正二十面体格子などが主流になりつつあり、少しずつ取束しているように思う。立方体格子を使った例としては、M. Taylor(サンディア国立研究所)からNCARで開発されてきたスペクトル要素法モデルHOMMEの紹介があったし、J. L. Lee(NOAA)からは、NOAAで開発中の有限体積法に基づいた正二十面体格子モデル(FIM/NIM)の紹介があった。後者のモデルは海洋研究開発機構と東大気海洋研究所共同開発のNICAMと非常によく似ているアプローチである。(富田)

### 7. 六角形か三角形か

ひとくちに正二十面体格子モデルといっても、質量と速度の位置関係(格子点の配置)はさまざまであり、バリエーション豊かである。ここではその格子配置に関する発表内容を紹介する。

今回、大挙して発表件数も多かったマックスプランク気象学研究所(MPI-M)のICONグループでは、三角形C格子を採用している。しかしながら、そのグループの一人、A. Gassman(MPI-M)は、方程式系にvector-invariant formを使いそれを一般化したHamilton形式(量子力学で言うNambuブラケットに相当)で書き下して六角形C格子で離散化することにより、エネルギー、エンストロフィー保存が容易に確保できることを示していた。彼女自身は六角形C格子がお気に入りのようであったが、ICONプロジェクトは三角形格子で突っ走るようである。三角形格子を採用するひとつのメリットとして容易にlocal grid refinement(局所格子再分割)が可能であることがあろう。G. Zängl(ドイツ気象局)は、ICONは三角形C格子なのでこのご利益にあずかることが出来るが、一方急激に格子サイズが細くなるので変数の補間方法に気を使わねばならないことを示した。実際には、放射状基底関数を使うようである。Gassmannが代行で行ったH. Wan(MPI-M)の発表は、

ICON の静力学バージョンの現状報告であった。数値ノイズに悩まされているようではあったが、spring dynamics (バネの類推を用いた格子生成法) によって生成した格子を使うとノイズの軽減につながる事が報告された。

ICON グループが三角形 C 格子を推し進めるのに対して、アメリカ勢の B. Skamarock (NCAR), J. Klemp (NCAR) といった大御所(?)らは、六角形 C 格子が良いことを強く主張していた。一般に C 格子では、コリオリ力の取り扱いに工夫を要する。何も処置を施さないと偽のロスビーモードが発生するのである。Skamarock は先年 Thuburn (2008) が行った方法で歪んだ六角形 C 格子でこの偽のモードを取り払う方法を報告した。Klemp はより一般的に三角形格子、四角形格子、六角形格子における地衡風調節時のモード解析を行い、三角形 C 格子では、「波から見える」格子間隔にガタツキがあるため分散関係がスムーズでないことを示した。また、六角形 C 格子は、四角形、三角形よりも時間ステップが長く取れることを示し、六角形 C 格子の優位性を主張していた。T. Ringler (ロスアラモス国立研究所) は、六角形 C 格子でのエネルギー、ポテンシャル渦度を保存するスキームを紹介し、球面上の可変格子でもこれらの保存を考えたスキームの方が高精度であることを示した。

六角形か三角形か。今のところ理論的には六角形格子が優位のように思えるが、個人的には、より柔軟性が高い三角形格子に興味を覚えるし、ダメだと言われれば、その欠点を克服したい衝動に駆られるのは性分であろうか。なお、NICAM は現在六角形 A 格子である。次のバージョンでは C 格子 (六角形か三角形かは分からない) を採用したいと個人的には考えている。(富田)

### 8. Discontinuous Galerkin 法

Discontinuous Galerkin 法 (以下、DG 法) は、基本的には有限要素法の拡張と考えていいだろう。各セル内で閉じるのでローカリティーに優れており、スペクトル要素法との大きな違いは、セル間のインターフェースで不連続を許容するところにある。今回、この DG 法の発表も多かった。F. Giraldo (NRL) はスペクトル要素法と DG 法のレビュー的な紹介を行い、なかなか為になった。R. Lowrie (ロスアラモス国立研究所) はトレーサー移流のために DG 法をつかった離散化の中での remapping (格子再配置) 法につい

て、M. Läuter (ウェゲナー研究所) は DG 法の欠点である陽解法で時間刻みが小さくなることを克服するためセミ・インプリシット法を導入した方法について、R. Nair (NCAR) は粘性項の DG 法化についてそれぞれ紹介していた。(富田)

### 9. NICAM 力学過程の最近の改良

富田 (筆者) は、NICAM のダイナミクスで最近進展した部分について発表した。トレーサー移流では連続性を伴う一貫性 (CWC) 条件が満たされていることが望ましいが、最近 CCSR (現 東大気海洋研) の丹羽洋介君 (現在は気象研究所に所属) が NICAM で CWC 条件を満たす方法を考えてくれたので、そのスキームの紹介を行った。また、来るべき次世代スーパーコンピュータでの意気込みやシュミット変換を使ったストレッチ二十面体格子の話も盛り込んだ。T. Davies (レディング大) からはストレッチの度合いを大きくしすぎると格子の急激な変化で波の伝播等おかしなことがおこると指摘を受けた。まだ、極端なストレッチ格子を試していないが、今後の課題となりそうである。(富田)

### 10. おわりに

今回のワークショップでの収穫は、分野、手法、年齢層の異なる研究者と密に交流できたことにあると考えている。今回日本からは、たまたま同じ年に生まれた、「アラフォー」な気象学者 2 名の参加となった。今後のワークショップには、日本からも、気象はもとより、海洋、固体地球など、より幅広い分野、幅広い年齢層の力学コア研究者が多数参加することを期待したい。(榎本)

### 略語一覧

CCSR : Center for Climate System Research 東大気候システム研究センター (現 大気海洋研究所)

CWC : Consistency With Continuity 連続性を伴う一貫性

ECMWF : European Centre for Medium-Range Weather Forecasts 欧州中期予報センター

FIM : Flow-following finite-volume Icosahedral Model NOAA の静力学正二十面体地球システムモデル

ICON : ICOSahedral Non-hydrostatic General Circulation Model MPI-M の正二十面体非静力学大循環モデル

IFS : Integrated Forecast System ECMWF 統合気象予

報システム  
 MPI-M : Max-Planck-Institut für Meteorologie マックスプランク気象学研究所  
 NCAR : National Center for Atmospheric Research 米国大気科学研究センター  
 NCEP : National Centers for Environmental Prediction 米国国立環境予測センター  
 NICAM : Nonhydrostatic Icosahedral Atmospheric Model 海洋研究開発機構地球環境フロンティア研究センターと東京大学気候システム研究センター (現 東大 大気海洋研) で開発された正二十面体大気モデル  
 NIM : Nonhydrostatic Icosahedral Model NOAA で開発中の非静力学正二十面体地球システムモデル  
 NOAA : National Oceanic and Atmospheric Administration 米国海洋大気局  
 NRL : Naval Research Laboratory 米国海軍研究所  
 POP : Parallel Ocean Program 米国ロスアラモス国立

研究所の並列海洋大循環モデル  
 RBF : Radial Basis Function 放射状基底函数

#### 参 考 文 献

- Côté, J., 1988 : A Lagrange multiplier approach for the metric terms of semi-Lagrangian models on the sphere. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **114**, 1347-1352.  
 Enomoto, T., 2008 : Bicubic interpolation with spectral derivatives. *SOLA*, **4**, 5-8.  
 Hortal, M., 2002 : The development and testing of a new two-time-level semi-Lagrangian scheme (SETTLS) in the ECMWF forecast model. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **128**, 1671-1687.  
 Ritchie, H., 1987 : Semi-Lagrangian advection on a Gaussian grid. *Mon. Wea. Rev.*, **115**, 608-619.  
 Thuburn, J., 2008 : Numerical wave propagation on the hexagonal C-grid. *J. Comp. Phys.*, **227**, 5836-5858.